

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 6.1 Αποδείξτε ότι αν V, W είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, τότε V και W πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα.

Άσκηση 6.2 Αν η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση, δείξτε ότι υπάρχουν διανύσματα w για τα οποία το $A^t y = w$ δεν έχει λύση. Κατασκευάστε ένα τέτοιο w .

Άσκηση 6.3 Αν $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0, z+3t=0\}$ και $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2y+t=0\}$ προσδιορίστε βάσεις και διαστάσεις για τους χώρους $U, V, U \cap V$ και $U + V$.

Άσκηση 6.4 Θεωρούμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$,

$$X = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 = 2x_2 + x_3, x_4 = x_5\}.$$

(1) Βρείτε υπόχωρο $Y \subseteq \mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^5 = X \oplus Y$.

(2) Βρείτε υπόχωρο $U \subseteq \mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $(0, 1, 2, 1, 1) \in U$ και $\mathbb{R}^5 = X \oplus U$.

Άσκηση 6.5 Έστω $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των 3×3 πινάκων πάνω από το $\mathbb{R}$. Αν W ο υπόχωρος των άνω τριγωνικών πινάκων και U ο υπόχωρος των κάτω τριγωνικών πινάκων (βεβαιωθείτε ότι είναι υπόχωροι), βρείτε βάσεις και διαστάσεις για καθένα από τους $W, U, W \cap U$ και $W + U$.

Άσκηση 6.6 Ποιά από τα παρακάτω σύνολα αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3;

(1) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$

(2) $\{1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$

(3) $\{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$

Άσκηση 6.7 Βρείτε βάση για τον καθένα από τους παρακάτω υποχώρους του $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$.

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & a-b & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

(2) Το σύνολο των διαγώνιων πινάκων του $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$.

Άσκηση 6.8 Αφού δείξετε ότι το υποσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ του $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ είναι γραμμ. ανεξάρτητο φτιάξτε μια βάση του $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ που να το περιέχει. Ποιές είναι οι συντεταγμένες του $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$ ως προς την βάση που βρήκατε;

Άσκηση 6.9 Δίνονται οι πίνακες $A \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R})$ και $B \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

- (1) $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(AB)$,
- (2) $\mathcal{R}(AB) \leq \mathcal{R}(A)$,
- (3) $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.