

Εισαγωγή στην
Επεξεργασία Σημάτων

Μετασχηματισμός
Fourier

2^ο Μέρος

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$(f_1 * f_2)(t) \quad t = \tau + x$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Ο Παλμός δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

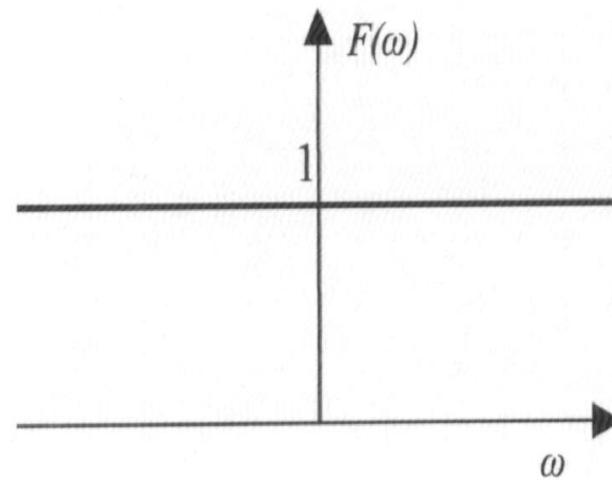
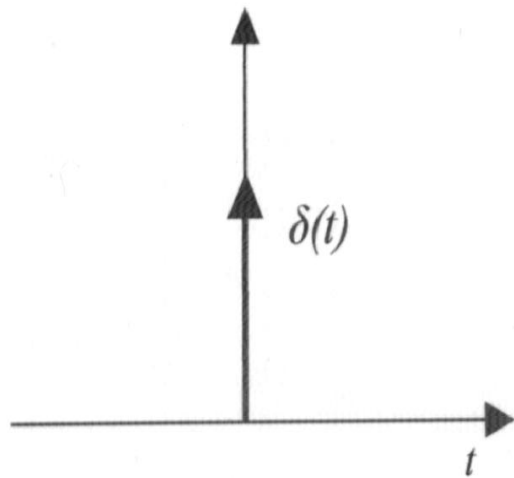
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

Ο Παλμός δ

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



Ο Παλμός δ

$$f(t) = 1$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

Θεώρημα Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega$$

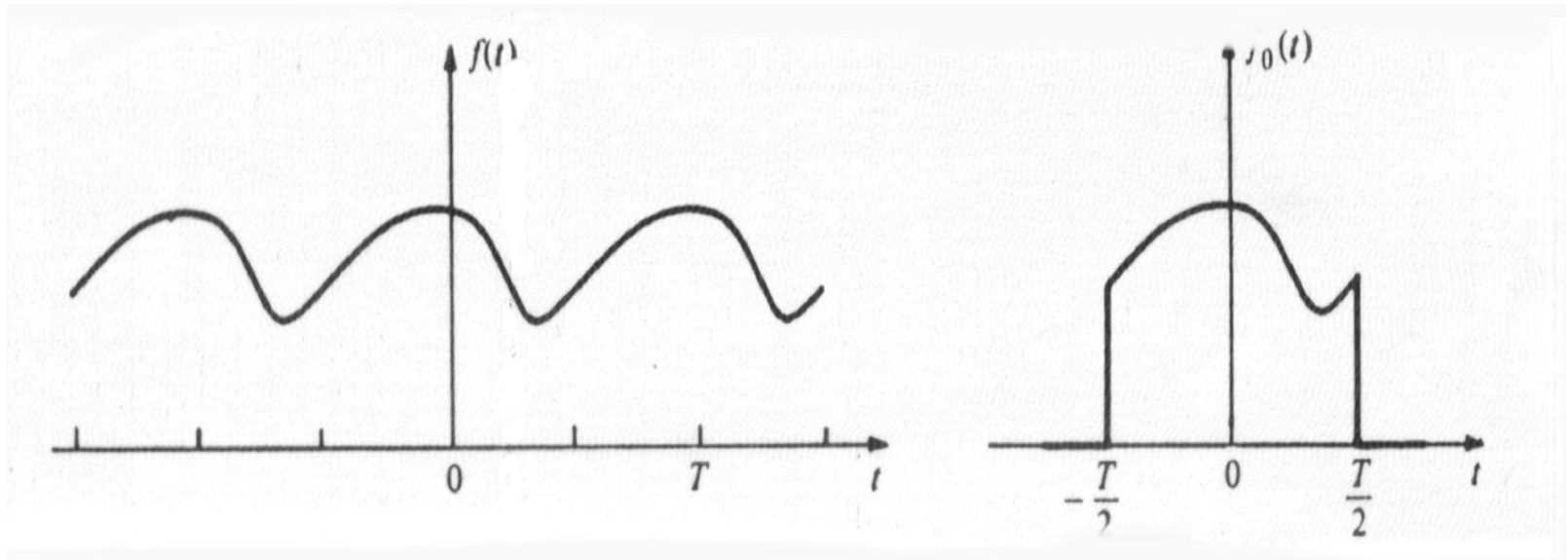
$$f_1(t) = f_2(t) = f(t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

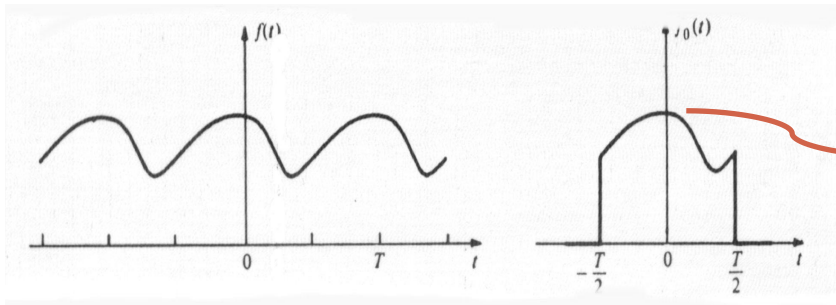
Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$



Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$



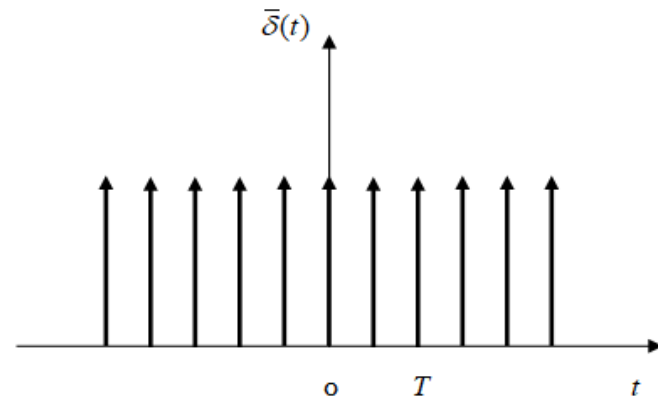
$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT)$$

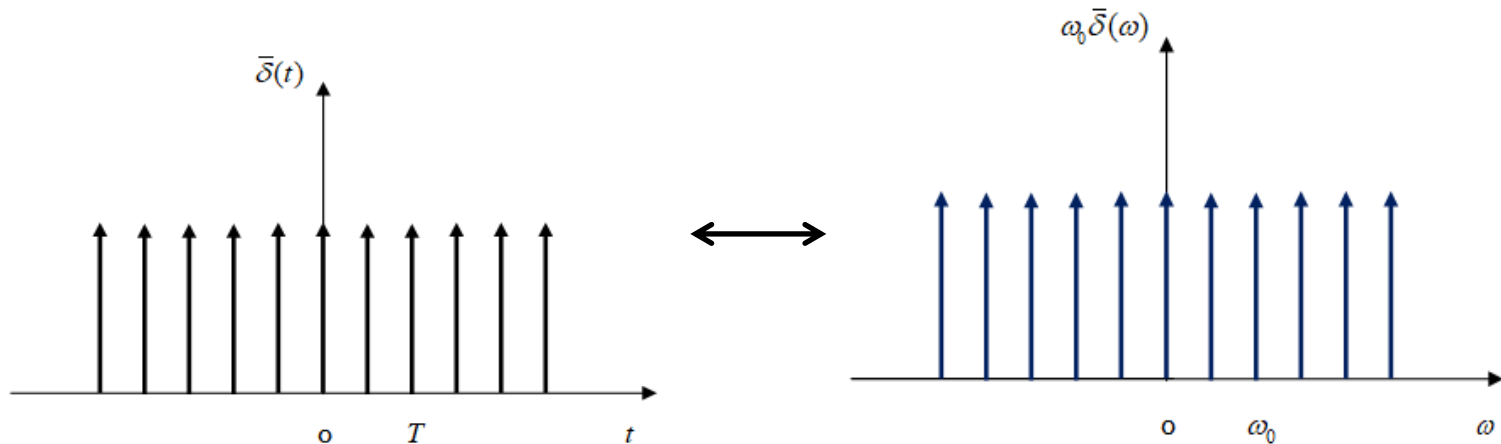
$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$



Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier των δύο μερών

$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$$

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a).$$

Περιοδικά Σήματα

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega - a)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{iat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

$$e^{in\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\mathfrak{F}^{-1}(F(\omega)) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)\right]$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}(F(\omega)) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)\right] = \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \frac{1}{2\pi} e^{in\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

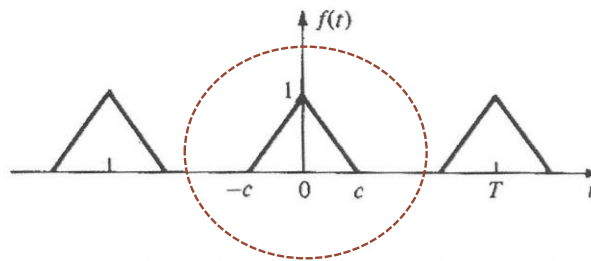
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$

$$f_0(t) = q_c(t)$$

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases}$$

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4 \sin^2(c\omega / 2)}{c\omega^2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$



Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$

$$f_0(t) = q_c(t)$$

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases}$$

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4 \sin^2(c\omega / 2)}{c\omega^2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

