Εισαγωγή στην Επεξεργασία Σημάτων

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

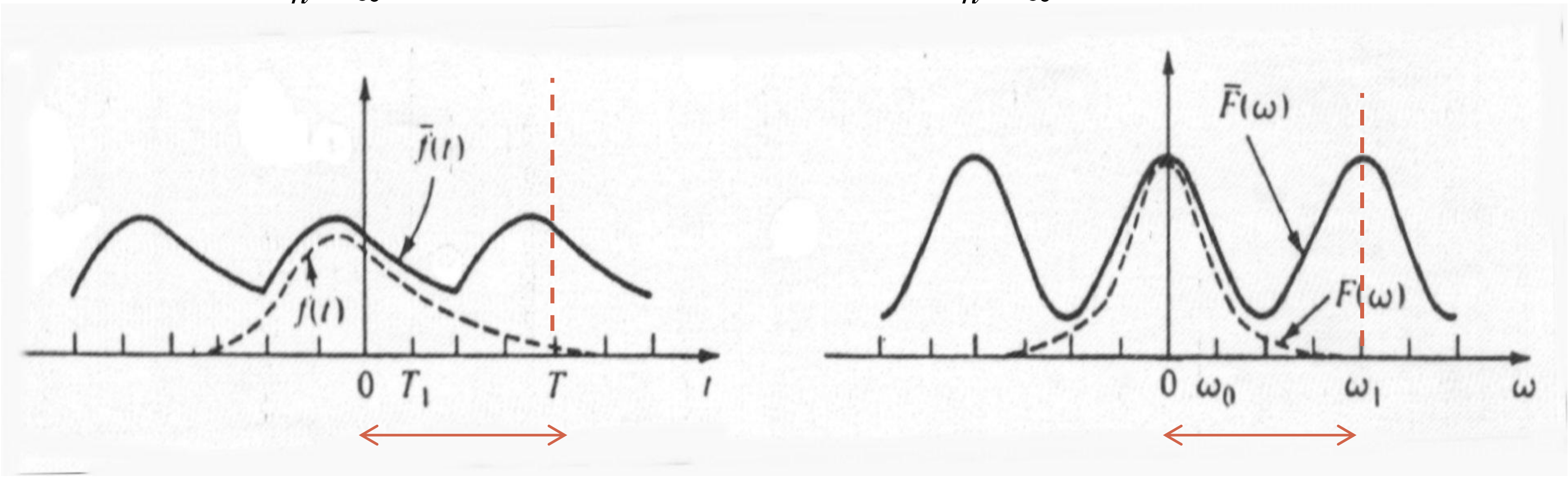
Μέρος 2ο

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Από τη δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου στη δειγματοληψία στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

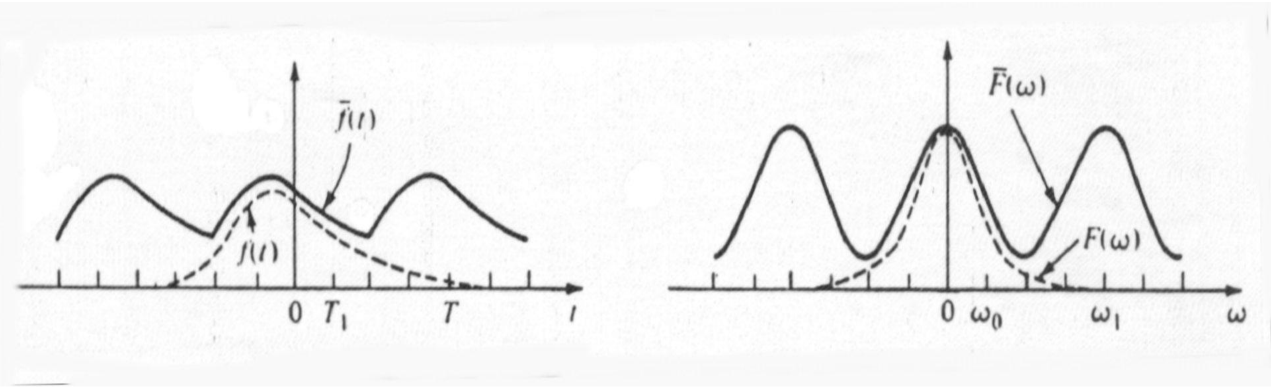


$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Poisson Sum Formula

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

$$F(n\omega_0) = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \bar{f}(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$ Συντελεστές Fourier της $T\bar{f}(t)$



$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Poisson Sum Formula

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

$$F(n\omega_0) = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \bar{f}(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$ Συντελεστές Fourier της $T\bar{f}(t)$

Θυμίζουμε ότι για περιοδική $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT)$ με $f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}, \quad a_n = \frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \qquad a_n = \frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$$

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Poisson Sum Formula

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

$$F(n\omega_0) = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \bar{f}(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

Συντελεστές Fourier της $T\bar{f}(t)$

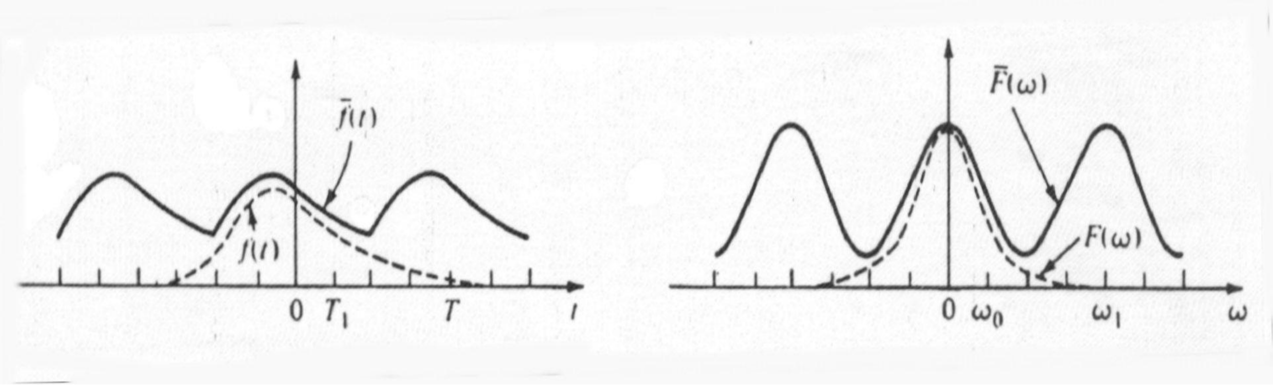
διακριτές τιμές της συνάρτησης $F(\omega)$

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \overline{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\overline{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-inT_1\omega} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Χρειαζόμαστε κάτι ανάλογο για την συνάρτηση $f(t)$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$T_1 = T / N \qquad \omega_0 T_1 = \omega_0 T / N = 2\pi / N$$

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 m T_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k {w_N}^{km} \qquad w_N = e^{i 2\pi / N}$$

.

$$k = n + rN, \; n = 0,1,\ldots., N-1 \quad r = \ldots -1,0,1,\ldots\ldots$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{mn} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$$

$$\overline{c}_N \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{c}_n w_N^{mn}, \qquad m = 0,\ldots., N-1$$

Οι τιμές δειγματοληψίας της $y(mT_1)$ και οι συντελεστές $\overline{c}_N$ σχετίζονται από το ως άνω σύστημα N εξισώσεων

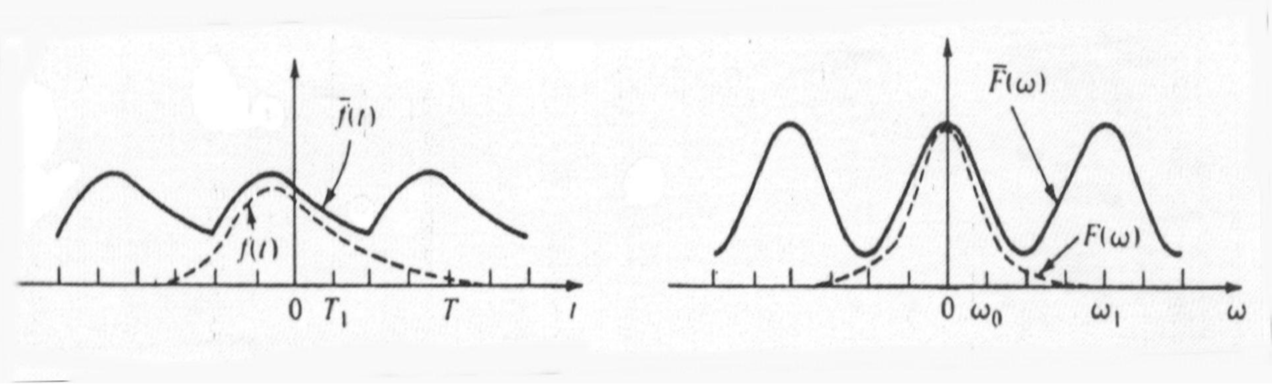
Εφαρμογή στη συνάρτηση $\bar{f}(t)$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}\bar{F}(n\omega_0)w_N^{\ mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1}\bar{c}_n w_N^{\ mn}, \qquad m = 0,\ldots., N-1$$

$$T_1 = T/N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0$$

Σύστημα N εξισώσεων που μας δίδουν τις τιμές δειγματοληψίας $\bar{F}(n\omega_0)$



$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} \overline{F}(n\omega_0) w_N{}^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}$$

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N{}^{mn} \qquad m = 0, \ldots\ldots, N-1, \qquad w_N = e^{i2\pi/\mathrm{N}}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N{}^{-mn} \quad n = 0, \ldots., N-1$$

$$A_m \to \bar{f}(mT_1)$$

$$a_n \to \frac{1}{T}\overline{F}(n\omega_0)$$

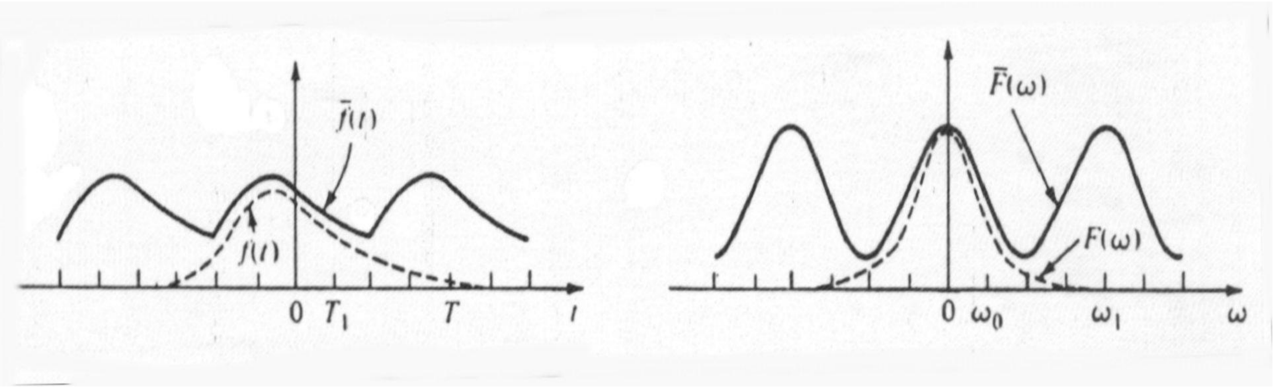
$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N{}^{mn} \qquad m = 0, \ldots\ldots, N-1, \qquad w_N = e^{i2\pi/\mathrm{N}}$$

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N{}^{-mn} \qquad n = 0, \ldots., N-1$$

$$a_n \underset{N}{\leftrightarrow} A_m$$

Διακριτή σειρά Fourier τάξης N

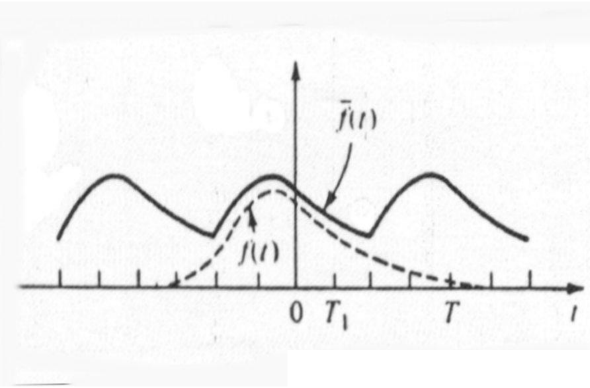
Περιοδική $\qquad A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$

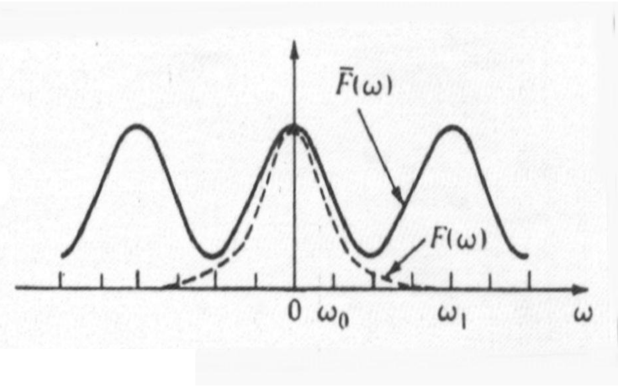


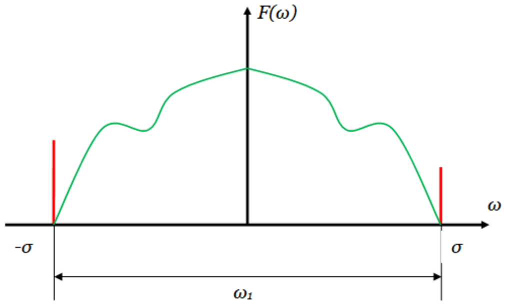
$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1)$$

$$\frac{1}{T}\bar{F}(n\omega_0) \leftrightarrow \bar{f}(mT_1)$$

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn} \qquad w_N = e^{i2\pi/\mathrm{N}}$$

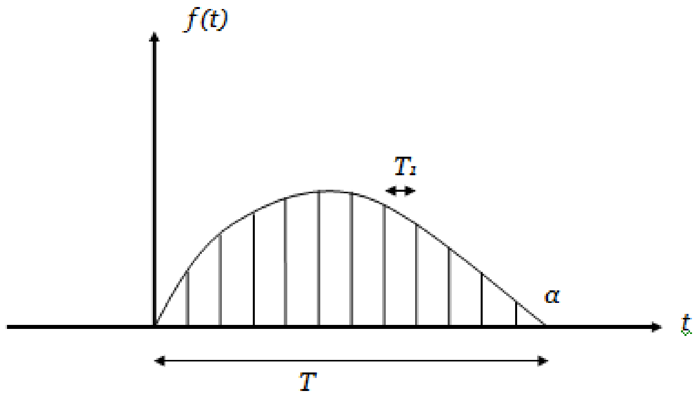


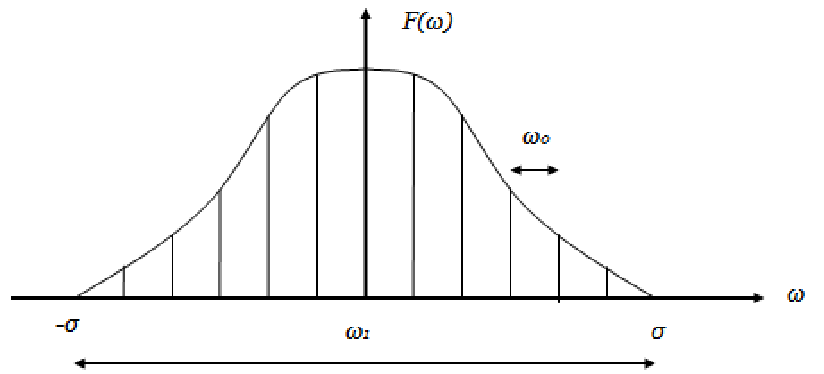




Εάν $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \sigma$ και $\omega_1 > 2\sigma$

$F(\omega) = \bar{F}(\omega)$ για $|\omega| < \sigma$





$T = \alpha, \; N$ $\qquad$ $\omega_o = 2\pi/T$

$T_1 = T/N$ $\qquad$ $\omega_1 = N\omega_o$

Αφού $\omega_1 = 2\sigma$ τα δείγματα της $F(\omega)$ αναπαράγονται αυτούσια από τα δείγματα της $\bar{F}(\omega)$.

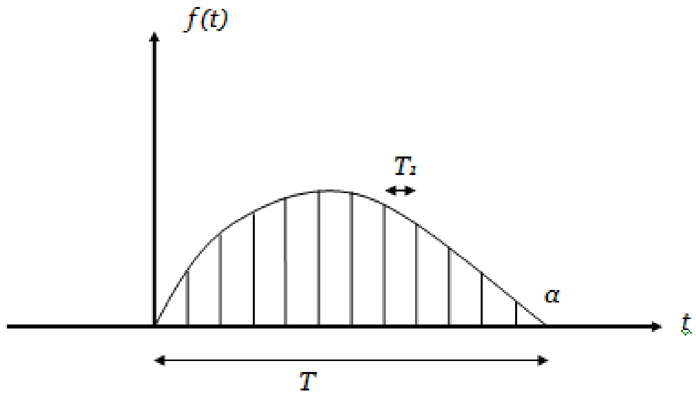
Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ επαναλαμβάνονται με περιόδους αντίστοιχα T και ω_1 ορίζοντας τις $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$

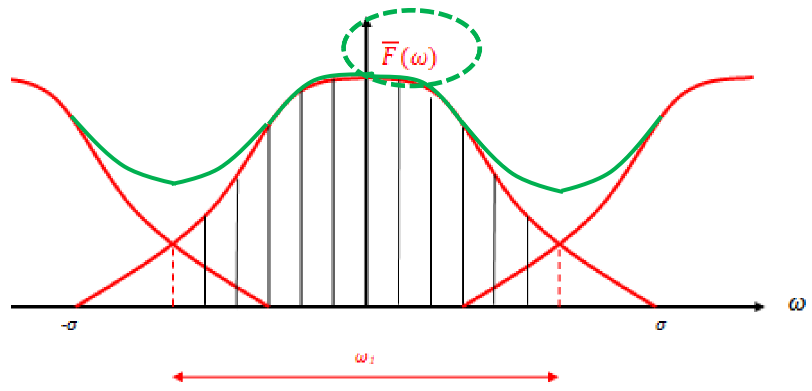
$$F(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \sigma \qquad \omega_1 > 2\sigma$$

$$F(\omega) = \bar{F}(\omega) \qquad |\omega| < \sigma$$

$$F(n\omega_0) \simeq \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για} |n| \le \dfrac{N}{2} \\ 0 & \text{για} |n| < \dfrac{N}{2} \end{cases}$$

$$F(n\omega_0) \simeq \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για} \quad 0 \le n \le \dfrac{N}{2} \\ \bar{F}(N\omega_0 + n\omega_0) & \text{για} \quad |n| < \dfrac{N}{2} \end{cases}$$





$T=\alpha,\ N$

$\omega_o = 2\pi/T$

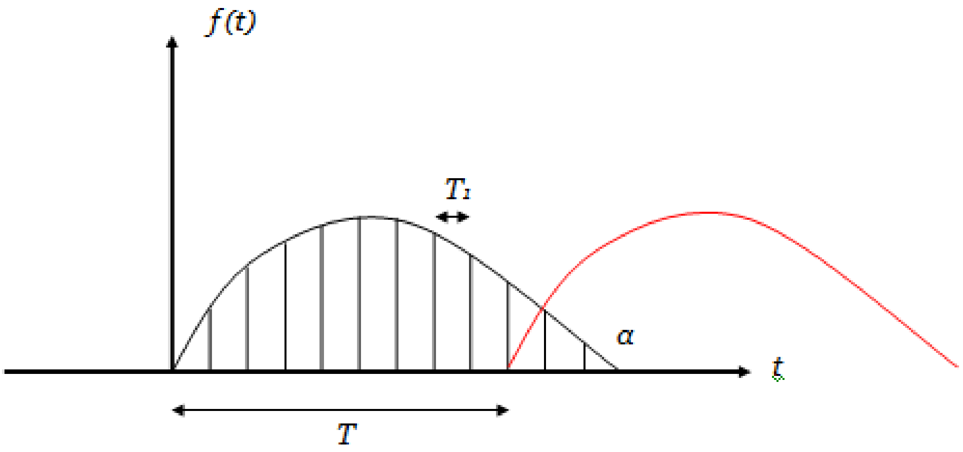
$T_1 = T/N$

$\omega_1 = N\omega_o$

Εάν για τις δεδομένες επιλογές $\omega_1 < 2\sigma$ τότε έχομε λάθος στον υπολογισμό των δειγμάτων της $F(\omega)$ από αυτά της $\bar{F}(\omega)$

Aliasing error $F(\omega) - \bar{F}(\omega)$

Για δεδομένο N η αύξηση του ω_1 συνεπάγεται μείωση του T
αφού $\omega_1 = N\omega_o$ και $\omega_o = 2\pi/T$



Τα $\bar{f}(nT_1)$ υπολογίζονται ακριβώς, αλλά όχι τα $f(nT_1)$
και συνεπώς παραμένει λάθος προσέγγισης

Επί πλέον έχομε κακή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων (μεγάλο ω_o)

Αύξηση του T με σταθερό το N σημαίνει μείωση του ω_o (θετικό για καλή ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων) αλλά ταυτόχρονα μείωση του ω_1 που σημαίνει επαναφορά του Aliasing error και μείωση της ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου αφού αυξάνει το T_1 ($T_1 = T/N$)

Το θεώρημα της δειγματοληψίας των Shannon- Nyquist ορίζει ότι όταν το εύρος συχνοτήτων ενός σήματος έχει μέγιστη συχνότητα f_σ (αντίστοιχη κυκλική συχνότητα σ), η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος όπως ορίζεται ο χρόνος T_1 θα πρέπει να είναι

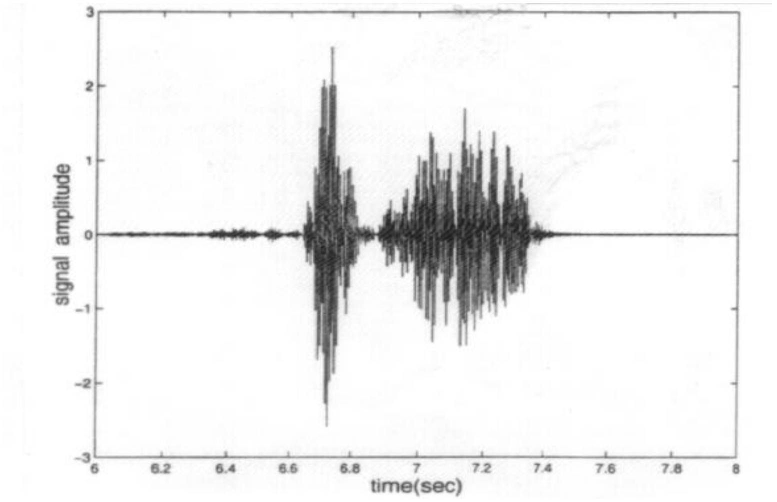
$$T_1 = \frac{1}{2 f_\sigma} = \frac{\pi}{\sigma}$$

για μια ορθή αναπαραγωγή του σήματος στο πεδίο του χρόνου.

Παράδειγμα :

Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;



Παράδειγμα :

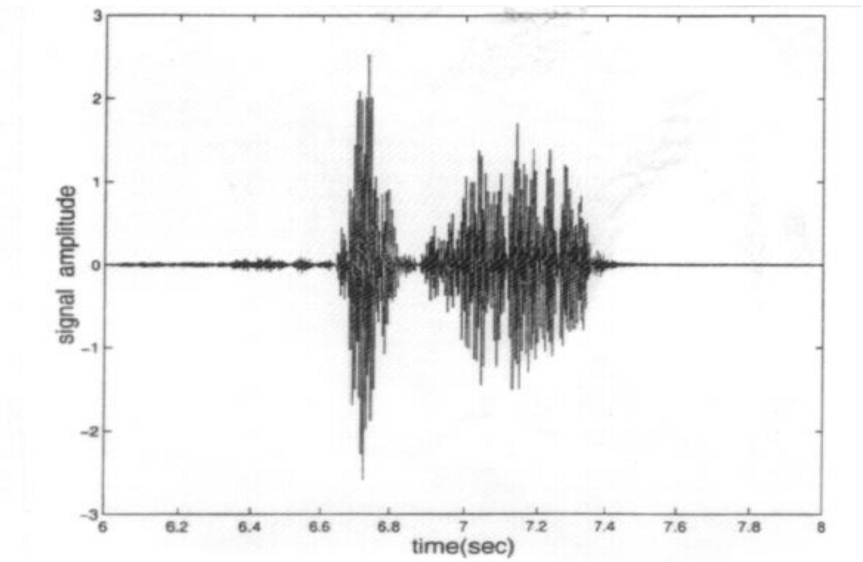
Σε εφαρμογή τομογραφίας εκπέμπεται σήμα που έχει ενεργό φάσμα ανάμεσα στα 50 και 200 Hz.

Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας προκειμένου το σήμα να αναπαραχθεί σωστά από το μετρούμενο φάσμα του ;

$$T_1 = \frac{1}{400} = 0.0025 \quad \text{sec}$$

Συχνοτικό εύρος $\quad f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$

Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος : $\quad T = \frac{N}{400}$



$$T_1 = \frac{1}{400} = 0.0025 \quad \text{sec}$$

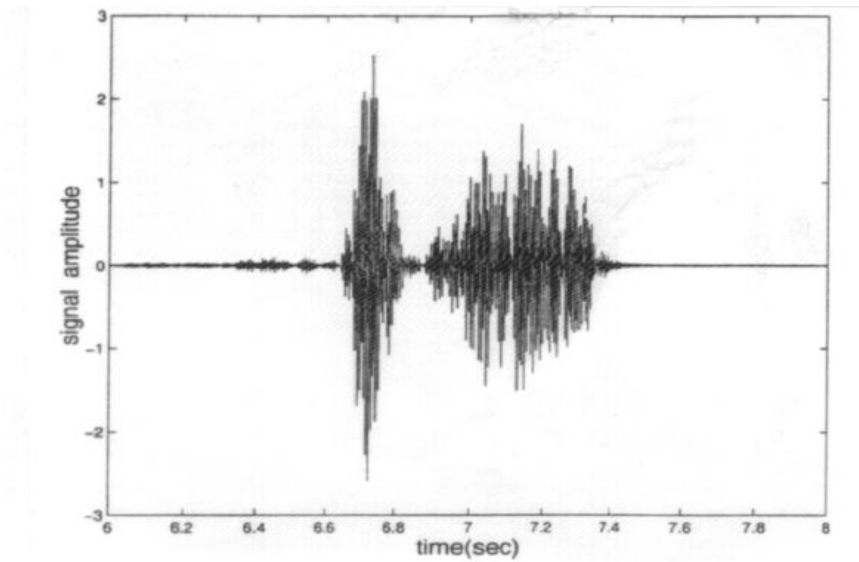
Συχνοτικό εύρος $$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$

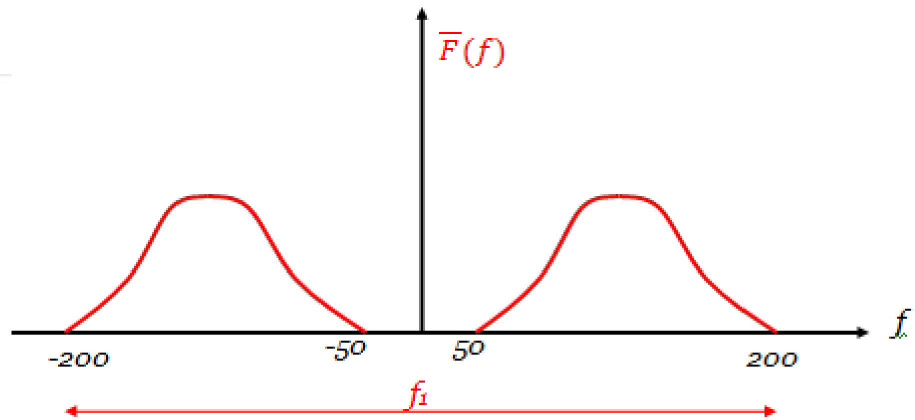
Περίοδος ισοδύναμου περιοδικού σήματος : $$T = \frac{N}{400}$$

Για N=800 παίρνομε T =2 sec

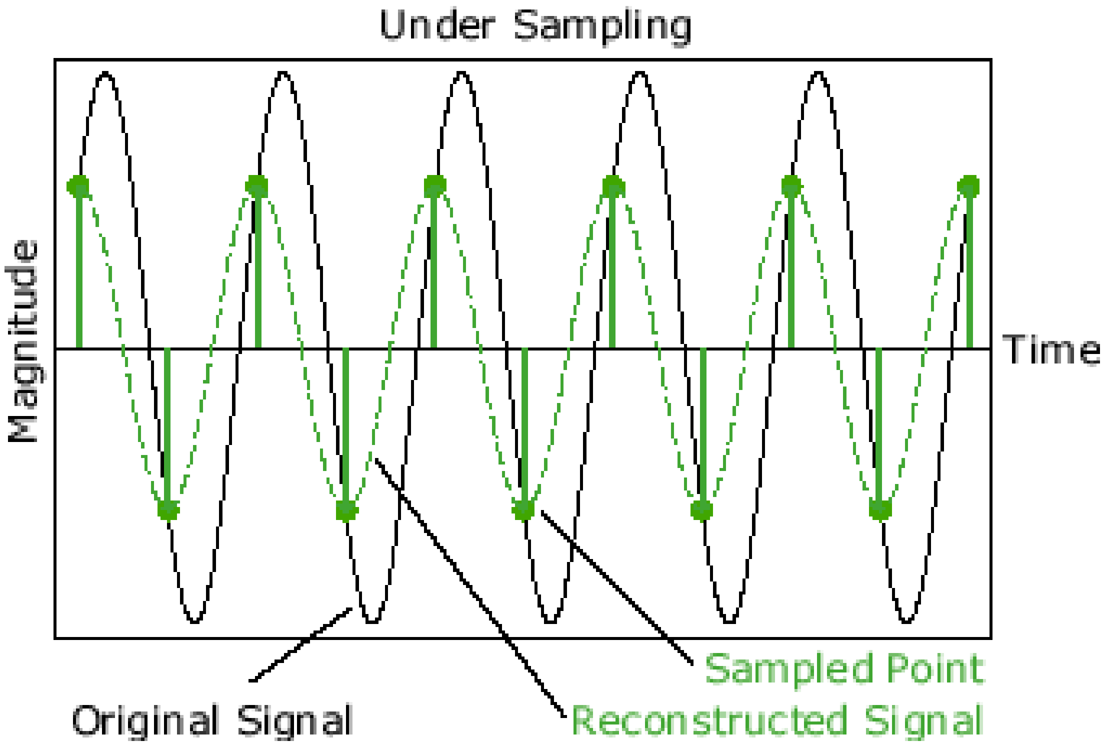
$$f_0 = \frac{f_1}{N} = 0,5 \text{ Hz}$$

T=2sec





$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 400 \text{ Hz}$$


Under Sampling
Magnitude
Time
Sampled Point
Reconstructed Signal
Original Signal