Ακουστικά Κύματα

Η Ακουστική εξίσωση

Γενικές Λύσεις

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Χωρισμός μεταβλητών

$$p_1(\vec{x},t) = \overline{p}(\vec{x})T(t)$$

$$\overline{p}(\vec{x}) \equiv p(\vec{x})$$

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$T\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\, p\frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{p}\nabla^2 p = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{p}\nabla^2 p = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2$$

Εξίσωση Helmholtz

$$\boxed{\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0}$$

$$T = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \qquad T = A^{'}\cos(\omega t) + B^{'}\sin(\omega t)$$

Θεωρούμε χρονική εξάρτηση $\quad T = e^{-i\omega t}$

$$p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})T(t)$$

$$p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

Αρμονικά κύματα

Χωρισμός μεταβλητών

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

$$p(x, y, z) = p_x(x) p_y(y) p_z(z)$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} = -k_x^2 \qquad \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} = -k_y^2 \qquad \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} = -k_z^2$$

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2}\cdot\frac{1}{p_x}+\frac{d^2 p_y}{dy^2}\cdot\frac{1}{p_y}+\frac{d^2 p_z}{dz^2}\cdot\frac{1}{p_z}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

Αριθμός κύματος $k=\frac{\omega}{c}$

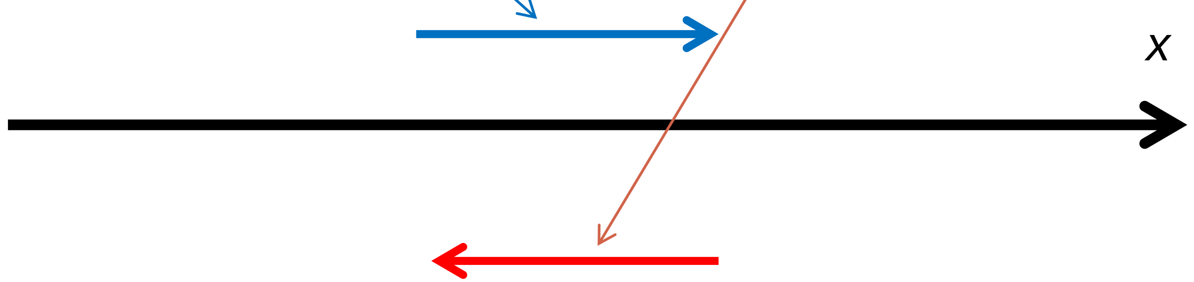
$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \qquad p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \qquad p_y(x) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \qquad p_z(x) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}$$

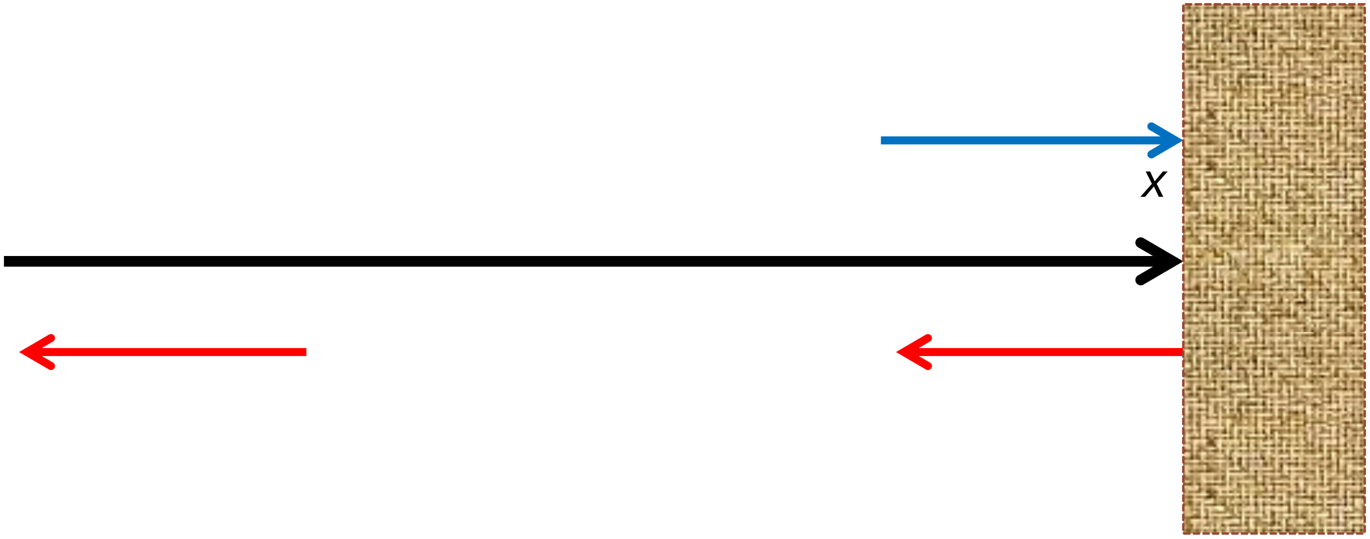
$$p_1(x,t) = p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

$$= A_1 e^{i(k_x x-\omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x-\omega t)}$$



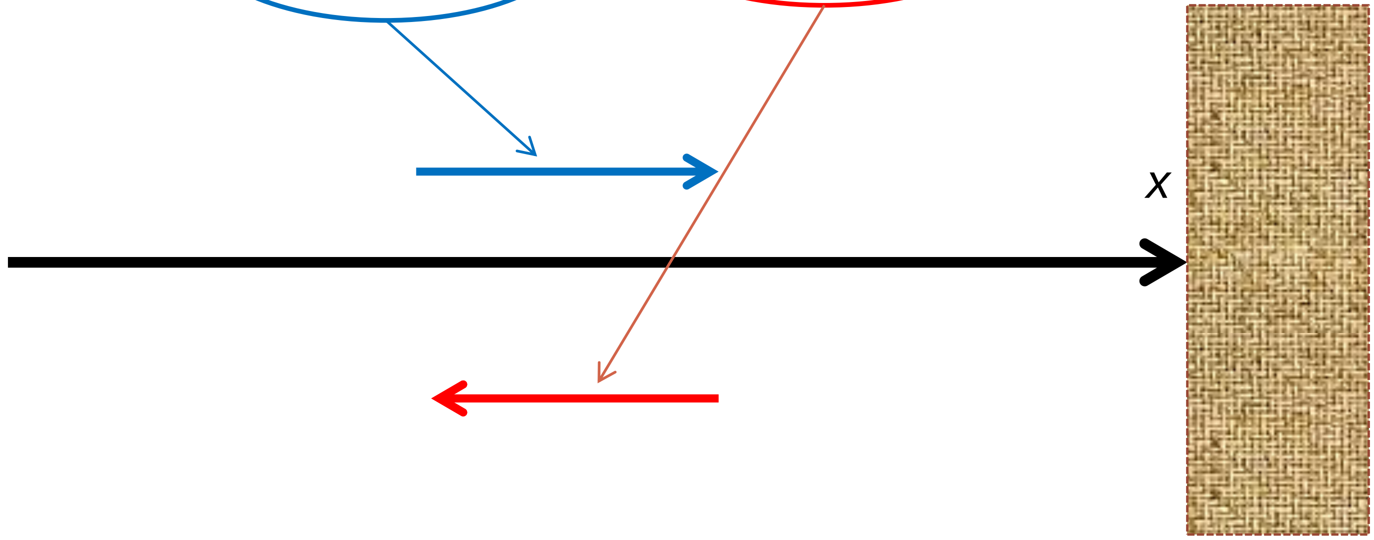
$$p_1(x,t) = p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

$$= A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)}$$



$$p_1(x,t) = p_x(x)e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x})e^{-i\omega t}$$

$$= A_1 e^{i(k_x x-\omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x-\omega t)}$$



Διάδοση σε τρεις διαστάσεις

$$p_1(\vec{x},t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$p(x,y,z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)$$

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}$$

$$p_y(x) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}$$

$$p_z(x) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}$$

$$p_1(x,y,z,t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$p_1(x,y,z,t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

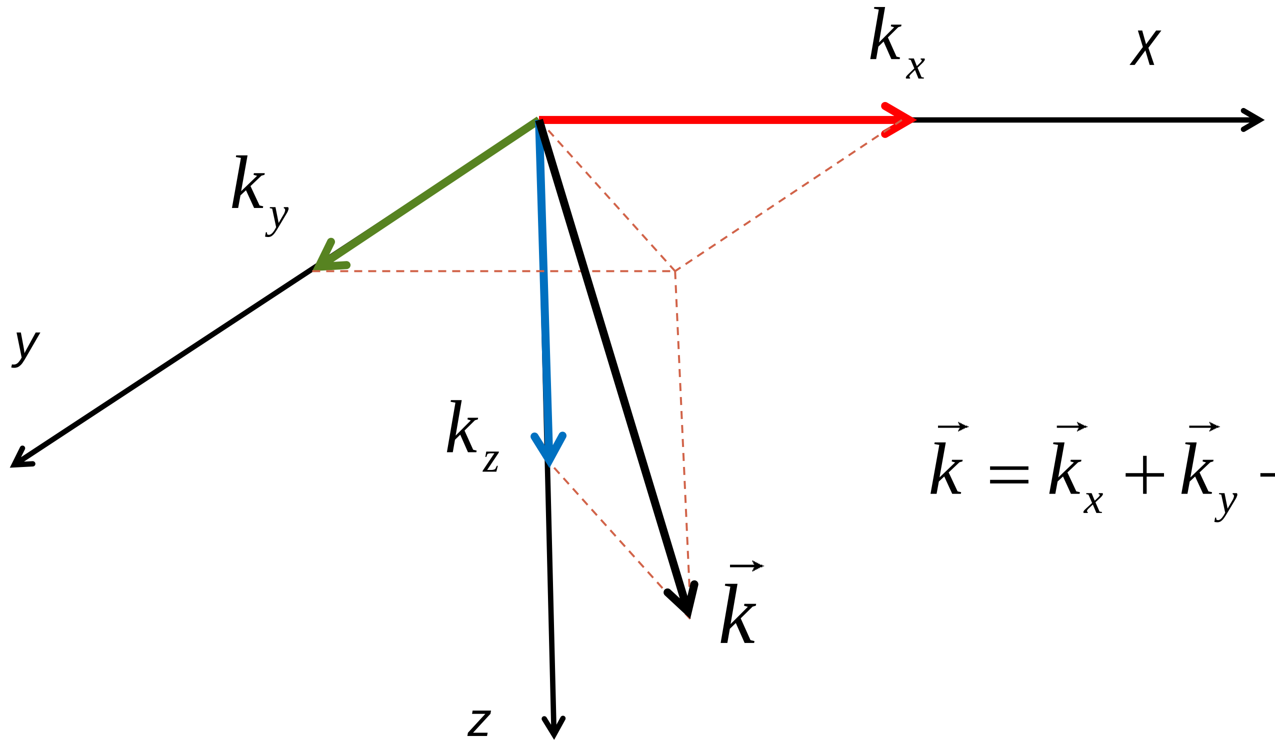
Όδευση προς την κατεύθυνση των θετικών των αντίστοιχων αξόνων

$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$$

$$\vec{x} = (x, y, \mathrm{z})$$

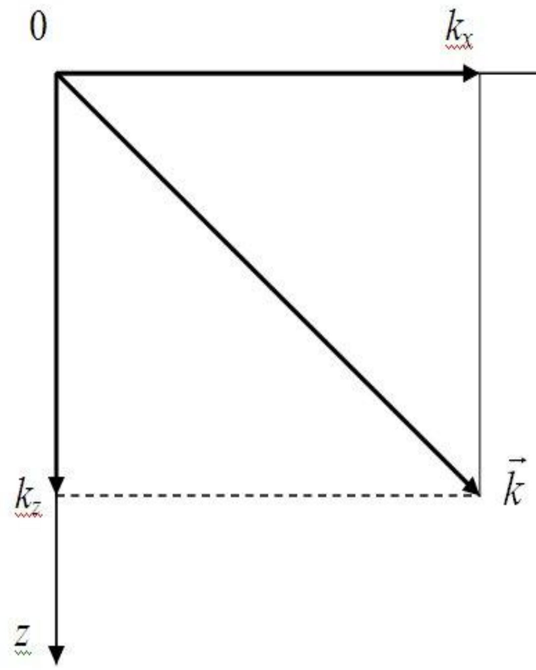
$$p_1(x,y,z,t) = D e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος



$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$$

Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος

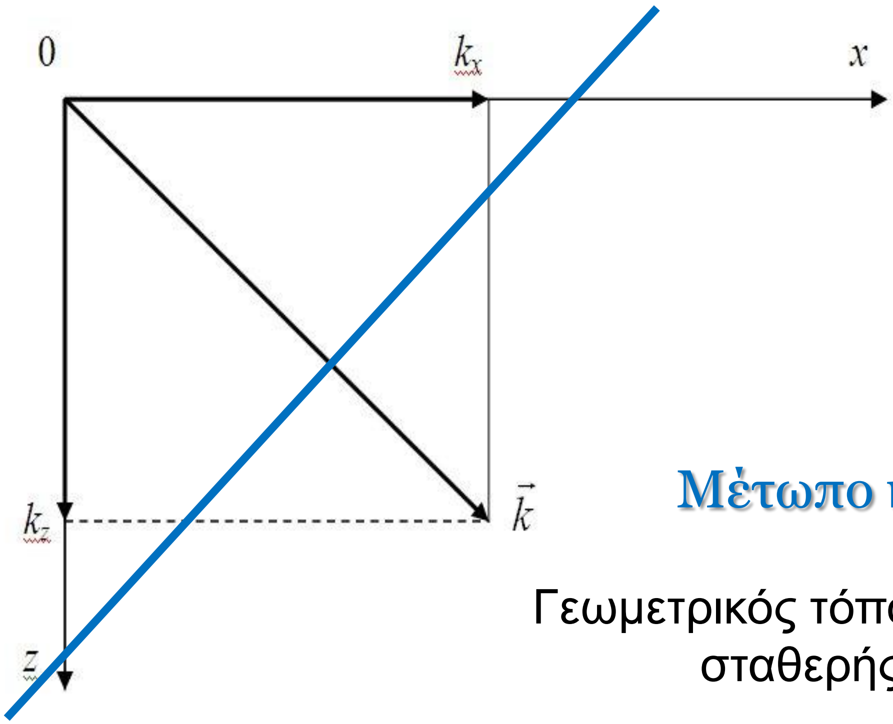


$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$k = \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}$$

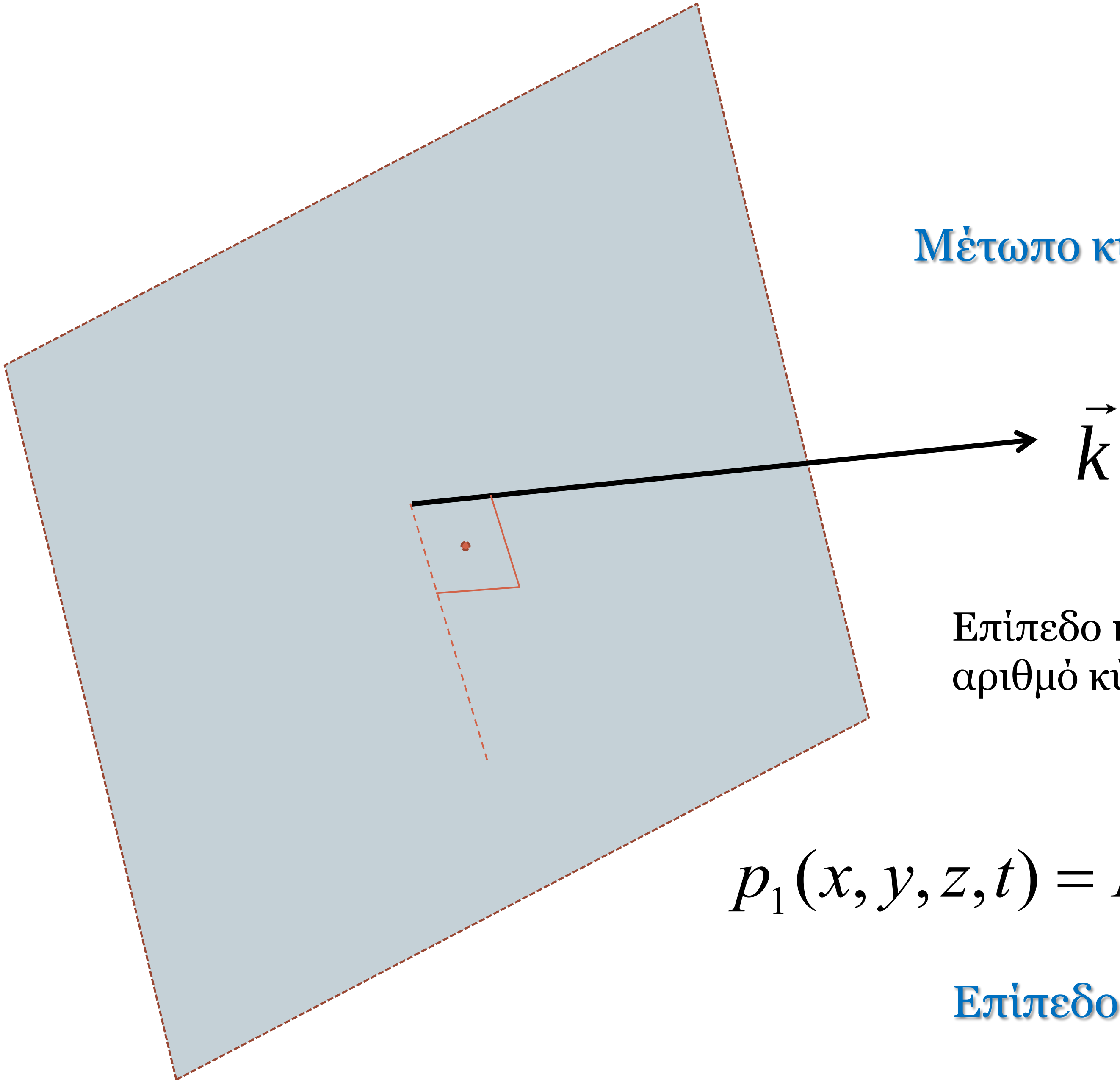
Αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος



Μέτωπο κύματος

Γεωμετρικός τόπος των σημείων σταθερής φάσης

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y = C$$



Μέτωπο κύματος

Επίπεδο κάθετο στον αριθμό κύματος

$$p_1(x,y,z,t) = De^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Επίπεδο Κύμα

Διάδοση σε μία διεύθυνση

$$p_1(x,t) = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

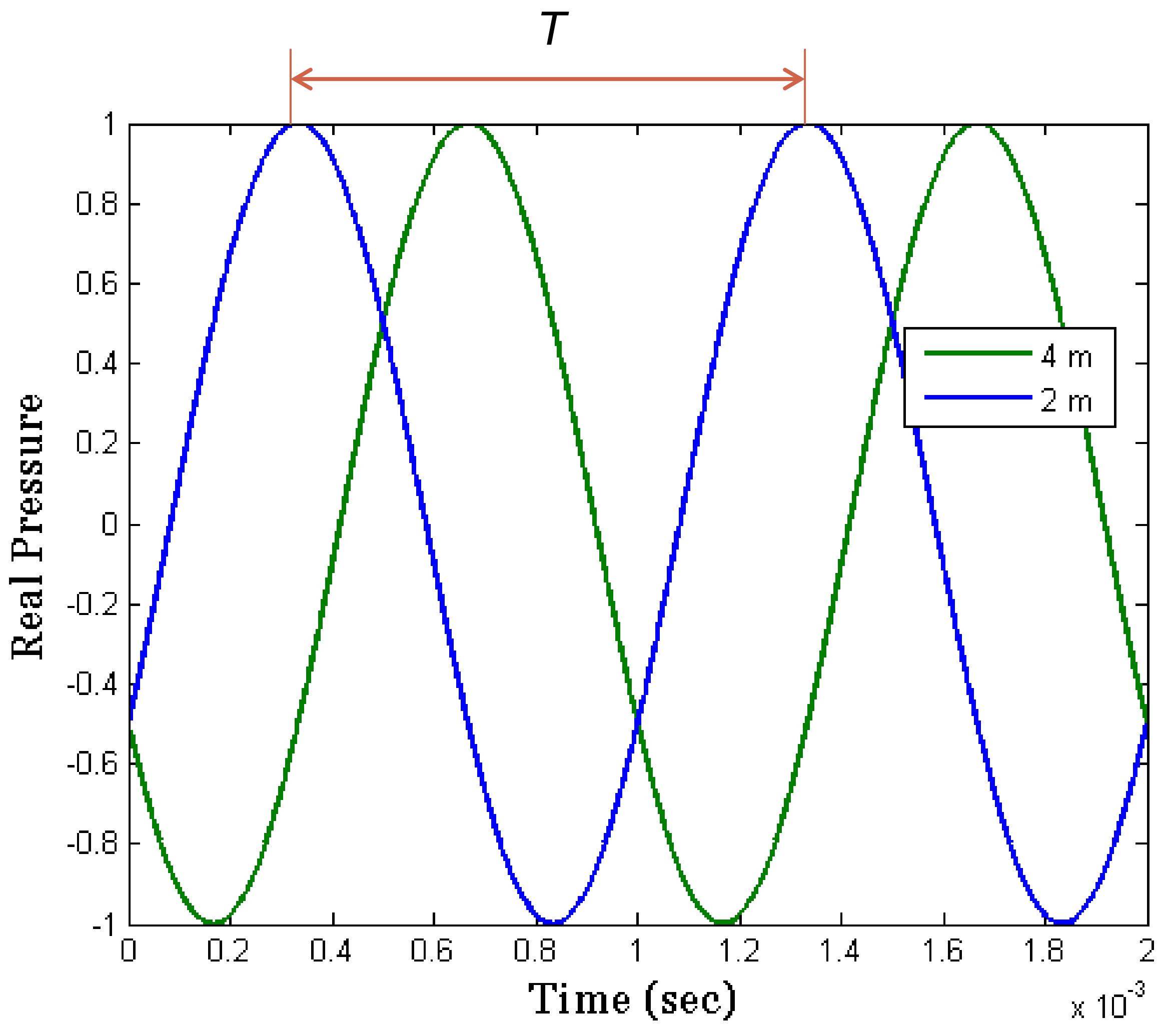
Πραγματική πίεση

$$\mathrm{Re}\left(p_1(x,t)\right) = \mathrm{Re}\left(A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} \right)$$

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(\mathrm{k}_x\, x - \omega t)$$

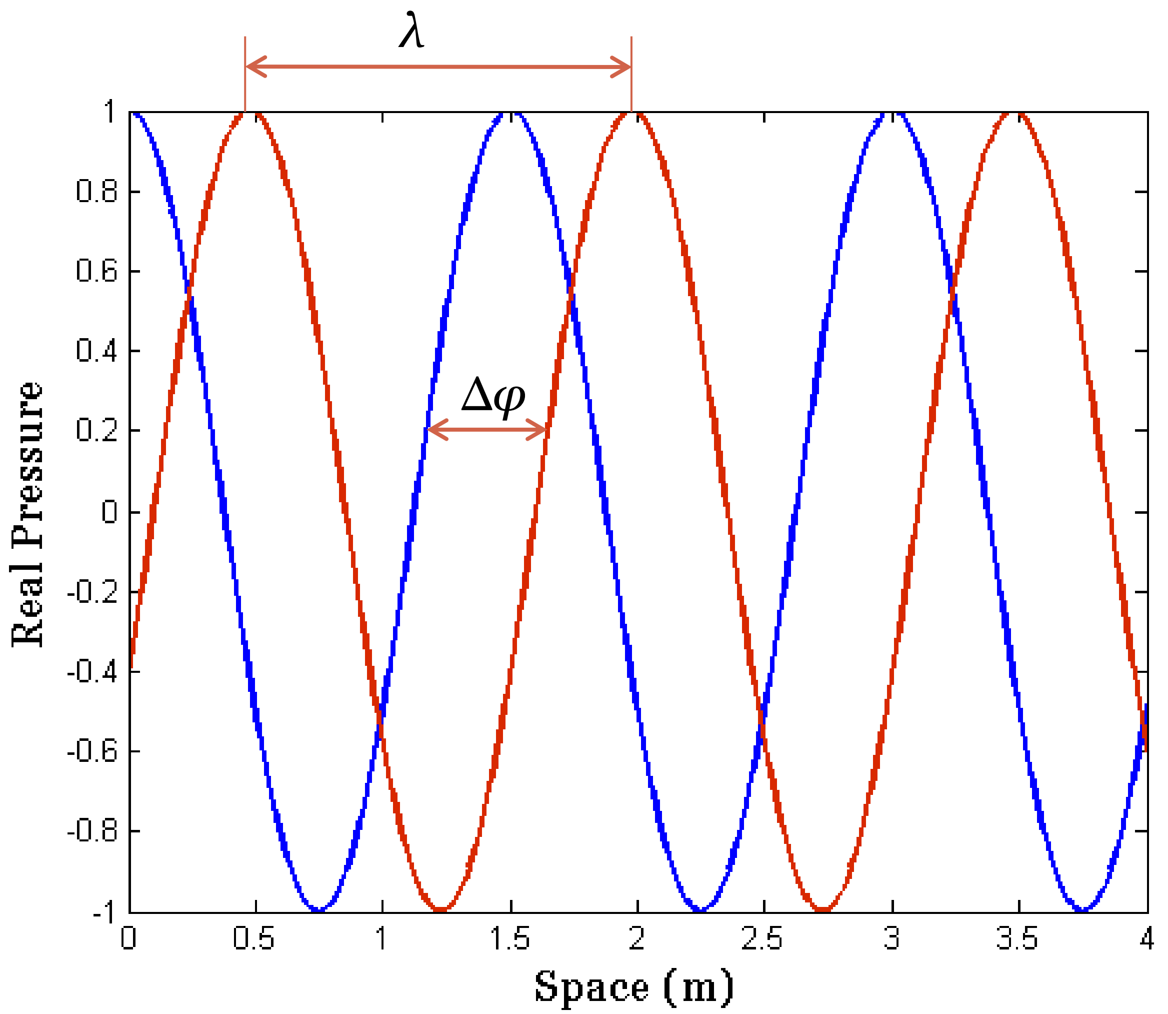
Με διαφορά φάσης $T(t) = \mathrm{e}^{-i(\omega t - \Delta\varphi)}$

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(\mathrm{k}_x\, x - \omega t + \Delta\varphi)$$



f=1000 Hz, *c*=1500 m/sec *T*=0,001 sec

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(\mathrm{k}_x\, x - \omega t)$$



f=1000 Hz, *c*=1500 m/sec, *t*=1 sec λ=1,5 m

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(\mathrm{k}_x\, x - \omega t + \Delta\varphi)$$