



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022–2023

Διάλεξη 11

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι
Ορθογώνιοι υπόχωροι

Μιχάλης Ταρουδάκης

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι

- ▶ Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος V είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζεται η έννοια του αθροίσματος και του πολλαπλασιασμού με αριθμό, που ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες :
- ▶ Για όλα τα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- ▶ Για όλα τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- ▶ Υπάρχει στοιχείο $\mathbf{0} \in V : \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in V$
- ▶ Για κάθε $\mathbf{u} \in V$, $\exists -\mathbf{u} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- ▶ Για όλα $c, d \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u} \in V$, $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι

- ▶ Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος V είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζεται η έννοια του αθροίσματος και του πολλαπλασιασμού με αριθμό, που ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες :
- ▶ Για όλα $c \in \mathbb{R}$, και $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
- ▶ Για όλα $c, d \in \mathbb{R}$, και $\mathbf{u} \in V$, $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
- ▶ Για όλα $\mathbf{u} \in V$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Υπόχωροι

- ▶ Έστω πραγματικός διανυσματικός χώρος V .
- ▶ Το σύνολο W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V , $W \subseteq V$ εάν
 1. Το $\mathbf{0} \in W$
 2. Εάν $\mathbf{v} \in W$, $c \in \mathbb{R}$, $\rightarrow c\mathbf{v} \in W$
 3. Εάν $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$

Πραγματικοί Διάνυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

- ▶ Ο Χώρος των πινάκων $m \times n$

Προσθέτουμε δύο πίνακες.

Πολλαπλασιάζουμε πίνακες με αριθμό.

Υπάρχει μηδενικός πίνακας κ.λ.π.

Θα μπορούσαμε να είχαμε διατάξει τα στοιχεία του πίνακα σε ένα διάνυσμα διάστασης $m \times n$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος αυτός είναι ίδιος με τον $\mathbb{R}^{m \times n}$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

- ▶ Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο των πινάκων $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$

Ελέγξτε ότι τα επόμενα σύνολα είναι υπόχωροι :

U οι άνω τριγωνικοί πίνακες

D οι διαγώνιοι πίνακες

L οι κάτω τριγωνικοί πίνακες

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

- ▶ Ο Χώρος των συναρτήσεων $f(x) : (a \leq x \leq b)$

π.χ. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin x$

Ορίζεται το άθροισμα, ο πολλαπλασιασμός με αριθμό που δίνουν πάλι συναρτήσεις του x στο ίδιο διάστημα.

$$(f + g)(x) = x^2 + \sin x$$

Τα διανύσματα είναι συναρτήσεις και η διάσταση του χώρου είναι άπειρη

Συμβολισμός : $I \equiv (a \leq x \leq b) \quad \mathfrak{F}(I) \quad \text{Χώρος συναρτήσεων}$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

$$I \equiv (a \leq x \leq b) \quad \mathfrak{I}(I)$$

- ▶ Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο I / $C^0(I)$ είναι υπόχωρος του $\mathfrak{I}(I)$

$$f' + g' = (f + g)', \quad cf' = (cf)'$$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

Θεωρούμε τα πολυώνυμα βαθμού k

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, k, a_k \neq 0$$

Ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{P}$

Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ k , $\mathcal{P}_k$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{P}$

Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι – Παραδείγματα

Θεωρούμε τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ k

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, k, a_k \neq 0$$

Τα πολυώνυμα $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2, \dots, f_k(t) = t^k$

αποτελούν μία βάση του $\mathcal{P}_k$

Η διάσταση του χώρου είναι $k+1$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

▶ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τον υπόχωρο $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x\}$

Πρόκειται για το μηδενόχωρο του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ζητάμε λύση της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

Έχουμε Δύο ελεύθερες μεταβλητές συνεπώς διάσταση του χώρου 2

Το διάνυσμα $v=(1,3,2)$ ανήκει στον $V(\dim V=2)$, στον $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3=3$)

αλλά και στον $W = \{(t, 3t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\dim W = 1$

Ορθογώνιοι υπόχωροι

- Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots x_n v_n$$

Όταν το γινόμενο είναι 0 τα διανύσματα χαρακτηρίζονται
ορθογώνια

Εάν V και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ αυτοί καλούνται
ορθογώνιοι εάν κάθε στοιχείο του V είναι ορθογώνιο σε
κάθε στοιχείο του W .

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W$$

Ορθογώνιοι υπόχωροι

Με δεδομένο ένα υπόχωρο $V \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε ως **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V το χώρο

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in V\}$$

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$V^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

Ορθογώνιοι υπόχωροι

- ▶ Εάν $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ τότε

$$N(A^T) = R(A)^\perp$$

$$N(A) = R(A^T)^\perp$$

$$N(A)^\perp = R(A^T)$$

$$N(A^T)^\perp = R(A)$$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

- ▶ Εάν $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ τότε

$$\dim R(A) = r$$

$$\dim N(A) = n - r$$

$$\dim R(A^T) = r$$

$$\dim N(A^T) = m - r$$