



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022-2023

Διάλεξη 15

Είδη και πίνακες γραμμικών απεικονίσεων

Μιχάλης Ταρουδάκης

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ απεικονίζεται μέσω ενός πίνακα $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$
σε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$

Η απεικόνιση L_A μας μεταφέρει από τον χώρο $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Αμφιμονοσήμαντη (έναν προς έναν – one to one)

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow f(\mathbf{v}_1) \neq f(\mathbf{v}_2)$$

$$f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$$

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Αμφιμονοσήμαντη (έναν προς έναν – one to one)

Πυρήνας απεικόνισης $\text{Ker } f = \{ \mathbf{v} \in V, f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \} \subseteq V$

Γραμμικές απεικονίσεις

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ Αν και μόνο αν η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη

Μονομορφισμός

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Επί (onto –surjective)

$$\forall \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

Εικόνα απεικόνισης $\text{Im } f = \{ \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \} \subseteq W$

Γραμμικές απεικονίσεις επί $\text{Im } f = W$

Επιμορφισμός

Είδη απεικονίσεων

$$f: V \rightarrow W$$

Ισομορφισμός (ένα προς ένα και επί)

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x + 1$$



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 1, y + 2)$$



$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}): f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$



Εικόνα γραμμικής απεικόνισης

$$f:V \rightarrow W$$

$$\text{Im } f = \{ \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \} \subseteq W$$

$$\text{Εάν } V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n) \rangle$$

Θεώρημα Διάστασης

$$\dim V = \dim (\text{Ker } f) + \dim (\text{Im } f)$$

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})^2 \quad f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$

$$\dim(V) = 3, \quad \dim(\text{Ker } f) = 0, \quad \dim(\text{Im } f) = 3$$

Χαρακτηρισμός Ισομορφισμού

$$f:V \rightarrow W$$

Γραμμική απεικόνιση

V και W έχουν ίδιες διαστάσεις n

Θεώρημα I

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Η απεικόνιση είναι μονομορφισμός
2. Η απεικόνιση είναι επιμορφισμός
3. Η απεικόνιση είναι ισομορφισμός
4. Η εικόνα μιας βάσης του V είναι μία βάση του W

Χαρακτηρισμός Ισομορφισμού

Θεώρημα II

Δύο διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση εάν και μόνο εάν είναι ισομορφικοί

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και

$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Εάν A είναι ο πίνακας $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ με στήλες τα διανύσματα

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } f = L_A$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση : Πυρήνας και εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $f = L_A$

1. Ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης αποτελείται από τις λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. Η εικόνα της απεικόνισης είναι ο χώρος των στηλών του A που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$
3. $\text{rank}(A) = \dim L_A$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση : $f = L_A$ $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

Η απεικόνιση είναι

1. Μονομορφισμός εάν και μόνο εάν $r = n : N(A) = \{0\}$
2. Επιμορφισμός εάν και μόνο εάν $r = m : R(A) = \mathbb{R}^m$
3. Ισομορφισμός εάν και μόνο εάν $r = m = n$