

Διευκρινήσεις σχετικά με την αναμενόμενη λύση των θεμάτων του τελικού
διαγωνίσματος στο μάθημα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Τα Θέματα των εξετάσεων ανήκαν σε δύο βασικές ενότητες :

- Δυναμικά συστήματα
- Εξισώσεις Euler-Lagrange

Η πρώτη ενότητα περιελάμβανε δύο ασκήσεις : Μία κλασσική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με χαρακτηρισμό του σημείου ισορροπίας και μία Βιολογική εφαρμογή (μελέτη αλληλεπιδρώντων πληθυσμών), με αναφορά σε μη γραμμικό σύστημα.

Πρώτη Άσκηση.

Η πλήρης επίλυση της άσκησης ήταν προϋπόθεση για την πλήρη βαθμολογία της. Η άσκηση δόθηκε για να υπάρξει σωστό αποτέλεσμα με ορθό υπολογισμό ιδιοτιμών, ιδιοδιανυσμάτων και συντελεστών της λύσης του συστήματος. Δεδομένου ότι το μάθημα είναι «Μαθηματική Μοντελοποίηση» η συγκεκριμένη άσκηση απαιτούσε πλήρες αποτέλεσμα για να βαθμολογηθεί με το σύνολο των μονάδων. Λάθη στον υπολογισμό ιδιοτιμών ή ιδιοδιανυσμάτων ακόμη και αν αφορούσαν απλές πράξεις δεν συγχωρούνταν. Δεν ήταν το ζητούμενο να αναπτυχθεί σωστά η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος αλλά να ολοκληρωθεί σωστά η επίλυση.

Δεύτερη Άσκηση.

Η δεύτερη άσκηση είχε δύο εκδοχές : Συνεχές Κλασσικό Μοντέλο L-V και Συνεχές Λογιστικό Μοντέλο L-V. Όσοι χρησιμοποίησαν για τη λύση της άσκησης λάθος μοντέλο δεν βαθμολογήθηκαν.

Η άσκηση και στις δύο εκδοχές ζητούσε τον υπολογισμό των σημείων ισορροπίας για τους πληθυσμούς θηράματος και θηρευτή, κάτι που προέκυπτε πολύ εύκολα από τη μελέτη του συστήματος, και στη συνέχεια διατύπωση του γραμμικοποιημένου συστήματος κάτι που προέκυπτε επίσης πολύ εύκολα με βάση τη γνωστή μας θεωρία που αναπτύξαμε στα δυναμικά συστήματα και στα οποία υπολογίζεται ο Ιακωβιανός πίνακας στο ζητούμενο σημείο ισορροπίας. Τα δύο γραμμικοποιημένα συστήματα έδιναν διαφορετική μορφή λύσεων του γραμμικού προβλήματος και ζητείτο σχετικός σχολιασμός. Η λύση του γραμμικοποιημένου συστήματος ακολουθεί τις γνωστές διαδικασίες. Τέλος ζητείτο η χρήση του αντίστοιχου διακριτού μοντέλου για τον υπολογισμό πληθυσμών σε διάφορες χρονικές στιγμές, που όμως δεν απαντήθηκε από κανένα, προφανώς λόγω

ελλείψεως χρόνου. Η πιθανή έλλειψη χρόνου ελήφθη πάντως υπ' όψιν στη βαθμολόγηση.

Στην άσκηση αυτή πολλοί φοιτητές αναπαρήγαγαν τη διαδικασία μελέτης της ευστάθειας του μη γραμμικού συστήματος όπως εμφανίζεται στο βιβλίο του μαθήματος για το κλασσικό πρόβλημα L-V με αδιαστατικοποίηση του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή μπορεί να χαρακτηρίσει το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού μοντέλου, **αλλά το ζητούμενο δεν ήταν αυτό**. Επίσης πολλοί φοιτητές που ακολούθησαν αυτή τη διαδικασία δεν έκαναν καν τον κόπο να αναφέρουν το δεύτερο σημείο ισορροπίας στους πραγματικούς πληθυσμούς αλλά το άφησαν (1,1) όπως στο αδιάστατο μοντέλο. Έχουμε πει πολλές φορές ότι η χρήση του αδιαστοποιημένου μοντέλου μπορεί να βοηθάει σε ορισμένες περιπτώσεις αλλά τα αποτελέσματα πρέπει να δίδονται για τις πραγματικές και όχι για τις αδιάστατες μεταβλητές. Πολλοί βαθμοί χάθηκαν από την εσφαλμένη αντιμετώπιση του προβλήματος.

Τρίτη Άσκηση

Και εδώ είχαμε δύο διαφορετικές εκδοχές με διαφορετικό συμβολισμό της μεταβλητής που ορίζει τη θέση του σωματιδίου (x, y, z).

Εδώ οι φοιτητές είχαν δύο επιλογές. Είτε θα προσπαθούσαν να διατυπώσουν μια Λαγκραζιανή που με εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange θα έδινε τη ζητούμενη εξίσωση κίνησης, είτε θα αναπαρήγαγαν μια Λαγκραζιανή από γνωστό πρόβλημα και με εφαρμογή των αντίστοιχων εξισώσεων E-L με την πιθανή προσθήκη πρόσθετης δύναμης (π.χ. τριβής) θα έδινε τη δεδομένη εξίσωση κίνησης. Η ύπαρξη του όρου με την πρώτη χρονική παράγωγο της μεταβλητής οδηγούσε σε αυτή την επιλογή μια και έτσι μπορούσε να απαντηθεί εύκολα και η τρίτη ερώτηση που αφορούσε ένα παράδειγμα κίνησης που διέπεται από την Λαγκραζιανή που θα επιλεγεί (κίνηση με απόσβεση).

Δυστυχώς παρατηρήθηκαν πολλές ανεπιτυχείς προσπάθειες ορισμού μιας Λαγκραζιανής χωρίς επαλήθευση της εξίσωσης κίνησης με εφαρμογή των εξισώσεων E-L. Φυσικά δεν ήταν αποδεκτή λύση που έδινε ένα από τα a, b να είναι 0.

Είμαι σίγουρος ότι οι φοιτητές που απέτυχαν αυτή την περίοδο ή θα ήθελαν να βελτιώσουν το βαθμό τους θα πάνε πολύ καλύτερα στις εξετάσεις του Σεπτεμβρίου, αν λάβουν σοβαρά υπ' όψιν τις παρατηρήσεις που παρέθεσα. Ιδιαίτερα αυτοί που έχασαν την πρώτη άσκηση από λάθη στις πράξεις πρέπει να είναι πιο προσεκτικοί. Δεν μπορούν να δικαιολογηθούν γι αυτού του είδους τα προβλήματα λάθος υπολογισμοί αφού στη μαθηματική μοντελοποίηση μας ενδιαφέρει το τελικό αποτέλεσμα.

Καλό Καλοκαίρι