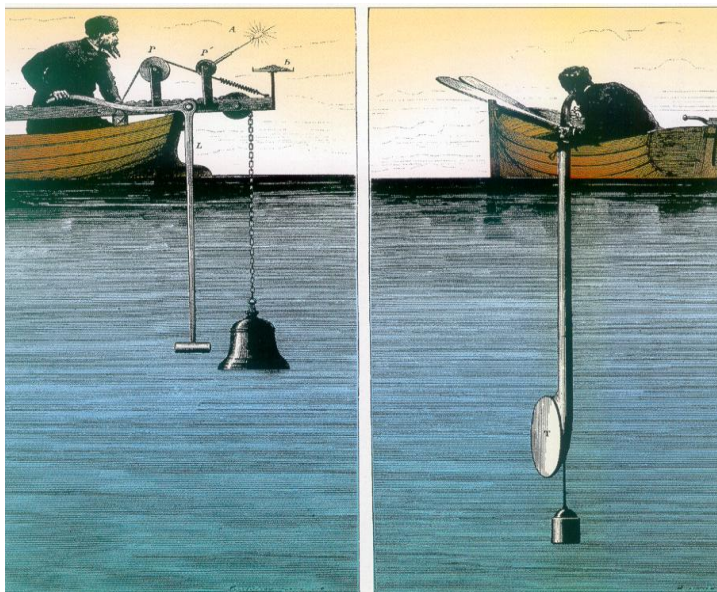




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ
ΩΚΕΑΝΟΓΡΑΦΙΑ**



**Μιχάλης Ταρουδάκης
Καθηγητής**

Ηράκλειο 2020

3^η έκδοση

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Περιγραφή του θαλάσσιου περιβάλλοντος.....	7
1.1 Στρωματοποίηση του θαλασσινού νερού.....	7
1.1.1 Η θερμοκρασία του θαλασσινού νερού.....	7
1.1.2 Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού.....	10
1.1.3 Η αλατότητα του θαλασσινού νερού.....	11
1.1.4 Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου.....	13
1.2 Η επιφάνεια της θάλασσας.....	16
1.2.1 Βαθεία θάλασσα.....	19
1.2.2 Ρηχή θάλασσα.....	21
1.2.3 Σχολιασμός.....	22
1.3 Ο πυθμένας της θάλασσας.....	22
1.4 Στοιχεία από την ζωή στη θάλασσα.....	23
2. Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον	25
2.1 Η φύση των ακουστικών διαταραχών.....	25
2.2 Ακουστικά κύματα.....	25
2.3 Διάδοση του ήχου – Ακουστική εξίσωση.....	26
2.3.1 Η εξίσωση συνέχειας.....	27
2.3.2 Η εξίσωση του Euler.....	28
2.3.3 Η καταστατική εξίσωση	29
2.3.4 Η γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση.....	29
2.4 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης.....	33
2.4.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου	33
2.4.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης	34
2.5 Διάδοση σε ελαστικούς χώρους ακουστικών και διατμητικών κυμάτων.....	38
2.5.1 Δυναμικό μετατόπισης.....	38
2.5.2 Διατμητικά κύματα.....	39
2.6 Διάθλαση ακουστικών κυμάτων και Νόμος του Snell.....	44
2.7 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο στρώματα διαφορετικής σύνθεσης. Το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις.....	46
2.7.1 Εισαγωγή	46
2.7.2 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον.....	48
2.7.3 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα.....	53
2.7.4 Ανάκλαση επίπεδου ηχητικού κύματος από πολυστρωματοποιημένο ρευστό μέσο.....	56
3. Διάδοση της ηχητικής ενέργειας σε μεγάλες αποστάσεις. Γεωμετρική ακουστική.....	61
3.1 Ηχητικές ακτίνες	61
3.2 Ακουστική πίεση και γεωμετρική ακουστική.....	67
3.2.1 Εκπομπή ηχητικής ενέργειας.....	68
3.2.2 Μονάδες μέτρησης της πίεσης και του ηχητικού πεδίου	70
3.2.3 Απώλεια διάδοσης κατά μήκος μιας ηχητικής ακτίνας	71
3.2.4 Ανακλάσεις στον πυθμένα	76
3.3 Φυσική εξασθένηση της ηχητικής ενέργειας στο νερό και τα ιζήματα του πυθμένα	76
3.4 Η εξίσωση SONAR.....	80
3.4.1 Βασικά μεγέθη.....	80
3.4.2 Εξίσωση παθητικού SONAR	84

3.4.3 Εξίσωση ενεργητικού SONAR.....	85
4. Εισαγωγή στην επεξεργασία ακουστικών σημάτων	87
4.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.	87
4.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier.	88
4.1.2 Συνέλιξη.....	91
4.1.3 Ο παλμός δ.....	92
4.1.4 Περιοδικά σήματα – Σειρές Fourier	93
4.1.5 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier	97
4.2 Φίλτρα και θόρυβος.....	103
4.2.1 Συστήματα.....	103
4.2.2 Φίλτρα	104
4.2.3 Θόρυβος.....	106
4.2.4 Ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος.....	109
4.3 Συσχέτιση ακουστικών σημάτων	111
4.3.1 Διακριτά σήματα	111
4.3.2 Ολοκληρωτικές εκφράσεις	113
4.3.3 Σήματα και θόρυβος	114
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Σύνθεση αρμονικών πηγών.....	116
A.1 Σύνθεση δύο πηγών	117
A.2 Σύνθεση τριών πηγών.	121
A.3 Πολλαπλές πηγές.....	123
A.4 Πηγές καταναμημένες συνεχώς.....	125
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Στοιχεία από την μηχανική των σωμάτων. Μέτρα ελαστικότητας.....	128
B.1 Μέτρο διόγκωσης (Bulk Modulus)	128
B.2 Μέτρο ελαστικότητας (Shear Modulus).....	129
B.3 Σταθερές Lamé	129
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Στοιχεία από την σύσταση του πυθμένα των θαλασσών.	131
Γ.1 Σύσταση θαλασσινών ιζημάτων και χαρακτηριστικές παράμετροι.	131
Γ.2 Στρωματοποίηση θαλασσινών ιζημάτων.	133
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. Πρόσθετες παρατηρήσεις στη λύση της ακουστικής εξίσωσης.....	135
Δ.1 Η λύση της ακουστικής εξίσωσης με τριγωνομετρικές συναντήσεις	135
Δ.2 Απεικόνιση της λύσης της ακουστικής εξίσωσης.....	135
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε. Η ακουστική εξίσωση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων	138
Βιβλιογραφία.....	140

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί μία γοητευτική περιοχή επιστημονικών αναζητήσεων, που συνδυάζουν πολλούς βασικούς τομείς της έρευνας, όπως η φυσική τα μαθηματικά, η βιολογία η γεωλογία με τους επί μέρους κλάδους τους. Το νερό των ωκεανών και οι μεταβολές του είχε αποτελέσει πάντα αντικείμενο μελέτης ανάμεσα στους επιστήμονες μια και ουσιαστικά κυριαρχεί στη ζωή μας από τις πλέον εμφανείς εφαρμογές (ναυσιπλοΐα) μέχρι και τις πλέον αφανείς όπως η επίδραση του στις καιρικές μεταβολές. Επί πλέον η οικονομία η εθνική άμυνα και η οικολογία μιας θαλασσινής περιοχής εξαρτάται έμμεσα ή άμεσα με το νερό και τις ιδιότητές του.

Η θάλασσα είναι γενικά εχθρική σε κάθε μέσον που ο άνθρωπος επιβάλλει για την παρακολούθησή της : Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα εξασθενούν πολύ γρήγορα, τα υπόλοιπα όργανα διαβρώνονται ή αστοχούν λόγω των έντονων μεταβολών στο περιβάλλον, η τηλεπισκόπηση με δορυφόρους μόνο για επιφανειακά θαλάσσια στρώματα μπορεί να δώσει πληροφορίες ενώ ο ίδιος ο άνθρωπος δεν μπορεί να διεισδύσει σε μεγάλα βάθη. Έτσι τα ηχητικά κύματα που μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις στο θαλάσσιο περιβάλλον λόγω μικρής εξασθένησης φαίνεται ότι είναι ένας φορέας πληροφορίας που μπορεί να αξιοποιηθεί για την μελέτη των ιδιοτήτων και των μεταβολών στη θάλασσα. Έτσι αναπτύχθηκε τα τελευταία χρόνια ο τομέας της υποβρύχιας ακουστικής που έχει ως αντικείμενο την μελέτη των εφαρμογών διάδοσης του ήχου στη θάλασσα και συνδυάζει το θεωρητικό (μαθηματικό-φυσικό-βιολογικό) υπόβαθρο με το τεχνολογικό, μια και στόχος του είναι να αναπτύσσει μεθοδολογία και υποστηρικτική τεχνολογία για την αποδοτική χρήση του ήχου στη θάλασσα.

Σήμερα ο ήχος στη θάλασσα χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές που επιγραμματικά δίδονται στον επόμενο κατάλογο που κάθε άλλο παρά πλήρης μπορεί να θεωρηθεί :

- Επικοινωνίες
- Μετάδοση δεδομένων
- Αναγνώριση και εντοπισμό υποθαλάσσιων στόχων
- Αναγνώριση και εντοπισμό αντικειμένων στον βυθό (υποβρύχια αρχαιολογία)
- Αναγνώριση της σύστασης του θαλασσινού βυθού
- Παρακολούθηση των ωκεανογραφικών μεταβολών (ακουστική τομογραφία)
- Θαλάσσια βιολογία
- Αλιεία
- Ναυσιπλοΐα

Η Ακουστική Ωκεανογραφία ασχολείται με τις εφαρμογές και τα προβλήματα διάδοσης του ήχου που σχετίζονται με τις φυσικές παραμέτρους του θαλάσσιου ακουστικού μέσου στο οποίο περιλαμβάνεται η υδάτινη στήλη και ο πυθμένας.

Οι σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία» που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνουν την ύλη που διδάσκεται στο ομώνυμο μάθημα του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου

Κρήτης. Η επιλογή της ύλης έγινε με τρόπο ώστε να δίδεται μία συνοπτική εισαγωγή στην περιοχή της υποβρύχιας ακουστικής σε σχέση κυρίως με τον τρόπο διάδοσης της ακουστικής ενέργειας στη θάλασσα και τις βασικές περιβαλλοντικές παραμέτρους που καθορίζουν τον τρόπο διάδοσης της (ταχύτητα διάδοσης ήχου – θερμοκρασία, ταχύτητες διάδοσης κυμάτων συμπίεστικότητας και διατμητικών στον πυθμένα της θάλασσας). Έτσι έγινε μία επιλογή εφαρμογών που συνδυάζει την φυσική με απλά μαθηματικά μοντέλα ώστε να γίνει κατανοητό ότι η ακουστική μελέτη του θαλάσσιου περιβάλλοντος είναι εφικτή με κατάλληλη μαθηματική προσομοίωση. Η ανάπτυξη της ύλης έγινε με βάση την γεωμετρική θεώρηση της διάδοσης των ηχητικών κυμάτων στη θάλασσα (ray theory). Για την ανάπτυξη της ύλης χρησιμοποιήθηκε η βιβλιογραφία που αναγράφεται στο τέλος των σημειώσεων, ενώ πολλές από τις εικόνες του μαθήματος έχουν προέλθει από την αναφερόμενη βιβλιογραφία και το διαδίκτυο.

Κάθε παρατήρηση και σχόλιο ως προς την διάρθρωση και τα περιεχόμενα των σημειώσεων είναι ευπρόσδεκτη όπως και κάθε πιθανή διόρθωση στο κείμενο. Να σημειωθεί τέλος ότι η ορολογία που χρησιμοποιήθηκε είναι η πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη στην περιοχή της ακουστικής αν και πολλοί αγγλικοί όροι εμφανίζονται στην ελληνική (περιορισμένη έτσι κι αλλιώς) βιβλιογραφία με διαφορετικούς τρόπους.

Η παρούσα τρίτη έκδοση των σημειώσεων περιλαμβάνει σε σχέση με τις προηγούμενες, σημαντικές διορθώσεις και προσθήκες. Όπως όμως αναφέρθηκε και στον πρόλογο των προηγούμενων εκδόσεων οι παρούσες σημειώσεις δεν φιλοδοξούν να καταστούν πλήρες εγχειρίδιο για την παρακολούθηση ενός τυπικού μαθήματος Ακουστικής Ωκεανογραφίας και περιορίζονται σε μία εισαγωγή όπως είναι και ο τίτλος του διδασκόμενου μαθήματος. Θα καταβληθεί ωστόσο προσπάθεια να εμπλουτισθούν οι σημειώσεις σε επόμενη έκδοση και με σειρά χαρακτηριστικών ασκήσεων ώστε να αποτελέσουν πλήρες εγχειρίδιο του μαθήματος.

Οκτώβριος 2020

Μιχάλης Ταρουδάκης
Καθηγητής

1. Περιγραφή του θαλάσσιου περιβάλλοντος

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στην περιγραφή των στοιχείων που συνθέτουν το θαλάσσιο περιβάλλον από την άποψη της ακουστικής ωκεανογραφίας. Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελείται από τη στήλη του θαλασσινού νερού και τον πυθμένα, ενώ σημαντικό στοιχείο είναι η διεπιφάνεια νερού-αέρα, που στη συνέχεια θα την καλούμε «επιφάνεια» και θα την θεωρήσουμε ως το άνω σύνορο στο πεδίο ενδιαφέροντός μας. Οι βασικές παράμετροι ενδιαφέροντος για την φυσική ωκεανογραφία είναι η θερμοκρασία της θάλασσας, η πυκνότητα, η αλατότητα, η ταχύτητα των ρευμάτων και η ηλεκτρική αγωγιμότητα ενώ για την ακουστική ωκεανογραφία προστίθενται ως βασικές παράμετροι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό και τον πυθμένα, η ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα, η πυκνότητα των μέσων, η γεωμετρία των διαχωριστικών επιφανειών και η ανύψωση της επιφάνειας. Η γεωμετρία των συνόρων νερού-πυθμένα και νερού-επιφάνειας ενδιαφέρει επίσης τη φυσική ωκεανογραφία. Στις επόμενες ενότητες θα δούμε τα κύρια χαρακτηριστικά των παραμέτρων αυτών.

1.1 Στρωματοποίηση του θαλασσινού νερού.

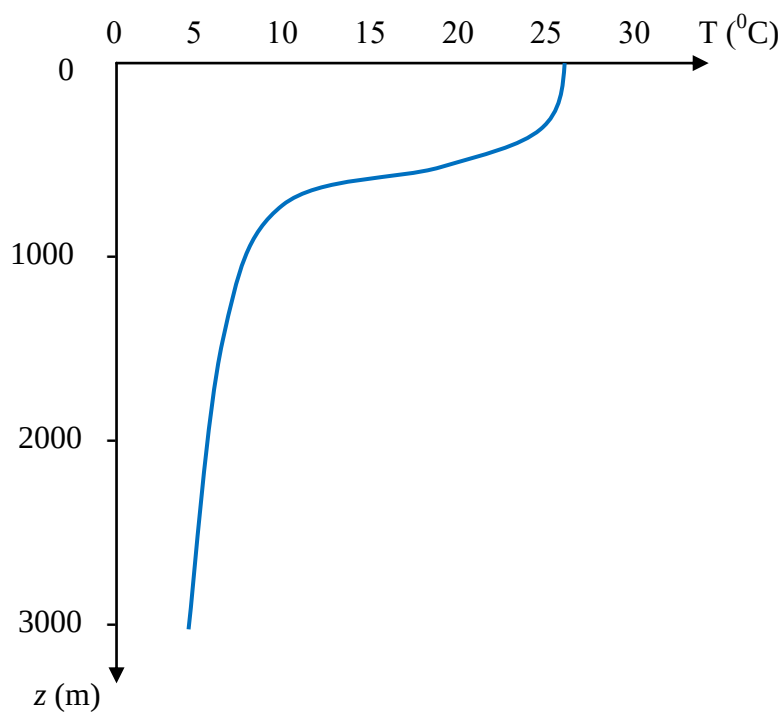
Οι φυσικές παράμετροι του θαλασσινού νερού που θα μας απασχολήσουν είναι η θερμοκρασία, η πυκνότητα και η αλατότητα, με δεδομένο ότι είναι εκείνες που καθορίζουν την τιμή της βασικής παραμέτρου της ακουστικής ωκεανογραφίας στο θαλάσσιο περιβάλλον που είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου μεταβάλλεται με το βάθος της θάλασσας αλλά και με την οριζόντια απόσταση και αποτελεί τον βασικό παράγοντα που καθορίζει τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

1.1.1 Η θερμοκρασία του θαλασσινού νερού.

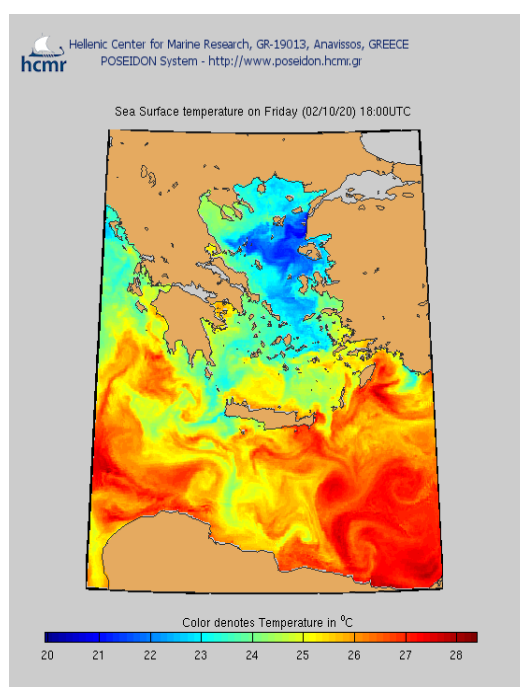
Η θερμοκρασία του θαλασσινού νερού μεταβάλλεται με το βάθος της θάλασσας και η μεταβολή αυτή εξαρτάται από την περιοχή που βρίσκεται το θαλάσσιο περιβάλλον, καθώς η γεωγραφική περιοχή καθορίζει κυρίως τη θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας. Η θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας κυμαίνεται από τους 0° C στις αρκτικές περιοχές που είναι καλυμμένες με πάγο μέχρι και πάνω από τους 35 C σε περιοχές των τροπικών. Καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερα βάθη, η θερμοκρασία μειώνεται στην αρχή, όχι πολύ απότομα (μερικές φορές μπορεί να είναι και σταθερή σε μικρά βάθη), αλλά στη συνέχεια υπάρχει μια απότομη πτώση, που σε μεγάλα βάθη μπορεί να φτάσει και κάτω από τους 4° C. Ωστόσο σε μεγάλα βάθη η πτώση είναι πολύ μικρή και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πρακτικά σταθερή σε θερμοκρασίες λίγο κάτω από τους 4° C.

Το διάγραμμα μεταβολής της θερμοκρασίας της θάλασσας συναρτήσει του βάθους ονομάζεται *θερμοκλινές (thermocline)* και έχει τη μορφή του σχήματος 1.1.

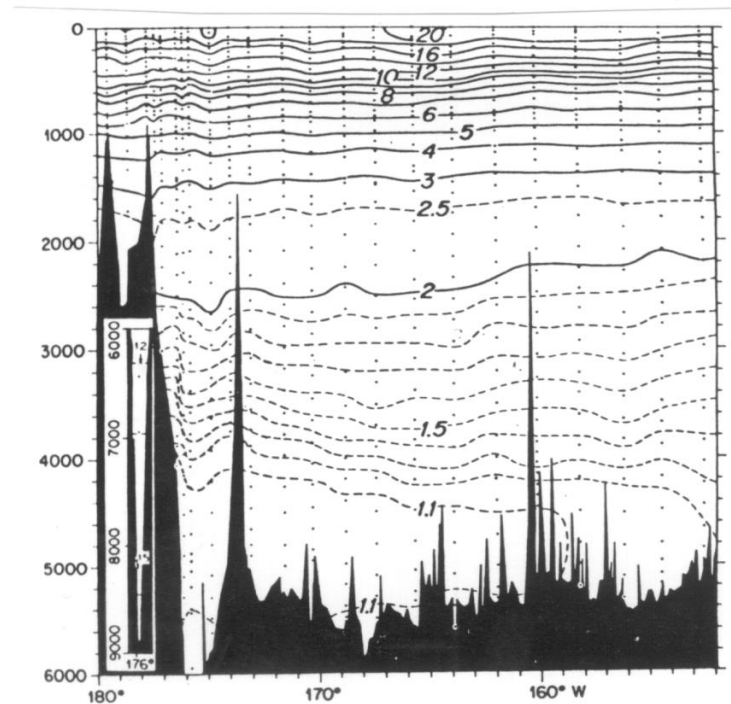
Στο σχήμα 1.2 βλέπουμε μια απεικόνιση από τη μεταβολή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια της θάλασσας όπως προκύπτει από τα μοντέλα πρόβλεψης της κατάστασης της θάλασσας του συστήματος Poseidon του Εθνικού Κέντρου Θαλάσσιων Ερευνών (ΕΛΚΕΘΕ) την Παρασκευή 2/10/2020 στις 21:00 ώρα Ελλάδας. Είναι εμφανής η διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο Βόρειο και το Νότιο Αιγαίο καθώς και το Λιβυκό Πέλαγος.



Σχήμα 1.1 Ένα τυπικό διάγραμμα θερμοκλινούς



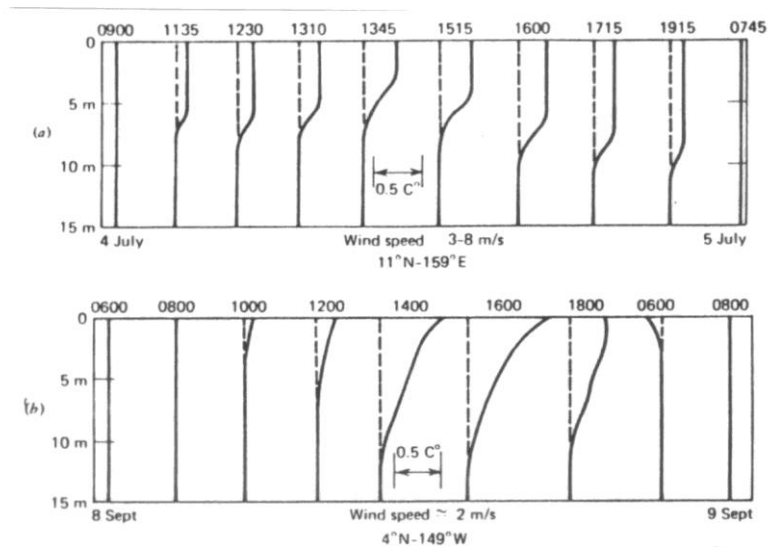
Σχήμα 1.2 Κατανομή της θερμοκρασίας επιφανείας σε Ελληνικές Θάλασσες στις 2/10/2020. Προβλέψεις του συστήματος Poseidon του ΕΛΚΕΘΕ.



Σχήμα 1.3 Καμπύλες ίσης θερμοκρασίας στον Νότιο Ειρηνικό κατά μήκος του μεσημβρινού 28°
Μετρήσεις 3-18 /7/1967 (από Clay and Medwin -1977)

Στο Σχήμα 1.3 βλέπουμε ένα διάγραμμα ισοθερμοκρασιακών καμπύλων κατά μήκος ενός μεσημβρινού στο Νότιο Ειρηνικό μετά από συστηματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν το 1967.

Η θερμοκρασία της θάλασσας στην επιφάνεια μεταβάλλεται ακόμη και μέσα στη μέρα λόγω της επίδρασης της ηλιακής ακτινοβολίας με μεταβολές που μπορεί να φτάνουν τον 1 βαθμό Κελσίου ενώ υπάρχει σημαντική μεταβολή κατά τη διάρκεια του χρόνου. Στα σχήματα 1.4 βλέπουμε μεταβολές που υφίσταται το θερμοκρασιακό προφίλ κατά τη διάρκεια μιας ημέρας πολύ κοντά στην επιφάνεια. Οι μεταβολές αυτές έχουν ως συνέπεια την μεταφορά ενέργειας από την επιφάνεια σε βαθύτερα στρώματα και αντίστροφα, σε ποσό που εξαρτάται από τις τοπικές συνθήκες. Οι κρύες μάζες νερού είναι πυκνότερες, και επομένως βαρύτερες. Έχουν έτσι την τάση να καταβυθίζονται και να αντικαθίστανται από θερμότερες μάζες, εάν αυτές υπάρχουν, από βαθύτερα στρώματα. Η ανταλλαγή αυτή μαζών και η συνεπαγόμενη ανάμειξη μπορεί να δημιουργήσει τελικά ένα ισόθερμο στρώμα νερού κοντά στην επιφάνεια. Το στρώμα αυτό ονομάζεται *στρώμα ανάμειξης (mixed layer)* και όπως θα δούμε έχει σημαντική επίπτωση στα χαρακτηριστικά της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα, καθώς ορίζει ένα στρώμα με περίπου σταθερή ταχύτητα διάδοσης.



Σχήμα 1.4 Θερμοκρασιακά προφίλ σε δύο περιοχές όπως μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια ενός 24 ώρου. Μετρήσεις του 1968. (Από Clay and Medwin 1977)

1.1.2 Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού

Η *πυκνότητα* (*density*) του θαλασσινού νερού κυμαίνεται από 1,02 έως 1,07 g/cm³. (1020-1070 kg/m³). Συμβολίζεται με το γράμμα ρ .

Η τιμή της εξαρτάται από τις τιμές της θερμοκρασίας, της αλατότητας και της πίεσης μέσω εμπειρικών συναρτήσεων που προέρχονται από προσαρμογή μεγάλου όγκου δεδομένων και γενικά είναι πολύπλοκες.

Γενικά, η τιμή της πυκνότητας του θαλασσινού νερού αυξάνεται όταν αυξάνονται οι τιμές της αλατότητας και της πίεσης (του βάθους) και μειώνεται η τιμή της θερμοκρασίας.

Δεν θα μπορούμε σε πολλές λεπτομέρειες για τη πυκνότητα του θαλασσινού νερού, καθώς, όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στα πλαίσια του μαθήματος και μπορούμε να την θεωρούμε σταθερή.

Για τις πρακτικές εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας αρκεί να χρησιμοποιείται μια ενιαία μέση τιμή για όλο το βάθος της θάλασσας. Για απλοποίηση πράξεων στις πρακτικές εφαρμογές στα πλαίσια του μαθήματος μπορούμε να πάρουμε μία τιμή 1000 kg/m³ που αφορά βέβαια το γλυκό νερό ενώ μια περισσότερο ρεαλιστική τιμή είναι 1025 kg/m³.

1.1.3 Η αλατότητα του θαλασσινού νερού

Με τον όρο *αλατότητα* (*salinity*, *S*) χαρακτηρίζουμε το μέγεθος που περιγράφει την ολική ποσότητα των διαλυμένων στο νερό αλάτων σε μέρη επί τοις χιλίοις κατά βάρος και τη μετράμε σε ppt (parts per thousand) ή ‰ ή psu (practical salinity units). Οι εκφράσεις αυτές είναι ισοδύναμες.

Η αλατότητα εκτιμάται σήμερα μετρώντας την ηλεκτρική αγωγιμότητα του θαλασσινού νερού, μια μέθοδο που έχει ακρίβεια 0,002‰.

Οι τιμές της αλατότητας στο θαλασσινό νερό κυμαίνονται από 33-40 ‰ με μέση τιμή 35 ‰.

Στο σχήμα 1.5 βλέπουμε την κατανομή της επιφανειακής αλατότητας στις Ελληνικές θάλασσες σύμφωνα με τις εκτιμήσεις του Ελληνικού Κέντρου Θαλάσσιων Ερευνών την Παρασκευή 2/10/2020 στις 21:00 ώρα Ελλάδας, που βασίζονται σε παρατηρήσεις του συστήματος Poseidon. Είναι φανερό η διαφορά αλατότητας του Βόρειου Αιγαίου σε σχέση με το Νότιο και ιδιαίτερα το Λιβυκό πέλαγος στο οποίο παρατηρούνται τιμές αλατότητας πάνω από 39 ppt .

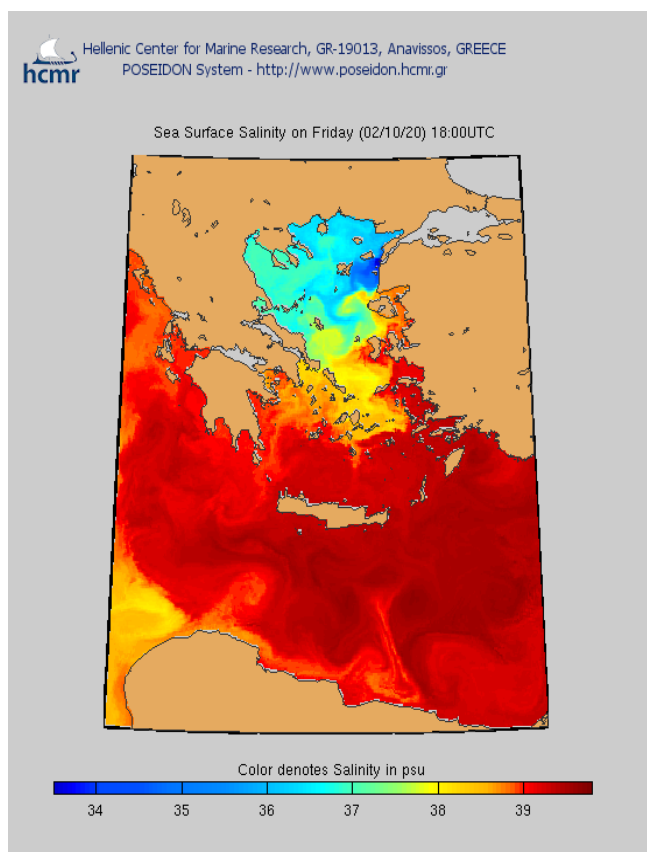
Η αλατότητα μεταβάλλεται επίσης με το βάθος, αλλά σε μικρότερο βαθμό σε σχέση με τη θερμοκρασία. Αυτό αποτυπώνεται και στο σχήμα 1.6 που παρουσιάζει καμπύλες ίσης αλατότητας σε μία τομή κατά μήκος του ίδιου μεσημβρινού στον οποίο αναφέρεται το σχήμα 1.3.

Τον επόμενο πίνακα βλέπουμε μέσες τιμές βάρους των διαφορετικών στοιχείων που παρατηρούνται σε μία συγκέντρωση 35g αλάτων σε συνολικά 1 kg θαλασσινού νερού (αλατότητα 35 ppt).

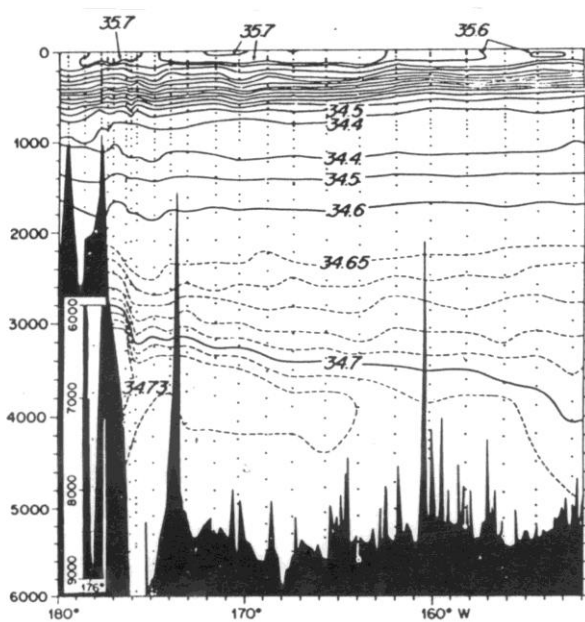
Να σημειώσουμε ότι ωκεανογραφικά όργανα που μετράνε την αλατότητα μέσω της αγωγιμότητας ονομάζονται CTD από τους όρους Conductivity, Temperature, Depth και μετράνε ταυτόχρονα τη θερμοκρασία σε συγκεκριμένο βάθος.

Στοιχείο	Ποσότητα gr	Ποσοστό %
Χλώριο	19,25	55,0
Νάτριο	10,70	30,6
Θειικά άλατα	2,70	7,7
Μαγνήσιο	1,30	3,3
Ασβέστιο	0,42	1,2
Κάλιο	0,39	1,1
Λοιπά	0,24	0,7

Πίνακας 1.1 Σχετικές μέσες ποσότητες διαλυμένων αλάτων στο θαλασσινό νερό



Σχήμα 1.5 Κατανομή της αλατότητας επιφανείας σε Ελληνικές Θάλασσες στις 2/10/2020. Εκτιμήσεις του συστήματος Poseidon του ΕΛΚΕΘΕ.



Σχήμα 1.6. Καμπύλες ίσης αλατότητας στον Νότιο Ειρηνικό κατά μήκος του μεσημβρινού 28° Μετρήσεις 3-18 /7/1967 (από Clay and Medwin -1977)

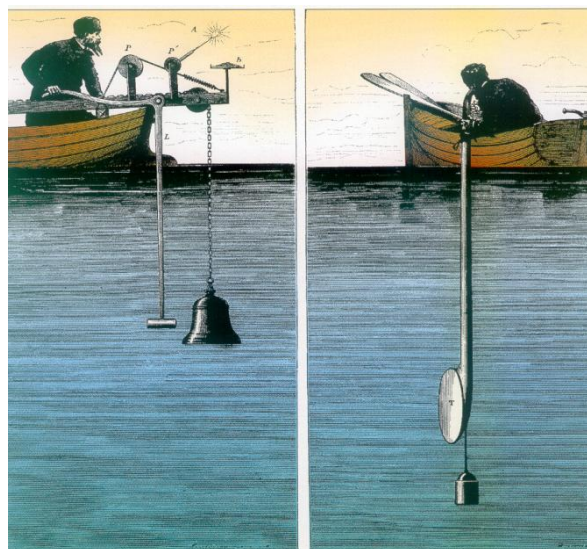
1.1.4 Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου

Όταν αναφέρεται κανείς σε θέματα ακουστικής ωκεανογραφίας, η παράμετρος που συναντά σε όλα τα προβλήματα που αφορούν τη θαλάσσια στήλη είναι η *ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη θάλασσα*. Οι πρώτες μετρήσεις της ταχύτητας του ήχου στο νερό έγιναν πιθανότατα από τους Colladon και Sturm στη λίμνη της Γενεύης το Νοέμβριο του 1826, με χρήση απλών ακουστικών σε σχήμα χωνιού, ενός κώδωνα για την παραγωγή του ήχου και των απαραίτητων χρονομέτρων. Οι μετρήσεις που έγιναν τότε, έδωσαν τιμή 1435 m/sec πολύ κοντά στην πραγματική που σύμφωνα με τις εμπειρικές σχέσεις που θα δούμε στη συνέχεια είναι για τις δεδομένες περιβαλλοντικές συνθήκες της μέτρησης, 1438 m/sec (Σχήμα 1.7). Ωστόσο η τιμή αυτή δεν είναι έτσι κι αλλιώς σταθερή, μια και εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους του νερού, όπως η θερμοκρασία, η αλατότητα η πίεση και ακόμη το γεωγραφικό πλάτος της περιοχής. Εξ' αιτίας αυτού αλλάζει σημαντικά από περιοχή σε περιοχή, και μεταβάλλεται ακόμη και στον χρονικό ορίζοντα της ημέρας, με τρόπο ανάλογο με αυτό της θερμοκρασίας από την οποία άλλωστε εξαρτάται. Μία ημιεμπειρική σχέση που δίνει με ικανοποιητική ακρίβεια την ταχύτητα του ήχου σε μέσο γεωγραφικό πλάτος είναι :

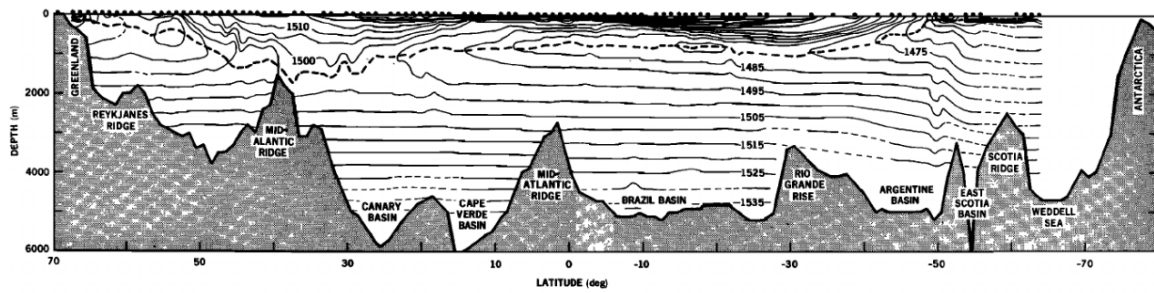
$$c = 1449.2 + 4.6 T - 0.055 T^2 + 0.00029 T^3 + (1.34 - 0.010T)(S - 35) + 0.016z \quad (1.1.1)$$

όπου c = ταχύτητα του ήχου (m/s)
 T = θερμοκρασία (°C)
 S = αλατότητα (σε μέρη επί τοις χιλίοις - ppt)
 z = βάθος (m)

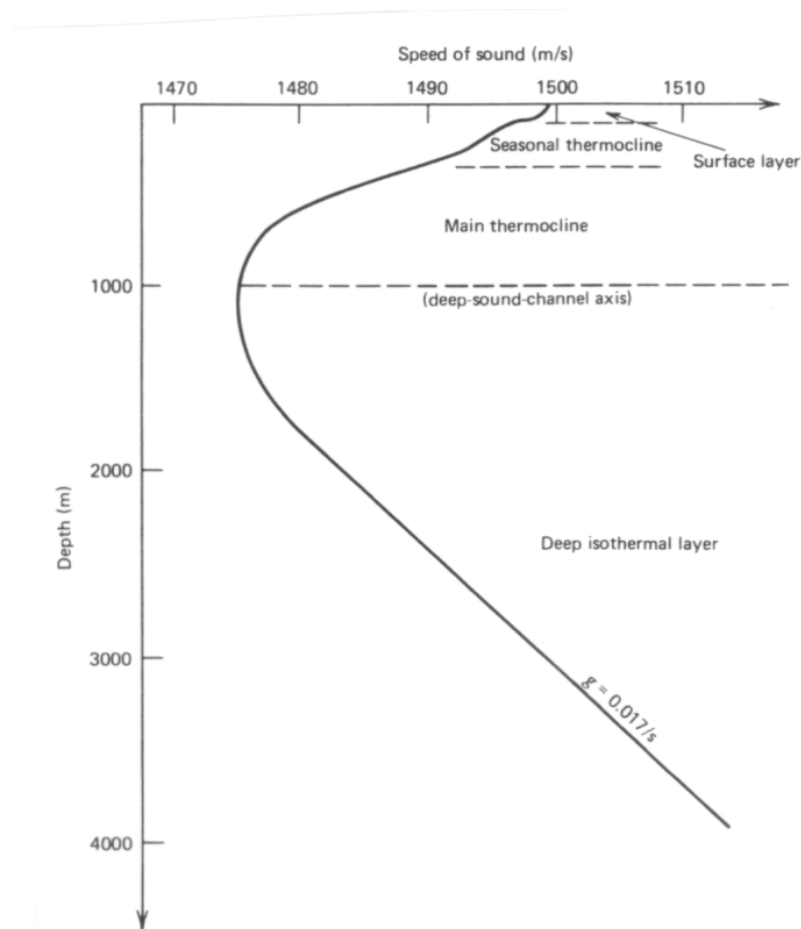
Μία αίσθηση της μεταβολής της θερμοκρασίας και της αλατότητας με το βάθος και κατά μήκος μιας τομής στη θάλασσα πήραμε ήδη με τα σχήματα 1.3 και 1.6, ενώ στο σχήμα 1.8 βλέπουμε μία τυπική μεταβολή της ταχύτητας του ήχου με το βάθος και την απόσταση σε μία άλλη τομή. Και οι τρεις εικόνες υποδηλώνουν το χαρακτηριστικό της οριζόντιας στρωματοποίησης της θάλασσας.



Σχήμα 1.7 Σχηματική απεικόνιση του πειράματος των Colladon και Sturm για την μέτρηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στη λίμνη της Γενεύης



Σχήμα 1.8 Ισοταχείς κατά μήκος του Ατλαντικού Ωκεανού στον μεσημβρινό Δυτικά 30.50° Μετρήσεις του 1974. Φαίνεται το ηχητικό κανάλι που αντιστοιχεί σε τοπικά ελάχιστα της ταχύτητας διάδοσης του ήχου (από Nortrop and Colborn 1974)



Σχήμα 1.9 Τυπικό προφίλ ταχύτητας του ήχου σε βαθιά θάλασσα. (Από Kinsler & Frey)

Στο σχήμα 1.9 βλέπουμε ένα τυπικό προφίλ ταχύτητας για βαθιά θάλασσα, όπου έχουν χαρακτηριστεί περιοχές ανάλογα με τις μεταβολές της ταχύτητας του ήχου με το βάθος. Όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, οι μεταβολές αυτές είναι θεμελιώδους σημασίας για την διάδοση του ήχου στο νερό.

Το *επιφανειακό στρώμα* (*surface layer*) όπως ήδη εξηγήσαμε σχετίζεται με το στρώμα ανάμειξης, χαρακτηρίζεται από σχετικά σταθερή θερμοκρασία και δίνει πολύ μικρές μεταβολές στην ταχύτητα του ήχου. Κάτω από το ισόθερμο στρώμα παρατηρείται γρήγορη μείωση της θερμοκρασίας με το βάθος που ισοδυναμεί με μείωση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Να σημειώσουμε ότι κοντά στο επιφανειακό στρώμα παρατηρούμε εποχιακές μεταβολές της θερμοκρασίας και αυτό αποτυπώνεται στο διάγραμμα με τον όρο *εποχιακή θερμοκλινής* (*seasonal thermocline*) χρησιμοποιώντας την ορολογία που είδαμε στη μεταβολή της θερμοκρασίας του θαλασσινού νερού συναρτήσει του βάθους. Ακολουθεί ένα στρώμα μέχρι τον *ηχητικό άξονα* (ελάχιστη τιμή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου) που χαρακτηρίζεται ως κύρια θερμοκλινής. Ακολουθεί η περιοχή που χαρακτηρίζεται από αύξηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου κυρίως λόγω της επίδρασης της υδροστατικής πίεσης. Το βάθος στο οποίο παρατηρείται το ελάχιστο της ταχύτητας διάδοσης του ήχου χαρακτηρίζει τον άξονα του *ηχητικού καναλιού*, το οποίο με τη σειρά του ορίζεται από βάθη στα οποία παρατηρείται ίση (αλλά τοπικά μέγιστη) ταχύτητα διάδοσης του ήχου πάνω και κάτω από τον ηχητικό άξονα. Ένα ηχητικό κανάλι παρουσιάζει εξαιρετικά χαρακτηριστικά ακουστικής διάδοσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι στην πραγματικότητα η θάλασσα δεν είναι ακίνητη. Κινήσεις των μαζών της παρατηρούνται συνεχώς και σχετίζονται με πολυποίκιλες ωκεανογραφικές διεργασίες. Στις διεργασίες αυτές θα πρέπει να περιλάβουμε την κίνηση της επιφάνειας που δημιουργεί μεταβολές ακόμη και σε κλίμακα δευτερολέπτων, εσωτερικά κύματα με περιόδους από λεπτά σε ώρες, ημέρες, ή ακόμη και εποχιακές. Φαινόμενα κινήσεων όπως αυτά που αναφέραμε είναι περισσότερο συχνά κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας, όπου παρατηρούνται και οι πιο έντονες θερμοκρασιακές μεταβολές, αλλά παρατηρούνται επίσης τύρβη και θερμοκρασιακές μικρομεταβολές ακόμη και σε μεγάλα βάθη που οδηγούν σε κινήσεις των υδάτινων μαζών και μεταβολές στην ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Σε ό,τι αφορά στα εσωτερικά κύματα, αυτά οφείλονται σε βαρυτικές διαφορές ανάμεσα σε μάζες νερού διαφορετικής πυκνότητας και η επίδραση τους είναι εμφανής ακόμη και σε μεγάλες αποστάσεις από το σημείο στο οποίο γεννάται το φαινόμενο.

Γενικά οι μεταβολές της ταχύτητας του ήχου στο νερό είναι έντονες τόσο χωρικά όσο και χρονικά και πολλές φορές δεν είναι εφικτή η αντιμετώπιση προβλημάτων που σχετίζονται με τη διάδοση του ήχου στο νερό στα πλαίσια κάποιας ντετερμινιστικής θεώρησης. Στις περιπτώσεις αυτές η στοχαστική θεώρηση είναι περισσότερο κοντά στην πραγματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Ωστόσο δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με θεώρηση αυτής της μορφής και θα περιοριστούμε σε αυστηρά ντετερμινιστικά φαινόμενα.



Σχήμα 1.10 Κύματα βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας

1.2 Η επιφάνεια της θάλασσας.

Η επιφάνεια της θάλασσας αποτελεί το άνω σύνορο του πεδίου μελέτης των προβλημάτων που σχετίζονται με την ακουστική ωκεανογραφία. Αν και για την υποβρύχια ακουστική (και κατ' επέκταση την ακουστική ωκεανογραφία) η επιφάνεια της θάλασσας αντιμετωπίζεται με απλουστευτικές παραδοχές όπως θα δούμε στη συνέχεια, σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. στην μελέτη του θορύβου του περιβάλλοντος) θα πρέπει να ληφθούν υπόψη πολλά από τα γεωμετρικά και κινητικά χαρακτηριστικά της που σχετίζονται με τα **κύματα επιφανείας** που είναι αυτά που παρατηρούμε με το μάτι.

Τα κύματα αυτά ποικίλουν σε μέγεθος (ύψος κύματος) και συχνότητα (περίοδο) αλλά και περιγράφονται διαφορετικά με βάση την ενέργεια που μεταφέρουν. Τα πιο μικρά σε μέγεθος κύματα με μήκος κύματος που συνήθως δεν υπερβαίνει τα 2 εκατοστά εξαρτώνται από την επιφανειακή τάση στο σύνορο νερού-αέρα. Ονομάζονται *κύματα επιφανειακής τάσης (capillary waves)* και δεν μας απασχολούν ιδιαίτερα στα πλαίσια της ακουστικής ωκεανογραφίας (Σχήμα 1.11).

Τα *κύματα βαρύτητας (gravity waves)* που είναι εκείνα που παρατηρεί κανείς περισσότερο, σχετίζονται με την βαρύτητα που είναι η αιτία που τα διατηρεί μετά την δημιουργία τους, η οποία βέβαια οφείλεται στην επενέργεια του ανέμου. Οι έννοιες «πλάτος» και «περίοδος» των κυμάτων αυτών ενδιαφέρουν την θαλάσσια υδροδυναμική καθώς καθορίζουν και την συμπεριφορά των πλωτών μέσων. Επειδή τα κύματα αυτά είναι σύνθετα από την άποψη της ανάλυσής τους σε «μήκος» και «συχνότητα», η μελέτη τους ξεκινά από την θεώρηση των χαρακτηριστικών τους σε μία συχνότητα και στη συνέχεια γίνεται η σύνθεσή των συνιστωσών τους.¹

¹ Στην επιφάνεια της θάλασσας μπορούν να παρατηρηθούν και «κύματα» που εξαρτώνται από μια σεισμική διέγερση (tsunami). Δεν θα αναφερθούμε σε αυτά στα πλαίσια του μαθήματος. Επίσης δεν θα αναφερθούμε σε παλίρροιες που προέρχονται από βαρυτικές δυνάμεις της σελήνης και του ήλιου.



Σχήμα 1.11 Φωτογραφία από κύματα επιφανειακής τάσης (Roger McLassus, CC BY-SA 3.0 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=513043>)

Η γέννηση των κυμάτων βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας οφείλεται κυρίως στον άνεμο που μεταφέρει ενέργεια από την ατμόσφαιρα στην επιφάνεια της θάλασσας. Τα κύματα που οφείλονται στον άνεμο είναι τα συνήθη κύματα της θάλασσας. Η μορφή και ο τύπος των κυμάτων αυτών εξαρτώνται από

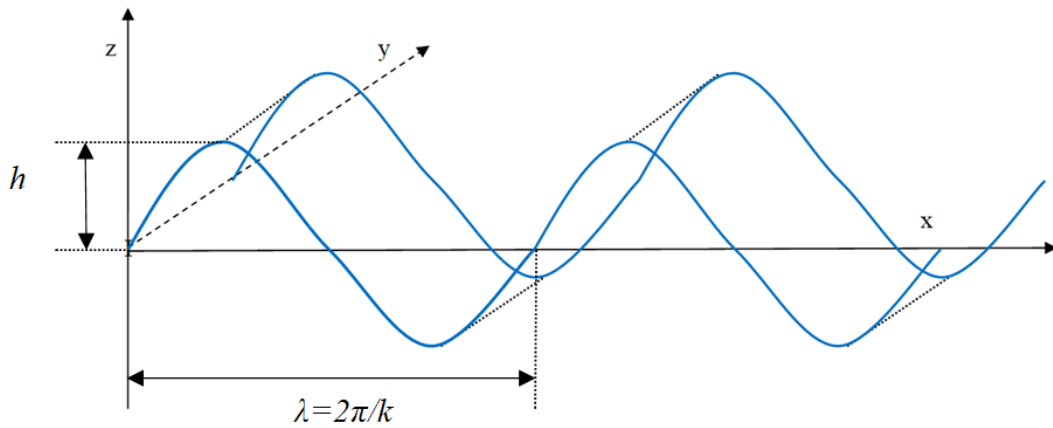
- Την ταχύτητα του ανέμου.
- Τη χρονική διάρκεια του ανέμου, και
- Την αρχική κατάσταση της επιφάνειας της θάλασσας.

Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στους μηχανισμούς δημιουργίας των κυμάτων επιφανείας και τον υπολογισμό τους αφού το αντικείμενο δεν αφορά το μάθημα στο οποίο αναφέρονται οι σημειώσεις. Επειδή όμως και τα κύματα βαρύτητας περιγράφονται μαθηματικά με κυματικές εξισώσεις που διέπονται από παραμέτρους που θα συναντήσουμε και στην ακουστική ωκεανογραφία, θα δώσουμε μερικές εισαγωγικές έννοιες που θα βοηθήσουν στη συσχέτιση των μεγεθών στις οποίες αυτές αναφέρονται με αντίστοιχες της ακουστικής διάδοσης που μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια του μαθήματος.

Μια απλουστευμένη απεικόνιση ενός κύματος επιφανείας που διαδίδεται στη θάλασσα με συγκεκριμένη συχνότητα, παρουσιάζεται στο σχήμα 1.12. Το κύμα διαδίδεται κατά τη διεύθυνση x και δεν διαφοροποιείται ως προς την διεύθυνση y (διάδοση σε δύο διαστάσεις).

Τα βασικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι :

- Το ύψος του κύματος h :
- Το μήκος του κύματος λ που ορίζεται κατά τα γνωστά ως η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών.
- Η περίοδος T ενός κύματος βαρύτητας είναι ο χρόνος που απαιτείται για να περάσουν δύο διαδοχικές «κορυφές» ή «κοιλιάδες» του κύματος από το ίδιο χωρικό σημείο.



Σχήμα 1.12 Απεικόνιση ενός επιφανειακού κύματος βαρύτητας

- Συχνότητα f είναι το αντίστροφο της περιόδου $f = 1/T$. Όταν η περίοδος εκφράζεται σε sec η συχνότητα εκφράζεται σε Hz.
- Ως αριθμός κύματος k ορίζεται το πηλίκο :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.2.1)$$

- Φασική ταχύτητα c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος βαρύτητας συχνότητας f .

Ο συνδυασμός των ανωτέρω ορισμών μας δίνει εναλλακτικές εκφράσεις για τη φασική ταχύτητα διάδοσης του κύματος :

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{kT} = \frac{2\pi f}{k} \quad (1.2.2)$$

Ορίζοντας την *κυκλική συχνότητα* ω από τη σχέση $\omega = 2\pi f$, παίρνομε μία ακόμη έκφραση για τον αριθμό κύματος μέσω της 1.2.2 ως :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (1.2.1\beta)$$

Στην περίπτωση των κυμάτων βαρύτητας στη θάλασσα, η κυκλική συχνότητα εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g ($\approx 9.8 \text{ m/sec}^2$) και το βάθος της θάλασσας D . Η σχέση που συνδέει τα μεγέθη αυτά προέρχεται από την εφαρμογή των κατάλληλων οριακών συνθηκών στο πρόβλημα του υπολογισμού της διάδοσης των κυμάτων στο εν λόγω χωρίο (δεν θα μπορούμε σε λεπτομέρειες επίλυσης του ως άνω προβλήματος, κάτι που ξεφεύγει από τους στόχους του μαθήματος) και είναι :

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kD)} \quad (1.2.3)$$

όπου με $\tanh$ συμβολίζομε την υπερβολική εφαπτομένη.

Η υπερβολική εφαπτομένη για μεγάλα ορίσματα τείνει στην μονάδα, ενώ για μικρά ορίσματα τείνει στην τιμή του ορίσματος.

Έτσι, για $kD \rightarrow \infty$ $\tanh(kD) \rightarrow 1$ και για $kD \rightarrow 0$ $\tanh(kD) \rightarrow kD$.

Τα ανωτέρω όρια οδηγούν σε εκφράσεις για τη φασική ταχύτητα των κυμάτων βαρύτητας ανάλογα με το αν βρισκόμαστε σε βαθιά ή ρηχή θάλασσα. Βαθεία θάλασσα θεωρείται για τους ωκεανογράφους η θάλασσα για την οποία $\frac{D}{\lambda} > 0,5$ που μέσω της σχέσης 1.2.1 μας δίδει $kD > \pi$. Ρηχή θάλασσα θεωρείται η θάλασσα για την οποία $kD \ll 1$.

1.2.1 Βαθεία θάλασσα

Στη βαθιά θάλασσα η κυκλική συχνότητα των κυμάτων βαρύτητας από τη σχέση 1.2.3 εκφράζεται ως :

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (1.2.4)$$

και με χρήση της 1.2.1β παίρνουμε την απλή σχέση που εκφράζει τη φασική ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος βαρύτητας :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (1.2.5)$$

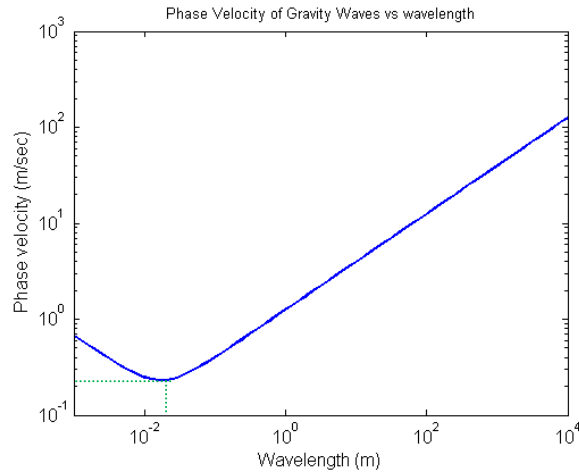
Είναι φανερό ότι η φασική ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων βαρύτητας εξαρτάται από τη συχνότητα.

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε και την περίπτωση που η επιφανειακή τάση είναι σημαντική και συνεισφέρει στο σχηματισμό του κύματος, οπότε έχουμε συνδυασμό κύματος βαρύτητας και επιφανειακής τάσης. Στην περίπτωση αυτή και έχοντας θεωρήσει ότι η πυκνότητα του αέρα είναι αμελητέα, η φασική ταχύτητα δίδεται από την σχέση :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}} \quad (1.2.6)$$

όπου

σ είναι η επιφανειακή τάση (τυπική τιμή 7.4×10^{-2} N/m) και ρ είναι η πυκνότητα του νερού (kg/m^3).



Σχήμα 1.13 Φασική ταχύτητα κυμάτων επιφανειακής τάσης και βαρύτητας ως συνάρτηση του μήκους κύματος με χρήση της 1.2,6.

Από την σχέση (1.2.6) βλέπουμε ότι όταν η συχνότητα είναι μεγάλη (k μεγάλο), ο δεύτερος όρος στην ρίζα της ανωτέρω σχέσης κυριαρχεί στην έκφραση της ταχύτητας και συνεπώς η φασική ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων επιφανείας καθορίζεται από την επιφανειακή τάση.

Είναι προφανές ότι η φασική ταχύτητα των κυμάτων βαρύτητας σε βαθειά θάλασσα αυξάνει με το μήκος κύματος ενώ αντίθετα στα κύματα επιφανειακής τάσης μειώνεται με το μήκος κύματος. Το ελάχιστο παρατηρείται σε μήκος κύματος 1,73 cm και είναι της τάξης των 0,23 m/sec (Σχήμα 1.13).

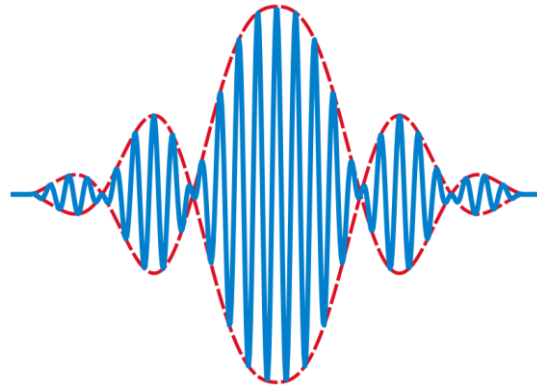
Στην πραγματικότητα βέβαια, τα κύματα επιφανείας της θάλασσας δεν χαρακτηρίζονται από ένα μόνο μήκος κύματος ούτε από μία μόνο διεύθυνση διάδοσης. Περισσότεροι κυματικοί σχηματισμοί διαφορετικού πλάτους μπορεί να συμμετέχουν στη σύνθετη διαδικασία από την οποία προκύπτει το σχήμα και η χρονική μεταβολή της επιφάνειας της θάλασσας. Οι πολλές συχνότητες που συμμετέχουν στο φαινόμενο συνθέτουν ένα σύνθετο φάσμα και ένα πολύπλοκο κυματισμό στον οποίο πρέπει να ορισθεί ένα νέο πλάτος και μία νέα περίοδος.

Η ταχύτητα διάδοσης ενός σύνθετου κυματισμού, καθορίζεται από την *ταχύτητα ομάδας* (*group velocity*) που δίδεται από την σχέση :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (1.2.7)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι ο σύνθετος κυματισμός αποτελείται από μία συνεχή κατανομή στοιχειωδών κυμάτων διαφορετικής συχνότητας με μέσο αριθμό κύματος k_0 .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αριθμού κύματος και κυκλικής συχνότητας $\omega = kc$ και τη σχέση 1.2.5 παίρνουμε :



Σχήμα 1.14 Σχηματική παράσταση διάδοσης κύματος διασποράς. Ο κυματισμός που αποδίδεται με συνεχή (μπλε) γραμμή διαδίδεται με τη φασική ταχύτητα, ενώ το περίβλημα που αποδίδεται με τη διακεκομμένη (κόκκινη γραμμή) με την ταχύτητα ομάδας (Σχήμα από Wikipedia).

$$\omega = kc = k\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{gk} \quad (1.2.8)$$

Επομένως για την ταχύτητα ομάδας παίρνουμε :

$$v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c \quad (1.2.9)$$

όπου ο υπολογισμός γίνεται για την μέση συχνότητα του κυματισμού.

Κύματα στα οποία η ταχύτητα ομάδας διαφέρει από τη φασική ταχύτητα ονομάζονται *κύματα διασποράς (dispersive waves)*.

1.2.2 Ρηχή θάλασσα

Όταν η θάλασσα θεωρείται **ρηχή**, η κυκλική συχνότητα εκφράζεται ως

$$\omega \simeq \sqrt{gkD} = \sqrt{gk^2 D} \quad , \quad (1.2.10)$$

οπότε ο αριθμός κύματος εκφράζεται ως

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{gD}} \quad (1.2.11)$$

και η φασική ταχύτητα των κυμάτων βαρύτητας προκύπτει από τη σχέση 1.2.1β ως :

$$c = \sqrt{gD} \quad (1.2.12)$$

και βλέπουμε ότι δεν εξαρτάται από τη συχνότητα. Παρατηρούμε ότι σε ρηχή θάλασσα η ταχύτητα ομάδας είναι ίση με τη φασική ταχύτητα και τα βαρυτικά κύματα δεν είναι κύματα διασποράς.

1.2.3 Σχολιασμός

Με βάση τα παραπάνω και την αυτονόητη περιπλοκή που θέτει η συμπεριφορά του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας, είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατός ο ντετερμινιστικός υπολογισμός του σχήματος της επιφάνειας της θάλασσας αφού αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί σε καμία περίπτωση ως χρονικά σταθερό.

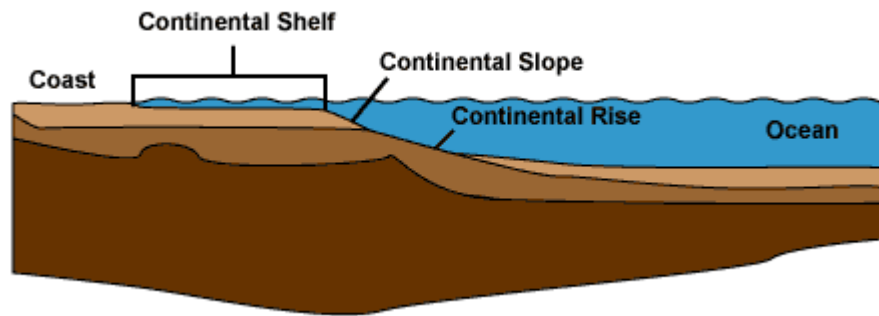
Παρ' όλα αυτά, απλοποιημένα γεωμετρικά σχήματα (π.χ. ημιτονοειδείς ανυψώσεις) έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη ακουστικών φαινομένων που σχετίζονται με την επιφάνεια της θάλασσας, έχοντας υπ' όψιν ότι το πραγματικό φαινόμενο μπορεί να μελετηθεί με επαλληλία λύσεων που κάθε μία από αυτές αφορά συγκεκριμένο ημιτονοειδές σχήμα επιφανείας, (σύνθεση Fourier). Σε άλλες πάλι περιπτώσεις, και ιδιαίτερα όταν το ακουστικό κύμα έχει μεγάλο μήκος σε σχέση με την μέγιστη ανύψωση της επιφανείας, χρησιμοποιείται η έννοια της τραχύτητας που αναφέρεται στην επιφάνεια η οποία χαρακτηρίζεται από ένα μέσο ύψος ανύψωσης, και τα σχετικά ακουστικά προβλήματα επιλύονται με βάση την θεωρία διαταραχών, όπου ως κατάσταση αναφοράς θεωρείται αυτή της επίπεδης επιφάνειας, ενώ η παραγόμενη λύση στην κατάσταση αναφοράς διαταράσσεται με βάση την θεωρούμενη (μέση) τραχύτητα της επιφανείας, παράγοντας ένα ντετερμινιστικό αποτέλεσμα.

1.3 Ο πυθμένας της θάλασσας.

Ο πυθμένας της θάλασσας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ακουστική ωκεανογραφία. Δεν είναι τόσο η γεωλογική του συμπεριφορά που θα μας απασχολήσει εδώ, όσο εκείνη ενός ακουστικού μέσου και για το λόγο αυτό θα δώσουμε αργότερα μία γεωμετρική περιγραφή και ένα κατάλογο των ιδιοτήτων του που αφορούν τη διάδοση των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων σ' αυτόν.

Περίληπτικά, μπορούμε να πούμε ότι γεωλογικά η προέλευση του θαλασσινού βυθού είναι το εσωτερικό της γης και το μάγμα το οποίο ανέρχεται από το κέντρο της γης και δημιουργεί μικρές ανυψώσεις υλικών, οι οποίες μίκραιναν σιγά-σιγά, καθώς τα υλικά μετακινούνται και εξαπλώνονται σε διπλανούς χώρους. Παράλληλα υπάρχουν καταβυθίσεις υλικών σε κοιλάδες και η όλη διαδικασία είναι αργή μεν σε απόλυτο χρόνο, γρήγορη δε στον γεωλογικό χρόνο καθώς η εξάπλωση των υλικών μπορεί να είναι μέχρι και 10 cm/χρόνο. Τα στρώματα της θάλασσας που έλκουν την προέλευσή τους από τις ως άνω διαδικασίες θεωρούνται ηφαιστειογενή.

Παράλληλα καθιζάνουν στον πυθμένα της θάλασσας υλικά βιολογικής προέλευσης (ζωικής ή φυτικής), ενώ υπάρχει και παράσυρση και καθίζηση υλικών από την ξηρά, ιδιαίτερα κοντά στις εκβολές ποταμών. Κοντά στις ακτές η διαδικασία ιζηματογένεσης είναι ασταθής ενώ τα θαλασσινά ιζήματα δεν έχουν αρκετή ακαμψία και συμπεριφέρονται πρακτικά ως ρευστά. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης των κυματικών φαινομένων που σχετίζονται με την διάδοση του ήχου από το νερό στα θαλασσινά ιζήματα και αντίστροφα. Ιδιαίτερα, επειδή όπως θα δούμε στη συνέχεια η ανάκλαση και η διάδοση της ακουστικής ενέργειας στον πυθμένα εξαρτάται από τις παραμέτρους του, η ακουστική διακρίβωση της σύστασης του βυθού είναι συνήθης πρακτική στην θαλάσσια γεωφυσική.



Σχήμα 1.15 Σχηματικό διάγραμμα τομής του θαλάσσιου περιβάλλοντος σε παράκτια περιοχή.

Να σημειώσουμε τέλος ότι η τραχύτητα της διαχωριστικής επιφάνειας νερού-πυθμένα είναι ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας που άλλοτε επιδρά θετικά και άλλοτε αρνητικά στις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας.

Στο σχήμα 1.15 βλέπουμε ένα σχηματικό διάγραμμα που απεικονίζει την δομή του πυθμένα κοντά σε μία ακτή. Τα ανοικτά χρώματα αντιστοιχούν σε μαλακά υλικά (μικρής πυκνότητας και μεγάλης περιεκτικότητας σε νερό - για τα θαλασσινά ιζήματα) ενώ τα πιο σκούρα χρώματα αντιστοιχούν σε σκληρά υλικά. Παρατηρείστε την στρωματοποίηση των ιζημάτων που λόγω βαρύτητας είναι σχεδόν οριζόντια κάτω από την υδάτινη στήλη σε μακρινή απόσταση από την ακτή.

Στα θαλασσινά ιζήματα θα αναφερθούμε και στο κεφάλαιο του μαθήματος που αφορά ανάκλαση και διάδοση του ήχου από το σύνορο νερού-πυθμένα, ενώ πρόσθετα στοιχεία για τις ιδιότητες των ιζημάτων μπορεί να αναζητήσει ο ενδιαφερόμενος στο Παράρτημα Γ των σημειώσεων.

1.4 Στοιχεία από την ζωή στη θάλασσα

Η ζωή στη θάλασσα αποτελείται από μονάδες που ως προς τις διαστάσεις ποικίλουν από τις εξαιρετικά μικρές διαστάσεις των στοιχείων που αποτελούν το πλαγκτόν, έως τις διαστάσεις των μεγάλων κυτών. Οι μικρών διαστάσεων βιολογικές μάζες εμφανίζονται στη θάλασσα ως συγκεντρώσεις ρευστού διαφορετικής πυκνότητας σε σχέση με το νερό και αποτελούν την βασική πηγή ανομοιογενειών σ' αυτό. Εάν ο ερευνητής ακουστικός δεν ενδιαφέρεται για την διακρίβωση της σύνθεσης των υλικών αυτών, οι βιολογικές αυτές συγκεντρώσεις αποτελούν ανεπιθύμητους σχηματισμούς που περιορίζουν την εμβέλεια των ακουστικών συσκευών, καθώς επηρεάζουν αρνητικά τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Πηγαίνοντας σε μεγαλύτερα μεγέθη θαλάσσιας ζωής, συζητάμε για την πιθανότητα σκέδασης της ακουστικής ενέργειας από τα στοιχεία, των οποίων το μέγεθος σε σχέση με το μήκος κύματος καθορίζουν την έντασή τους ως στόχων στη θάλασσα. Η έντασή τους εξαρτάται επίσης από το πόσο διαφέρει η πυκνότητά τους αλλά και οι υπόλοιπες ακουστικές παράμετροι σε σχέση με το περιβάλλον νερό. Ένας απλοποιημένος κανόνας ορίζει ότι ένας θαλάσσιος οργανισμός είναι ενεργός ως σκεδαστής εάν η ισοδύναμη διάστασή του είναι μεγαλύτερη από το μήκος κύματος.

Είναι αυτονόητο ότι μία συγκέντρωση οργανισμών είναι πολύ περισσότερο ενεργή ως σκεδαστής, ανεξάρτητα από το μέγεθος των μεμονωμένων οργανισμών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι θαλάσσιοι οργανισμοί πολλές φορές διαθέτουν ένα εσωτερικό κοίλωμα (νηκτική κύστη), το οποίο χρησιμοποιείται από αυτούς ως στοιχείο πλευστότητας και το οποίο παίζει επίσης ένα σημαντικό ρόλο στην ακουστική διάδοση. Είναι χαρακτηριστικό ότι η αναγνώριση πολλών ειδών θαλάσσιας ζωής γίνεται μέσω της νηκτικής κύστης τους και είναι τόσο περισσότερο αποδοτική όσο πιο κοντά είναι η συχνότητα του ακουστικού κύματος στην ιδιοσυχνότητα της κύστης (Σχήμα 1.12). Να σημειώσουμε εδώ ότι οι ακουστικές ιδιότητες των θαλάσσιων οργανισμών και ιδιαίτερα των κητωδών (φάλαινες, δελφίνια κλπ.) συνιστούν τον ιδιαίτερα ενδιαφέροντα κλάδο της **θαλάσσιας βιοακουστικής**.



Σχήμα 1.16 Η νηκτική κύστη ομάδας ψαριών όπως αυτή διακρίνεται σε σχετική ακτινογραφία



2. Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον

Η ακουστική ωκεανογραφία επικεντρώνεται γύρω από την διάδοση της ακουστικής ενέργειας στο νερό και στα γειτονικά του μέσα (πυθμένας) και επομένως η μελέτη των συνθηκών διάδοσης και αλληλεπίδρασης με τα σύνορα ενός ακουστικού μέσου είναι η βάση της έρευνας στην συγκεκριμένη θεματική περιοχή. Στα κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία της κυματικής θεωρίας περιορίζοντας την μαθηματική ανάλυση στα επίπεδα κύματα και στα φαινόμενα τοπικής διάδοσης και ανάκλασης κυμάτων ανάμεσα σε διεπιφάνειες. Στο επόμενο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε στοιχεία της γεωμετρικής ακουστικής με βάση την οποία μπορεί με ένα σχετικά απλό και κατανοητό τρόπο, να μελετήσει κάποιος την διάδοση του ήχου σε ένα ακουστικό μέσο.

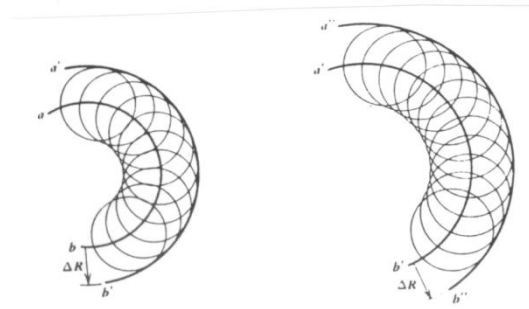
2.1 Η φύση των ακουστικών διαταραχών.

Ένα ακουστικό κύμα είναι μία διαταραχή της πίεσης ενός μέσου που διαδίδεται μέσα στο μέσον αυτό. Για να γίνει δυνατή η μετάδοση της διαταραχής, το μέσον πρέπει να είναι συμπιεστό (να επιτρέπει αυξομειώσεις της πυκνότητας) και τα ακουστικά κύματα χαρακτηρίζονται ως *κύματα συμπιεστότητας (compressional waves)*. Η διαταραχή προέρχεται από την ακουστική πηγή που με κάποιο φυσικό τρόπο (π.χ. ταλάντωση ή έκρηξη) διαταράσσει την κατάσταση ισορροπίας του μέσου με έμφαση στα κινητικά χαρακτηριστικά των στοιχειωδών σωματιδίων που το αποτελούν και προκαλεί αυξομειώσεις των μεγεθών που υπεισέρχονται στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού, όπως είναι η πυκνότητα, η πίεση, και η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων. Ανάλογα με το μέγεθος της διαταραχής η πηγή χαρακτηρίζεται ως μεγάλης ή μικρής έντασης. Είναι αυτονόητο ότι η ακουστική διαταραχή προσδίδει ενέργεια στο σύστημα που χαρακτηρίζεται ως *ακουστική ενέργεια*.

2.2 Ακουστικά κύματα.

Η ακουστική διαταραχή διαδίδεται στο ακουστικό μέσον με μία διαδικασία που πολύ απλά μπορεί να περιγραφεί ως μία διαδοχική διέγερση των στοιχειωδών σωματιδίων του ακουστικού μέσου. Εάν θεωρήσουμε μία σημειακή πηγή, η αρχή του Huygens μας δίδει παραστατικά τη διαδικασία αυτή για ομογενή και ισότροπα μέσα. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν, μία διαταραχή που έχει φτάσει σε συγκεκριμένο σημείο του ακουστικού χώρου δρα ως νέα πηγή που λόγω συμμετρίας στέλνει ακουστική ενέργεια σε μέτωπα που έχουν τη μορφή σφαιρικών επιφανειών. Συνθέτοντας τις νέες αυτές επιφάνειες παίρνει κανείς το νέο *μέτωπο κύματος*² κ.ο.κ.. Η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής παίρνει συγκεκριμένη τιμή που μπορεί να μεταβάλλεται με τον χώρο και τον χρόνο. Εάν η ταχύτητα θεωρηθεί σταθερή και ίση με c , η διανυθείσα από το μέτωπο κύματος απόσταση σε χρόνο Δt είναι $\Delta R = c \Delta t$.

² Για ένα αυστηρότερο ορισμό του μετώπου κύματος παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 2.4.



Σχήμα 2.1 Η αρχή του Huygens σε ότι αφορά την εκπομπή κυμάτων από σημειακή πηγή (από Clay and Medwin 1977)

2.3 Διάδοση του ήχου – Ακουστική εξίσωση.

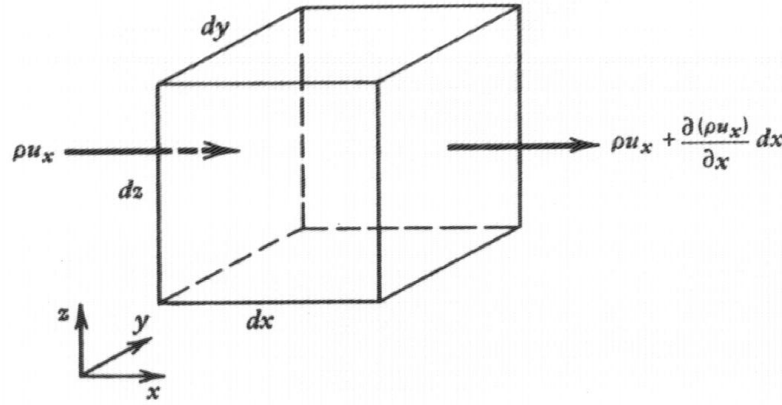
Η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυμάτων προϋποθέτει τη διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η **πίεση** p , η **ταχύτητα** των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\vec{u}$ (διανυσματικό μέγεθος) και η **πυκνότητα** ρ , που είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου, $p = p(\vec{x}, t)$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ όπου με $\vec{x}$ συμβολίζουμε τις χωρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου στο νερό, θα παράγουμε την ακουστική εξίσωση μόνο για ρευστά ακουστικά μέσα.

Σημειώνουμε ότι τα ακουστικά κύματα είναι *διαμήκη* (*longitudinal*). Διαμήκη κύματα ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσής τους είναι παράλληλη στη διεύθυνση της ταλάντωσης των σωματιδίων που αποτελούν το μέσο διάδοσης. Διαμήκη κύματα (και επομένως ακουστικά κύματα) διαδίδονται τόσο στα στερεά όσο και στα υγρά και στα αέρια σώματα. Τα διαμήκη κύματα καθώς και τα διατμητικά (εγκάρσια) κύματα που θα τα συναντήσουμε αργότερα στη μελέτη των κυμάτων που διαδίδονται στον πυθμένα της θάλασσας αποτελούν τα δύο βασικά είδη κυμάτων.

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατ' αρχήν στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια θα περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις όπου και θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις. Η ακουστική εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των συμπίεστων ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Παρατηρώντας ότι έχουμε τρεις ανεξάρτητες ποσότητες των οποίων ζητούμε τον υπολογισμό, μπορεί κανείς να διατυπώσει την απαίτηση για την εφαρμογή τριών ανεξαρτήτων μεταξύ τους εξισώσεων που θα μας δώσουν τη δυνατότητα να διατυπώσουμε ισάριθμες εξισώσεις ανά μία για κάθε μία από τις ανωτέρω ποσότητες.

Οι τρεις εξισώσεις που θα επεξεργαστούμε είναι:

- Η εξίσωση της συνέχειας
- Η εξίσωση του Euler και
- Η καταστατική εξίσωση



Σχήμα 2.2 Στοιχειώδης όγκος ρευστού για την εφαρμογή των νόμων συνέχειας και Euler.

Στην ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θα υποθέσουμε ότι το ρευστό είναι ομογενές, ισότροπο και δεν υπάρχουν μηχανισμοί που να δημιουργούν συνεκτικότητα (viscosity) ή μεταφορά θερμότητας. Επίσης θα υποθέσουμε αμελώντας την επίδραση της βαρύτητας, ότι οι τιμές ισορροπίας της πίεσης και της πυκνότητας τις οποίες θα ορίσουμε στη συνέχεια, είναι σταθερές σε όλο τον όγκο του ρευστού. Τέλος δεν θα θεωρήσουμε εξωτερική εισαγωγή ενέργειας στο σύστημα (ακουστική πηγή), για την οποία θα κάνουμε την υπόθεση ότι βρίσκεται εκτός του χωρίου στο οποίο θα υπολογίσουμε τις μεταβολές των ακουστικών μεγεθών.

2.3.1 Η εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε έναν όγκο ρευστού $dV = dx dy dz$ όπως στο Σχήμα 2.2 που είναι σταθερός στο χώρο και μέσω του οποίου διέρχεται το ρευστό. Ο ρυθμός ροής του υγρού διαμέσου του όγκου αυτού, πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης ή μείωσης της μάζας του ρευστού στον όγκο.

Η καθαρή ροή του ρευστού κατά τον άξονα των x είναι:

$$\{\rho u_x - [\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx]\} dy dz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (2.3.1)$$

όπου u_x είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x .

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε τις εξισώσεις για τους υπόλοιπους άξονες και αθροίζοντας οδηγούμεθα στην ακόλουθη έκφραση για την καθαρή ροή διαμέσου του όγκου dV :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (2.3.2)$$

Η καθαρή ροή διαμέσου του όγκου ισοδυναμεί με την μεταβολή της μάζας του όγκου στη μονάδα του χρόνου που είναι $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$.

Εξισώνοντας τους ανωτέρω όρους παίρνουμε:

$$-[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

που καλείται εξίσωση συνέχειας.

Όπως είναι διατυπωμένη η ανωτέρω εξίσωση είναι μη γραμμική μια και στον πρώτο όρο εμφανίζεται το γινόμενο της πυκνότητας επί την ταχύτητα που είναι και οι δύο άγνωστες συναρτήσεις. Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να εφαρμοστεί μία διαδικασία γραμμικοποίησης που θα μας οδηγήσει στην γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση που είναι γνωστή απλά ως «ακουστική εξίσωση».

2.3.2 Η εξίσωση του Euler

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχειώδη όγκο ρευστού $dV = dx dy dz$ που όμως κινείται με αυτό. Η επιτάχυνση της στοιχειώδους μάζας του ρευστού που περιέχεται στο όγκο είναι $\vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}(x, y, z, t)$ και σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton συνδέεται με την δύναμη $d\vec{f}$ που ενεργεί στη μάζα, μέσω της σχέσης:

$$d\vec{f} = \vec{a} dm \quad (2.3.4)$$

Εάν αμελήσουμε την συνεκτικότητα, η καθαρή δύναμη που επενεργεί στο στοιχειώδη όγκο κατά τη διεύθυνση x , οφείλεται στην καθαρή πίεση που επενεργεί στην πλευρά $dy dz$ και είναι:

$$df_x = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (2.3.5)$$

και στις τρεις διαστάσεις:

$$d\vec{f} = -\nabla p dV \quad (2.3.6)$$

Η επιτάχυνση σύμφωνα με τον ορισμό της είναι:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \quad (2.3.7)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor την ταχύτητα και κρατώντας όρους πρώτης τάξης παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) = \\ &\vec{u}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

με τις παραγώγους να υπολογίζονται στο (x, y, z, t) , οπότε η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z \quad (2.3.9)$$

που γράφεται:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης, (σχέση 2.3.4) και τις σχέσεις 2.3.6 και 2.3.10 παίρνουμε μία σχέση ανάμεσα στην πίεση, την πυκνότητα και την ταχύτητα του μέσου:

$$-\nabla p = \rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right\} \quad (2.3.11)$$

Η εξίσωση αυτή γνωστή ως Εξίσωση Euler είναι και πάλι μη γραμμική.

2.3.3 Η καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση είναι χαρακτηριστική του μέσου στο οποίο διαδίδεται η κυματική διαταραχή και συσχετίζει τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας. Θεωρώντας αδιαβατικές μεταβολές στο ρευστό, η καταστατική εξίσωση δεν περιλαμβάνει όρο που να σχετίζεται με την εντροπία και εκφράζεται μέσω της γενικής σχέσης:

$$p = g(\rho) \quad (2.3.12)$$

Η μορφή της συνάρτησης g εξαρτάται από το υλικό μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διάδοση και μέσω αυτής όπως θα δούμε διαφοροποιείται η ακουστική διάδοση ανάλογα με το είδος του ρευστού.

2.3.4 Η γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση

Στη φύση, η μεταβολή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που προέρχεται από μια ηχητική πηγή δημιουργεί μικρές μεταβολές των παραμέτρων του ακουστικού μέσου. Έτσι με αφετηρία τις τιμές των παραμέτρων στο μέσον όταν δεν υπάρχει ακουστική διαταραχή, μπορούμε να γράψουμε τις αντίστοιχες ποσότητες ως αθροίσματα τιμών ισορροπίας και μικρών μεταβολών:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t) \\
p &= p_0(\vec{x}, t) + \varepsilon p_1(\vec{x}, t) \\
\vec{u} &= \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{x}, t)
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

όπου η παράμετρος ε χαρακτηρίζει τις μικρές μεταβολές. Ο δείκτης 0 χαρακτηρίζει τις τιμές στο ακουστικό αδιατάρακτο μέσον, ενώ ο δείκτης 1 χαρακτηρίζει τις μεταβολές λόγω της ακουστικής διέγερσης.

Αντικαθιστώντας τις αναπαραστάσεις 2.3.13 στην εξίσωση συνέχειας 2.3.4 παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(\vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1)\} = 0 \tag{2.3.14}$$

Εξισώνοντας όρους ίδιας δύναμης του ε παίρνουμε:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_0\} = 0 \tag{2.3.15}$$

Εάν υποθέσουμε αδιατάρακτο ρευστό σε ισορροπία ($\vec{u}_0 = 0$), παίρνουμε και $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ οπότε η πυκνότητα ισορροπίας δεν εξαρτάται από το χρόνο ($\rho_0 = \rho(\vec{x})$).

Με την ίδια υπόθεση, εξισώνουμε τους όρους πρώτης τάξης ως προς ε παίρνουμε :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_1\} = 0 \tag{2.3.16}$$

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε για την εξίσωση του Euler:

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \tag{2.3.17}$$

όπου έχουμε επίσης αμελήσει όρους δεύτερης τάξης ως προς ε και βέβαια έχοντας επαναλάβει την υπόθεση για μηδενική ταχύτητα ισορροπίας ($\vec{u}_0 = 0$).

Όσον αφορά στην καταστατική εξίσωση μπορούμε εύκολα, αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από την τιμή ισορροπίας (δείκτης 0) και αμελώντας όρους δεύτερης τάξης και άνω, να καταλήξουμε στη σχέση :

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1 \tag{2.3.18}$$

Οι εξισώσεις 2.3.16-2.3.18 είναι αρκετές για να μας οδηγήσουν στην ακουστική εξίσωση.

Παίρνοντας την απόκλιση των δύο όρων της Euler έχουμε:

$$-\nabla^2 p_1 = \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) \quad (2.3.19)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) = 0 \quad (2.3.20)$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις παίρνουμε :

$$-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \quad (2.3.21)$$

Από την καταστατική εξίσωση παίρνουμε:

$$\rho_1 = p_1 \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0} \quad (2.3.22)$$

Ορίζουμε $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \equiv c^2$ και αντικαθιστώντας την πυκνότητα διαταραχής ρ_1 από την 2.3.22 στην 2.3.21 καταλήγουμε στη σχέση :

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.3.23)$$

Παρατηρούμε ότι οδηγηθήκαμε σε μια κυματική εξίσωση. Ο συντελεστής c που ορίστηκε ανωτέρω είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τον συναντήσαμε ήδη στην φαινομενολογική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οδηγηθήκαμε σ' αυτόν μέσω της καταστατικής εξίσωσης και γι αυτό θεωρούμε ότι η σχέση 2.3.22 οδηγεί στον «θερμοδυναμικό ορισμό» της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Αντίστοιχα μπορούμε να οδηγηθούμε σε εξισώσεις ως προς την ταχύτητα ή την πυκνότητα που είναι και αυτές κυματικής μορφής.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην εξίσωση 2.3.23 δεν υπάρχει κάποιος όρος που να μας δίδει πληροφορία για την πηγή ενέργειας (ακουστική πηγή). Αυτό συμβαίνει γιατί στην διατύπωση της εξίσωσης δεν λάβαμε υπ' όψιν μας είσοδο ενέργειας στο σύστημα. Απλά θεωρήσαμε ότι στο πεδίο ορισμού του προβλήματος, υπάρχει μια διαταραχή της πίεσης που έχει προκύψει με μη συγκεκριμένο τρόπο. Φυσικά η πλήρης κυματική θεωρία ως προς τη διάδοση του ήχου σε οποιοδήποτε μέσο περιλαμβάνει και την πληροφορία για την πηγή. Η πηγή μπορεί να εισαχθεί στη διαφορική εξίσωση 2.3.23 με τη μορφή ενός όρου διέγερσης.

Για λόγους πληρότητας και μόνο θα παραθέσουμε στη συνέχεια την γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση, η οποία θα προέκυπτε (βλ. Allan Boyles) εάν

θεωρούσαμε είσοδο ενέργειας στο σύστημα που εκφράζεται μέσω της έντασης της πηγής (source strength) Q_1 , και επί πλέον εάν δίναμε τη δυνατότητα μεταβολής της πυκνότητας ισορροπίας ρ_0 συναρτήσει των χωρικών μεταβλητών.

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_0 \cdot \Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q_1}{\partial t} \quad (2.3.24)$$

Είναι φανερό ότι όταν η πυκνότητα ισορροπίας θεωρηθεί σταθερή, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και η μόνη διαφορά που έχουμε με τη σχέση 2.3.23 είναι η προσθήκη του όρου διέγερσης.

Δεν θα μας απασχολήσει όμως εδώ η πλήρης κυματική θεωρία που αποτελεί αντικείμενο άλλου μαθήματος³.

Με βάση την εξίσωση 2.3.23, συμπεραίνουμε ότι μία μικρή διαταραχή της δυναμικής κατάστασης ενός μέσου, οδηγεί στην παραγωγή ενός κύματος που διαδίδεται στο μέσον με ταχύτητα c . Με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει, η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται εν γένει από τις χωρικές μεταβλητές $\vec{x}$.

Η κυματική εξίσωση 2.3.23 έχει προέλθει από την γραμμικοποίηση των εξισώσεων των ρευστών (παράλειψη όρων τάξης υψηλότερης του ε^1) και καλείται **γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση**. Η υπόθεση ωστόσο για μικρές μεταβολές των παραμέτρων της κινηματικής κατάστασης του ρευστού στην οποία στηρίζεται δεν απέχει από την πραγματικότητα και εκφράζει την φύση των ακουστικών διαταραχών. Την εξίσωση 2.3.23 θα την αναφέρομε στη συνέχεια ως «ακουστική εξίσωση».

Να πούμε ακόμη ότι η διατύπωση ενός προβλήματος κυματικής διάδοσης στο θαλάσσιο περιβάλλον περιλαμβάνει εκτός από την βασική εξίσωση και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για τη συμπεριφορά της άγνωστης συνάρτησης στα σύνορα, που στην περίπτωση μας είναι η επιφάνεια της θάλασσας και οι διεπιφάνειες του πυθμένα, ενώ απαιτείται ακόμη η γνώση της επ' άπειρον συμπεριφοράς της λύσης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι εκτείνεται μέχρι εκεί. Αναλυτική παρουσίαση του προβλήματος της κυματικής διάδοσης στη θάλασσα γίνεται επίσης στο μάθημα “Κυματική Διάδοση”.

Στη συνέχεια θα δούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης χωρίς ειδική αναφορά σε σύνορα και άρα σε συνοριακές συνθήκες ενός «καλώς τεθειμένου» προβλήματος κυματικής διάδοσης⁴

³ Η σχετική θεωρία αποτελεί Τμήμα του Μαθήματος «Κυματική Διάδοση».

⁴ «Καλώς τεθειμένο πρόβλημα» είναι ένα πρόβλημα το οποίο με βάση τη διατύπωση του διαθέτει μοναδική λύση.

2.4 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης

2.4.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου

Μια τεχνική για τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπό ορισμένες συνθήκες είναι η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών. Με βάση τη μέθοδο αυτή μια μερική διαφορική εξίσωση για μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα συνήθων διαφορικών εξισώσεων κάθε μια από τις οποίες ορίζεται για μια συνάρτηση που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (συναρτήσεις που μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη). Ο χωρισμός μεταβλητών δεν είναι βέβαια δυνατός σε κάθε περίπτωση. Ειδικά για την κυματική εξίσωση ο χωρισμός είναι δυνατός σε 11 συστήματα συντεταγμένων (βλ. Morse and Feshbach “Methods of Theoretical Physics”) και μόνον εάν οι διεπιφάνειες του προβλήματος συμπίπτουν με μία επιφάνεια συντεταγμένων των ως άνω 11 συστημάτων, Επιπλέον ο όρος $1/c^2$ της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι είτε άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, ή να είναι ο ίδιος συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι ανωτέρω όροι πληρούνται και θα οδηγηθούμε σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα μας δώσουν τη λύση απλών σχετικά προβλημάτων που αναφέρονται στη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχήν να απομονώσουμε την χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε ότι η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t) \quad (2.4.1)$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό p για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης ($p(\vec{x}) \equiv \bar{p}(\vec{x})$) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ολική πίεση του μέσου όπως εκφράζεται από την εξίσωση 2.3.13. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c θα θεωρηθεί όπως έχουμε ήδη σημειώσει συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών $c = c(\vec{x})$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 2.4.1 στην ακουστική εξίσωση 2.3.23 και να πάρουμε:

$$T \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} p \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.2)$$

ή

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.3)$$

Μια και ο αριστερός όρος της 2.4.3 είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών και ο δεξιός όρος συνάρτηση μόνο του χρόνου, για να ισχύει πάντοτε η εξίσωση, θα πρέπει κάθε όρος να ισούται με μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2.4.4)$$

όπου το αρνητικό σημείο αλλά και η ίδια η μορφή της σταθεράς ω^2 έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθηματικοί χειρισμοί αφ' ενός αλλά και η φυσική ερμηνεία αφ' ετέρου. Έτσι, στην 2.4.4 αναγνωρίζει κανείς στην σταθερά ω την *κυκλική συχνότητα* του κύματος που συναντήσαμε και στα επιφανειακά κύματα βαρύτητας και θυμίζουμε τη σχέση που συνδέει κυκλική συχνότητα με συχνότητα εκφρασμένη σε Hz, που είναι $\omega = 2\pi f$.

Από την 2.4.4 παίρνουμε δύο εξισώσεις που ισχύουν παράλληλα:

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.4.5)$$

και

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2.4.6)$$

Από τις εξισώσεις αυτές η πρώτη είναι γνωστή ως *εξίσωση Helmholtz* και διέπει την χωρική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης για *μονοχρωματική πηγή*⁵ ενώ η λύση της δεύτερης δίνει την χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης.

Η 2.4.6 έχει ως γνωστόν δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις :

$$T = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (2.4.7)$$

με A, B σταθερές.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της λύσης θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά A είναι 1, και θα δεχθούμε από τις δύο πιθανές λύσεις εκείνη που αντιστοιχεί σε αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη. Αυτό σημαίνει ότι θα μελετήσουμε πηγές οι οποίες εκπέμπουν ενέργεια στο περιβάλλον με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$. Καταλήγουμε δηλαδή στο να θεωρήσουμε λύσεις της μορφής

$$T = e^{-i\omega t} \quad (2.4.8)$$

Κατόπιν αυτών, η λύση μας για την πίεση διαταραχής γράφεται

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (2.4.9)$$

2.4.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης

Ο λόγος που αναφερόμαστε στην ειδική μορφή της λύσης για τη συνάρτηση p είναι ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε έκφραση για επίπεδα κύματα που θα αποτελέσουν την πρώτη ειδική μορφή κυμάτων που θα μας απασχολήσει στη μελέτη μας. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα αναφερόμαστε είναι το καρτεσιανό, για το οποίο ο

τελεστής ∇^2 παίρνει τη μορφή $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

⁵ Μονοχρωματική (monochromatic) χαρακτηρίζεται μία πηγή όταν εκπέμπει σε συγκεκριμένη συχνότητα. Χαρακτηρίζεται και ως «αρμονική».

Θεωρώντας ακόμη ότι

$$p(\vec{x}) = p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z) \quad (2.4.10)$$

και αντικαθιστώντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση Helmholtz (2.4.5) παίρνομε μετά από στοιχειώδεις πράξεις :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.4.11)$$

Για να ισχύει η εξίσωση αυτή θα πρέπει κάθε όρος που περιέχει τις συνιστώσες της πίεσης σε κάθε διάσταση να είναι σταθερός αφού η μεταβολή της συνιστώσας της πίεσης με την αντίστοιχη διάσταση δεν επηρεάζει την άλλη. Εάν συμβολίσουμε με $-k_i^2$ $i = x, y, z$ την τιμή κάθε όρου παίρνομε :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \quad (2.4.12\alpha)$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} = -k_y^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \quad (2.4.12\beta)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \quad (2.4.12\gamma)$$

Προσέξτε το συμβολισμό της παραγώγου που για κάθε συνιστώσα της πίεσης είναι συνήθης και όχι μερική παράγωγος με δεδομένο ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις p_i , $i = x, y, z$ είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής⁶.

Τέλος από τη σχέση 2.4.11 βλέπομε ότι για τις σταθερές k_i^2 $i = x, y, z$ ισχύει η σχέση:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.4.13)$$

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας οριακές ή αρχικές συνθήκες στην μέχρι τώρα ανάλυση. Επομένως δεν μιλάμε ακόμη για λύση ενός προβλήματος αλλά λύσεις μιας εξίσωσης. Κατόπιν αυτών, προχωράμε στην διατύπωση λύσεων για τις εξισώσεις 2.4.12(α-γ) που για k_i ($i = x, y, z$) $\neq 0$ είναι:

⁶ Το αρνητικό πρόσημο στη σταθερά χωρισμού δικαιολογείται από τη διανυσματική θεώρηση του αριθμού κύματος που θα δούμε στη συνέχεια.

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad (2.4.14\alpha)$$

$$p_y(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \quad (2.4.14\beta)$$

$$p_z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (2.4.14\gamma)$$

όπου οι συντελεστές θα υπολογιστούν εφ' όσον έχει οριστεί πλήρως το πρόβλημα και σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες καθώς και τη συνθήκη της πηγής για την οποία δεν έχουμε ακόμη αναφέρει κάτι.

Στο παράρτημα Δ των σημειώσεων, παρουσιάζεται σύντομα η εναλλακτική θεώρηση των λύσεων των εξισώσεων 2.4.12 μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η ισοδυναμία των λύσεων με εκθετικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι προφανής μέσω των εκφράσεων των εκθετικών συναρτήσεων που προκύπτουν από τον ορισμό τους.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η φυσική της κυματικής διάδοσης, θα υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η ακουστική πίεση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή, δηλαδή έχουμε διάδοση προς μία μόνο διεύθυνση. Θεωρώντας x την διεύθυνση αυτή η ακουστική πίεση γράφεται :

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{-i\omega t} = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)} \quad (2.4.15)$$

Από τους δύο τελευταίους όρους, και με δεδομένη την χρονική εξάρτηση της πίεσης που έχουμε επιλέξει, ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει κύμα οδεύον προς τα αυξανόμενα (θετικά) x και ο δεύτερος, κύμα οδεύον προς τα μειούμενα (αρνητικά) x . Οι συντελεστές A_1 και A_2 αντιπροσωπεύουν το πλάτος του κύματος και το όρισμα στην εκθετική συνάρτηση την *φάση*.

Σημειώνουμε επίσης ότι η πραγματική πίεση είναι το πραγματικό μέρος της ανωτέρω σχέσης. Σε πολλά εγχειρίδια για να γίνει διάκριση ανάμεσα στη μιγαδική και την πραγματική πίεση, η μιγαδική πίεση αναφέρεται με έντονα γράμματα.

Επίσης επισημαίνουμε ότι σε άλλα εγχειρίδια, εκλαμβάνεται ως χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης η συνάρτηση $T = e^{i\omega t}$. Με αυτή την παραδοχή, η οποία δεν αλλάζει επί της ουσίας τη θεώρηση που κάνουμε, ο πρώτος όρος στην τελική μορφή της 2.4.15 θα έδινε τα κύματα που οδεύουν προς τα μειούμενα x και ο δεύτερος προς τα αυξανόμενα x , με το πρόσημο της χρονικής εξάρτησης να είναι θετικό. Θα επανέλθουμε σε αυτή τη θεώρηση μόνο στο Παράρτημα Α που αναφέρεται στη σύνθεση των πηγών, ενώ στο υπόλοιπο του κειμένου διατηρούμε την αρχική μας παραδοχή.

Για τις ανάγκες της θεωρίας μας θα πρέπει να ορίσουμε τα **επίπεδα κύματα**. Ένα κύμα λέγεται επίπεδο, εάν το κύμα οδεύει στον χώρο και η επιφάνεια σταθερής φάσης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι επίπεδο. Παρατηρώντας την λύση της ακουστικής εξίσωσης όπως δίδεται από την 2.4.15, βλέπομε ότι για t σταθερό, η φάση του κύματος είναι σταθερή όταν x είναι σταθερό.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια (στον χώρο) που ορίζεται από την εξίσωση ($x=c$) είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στον άξονα των x στο σημείο c του άξονα. Συνεπώς η λύση 2.4.15 αντιπροσωπεύει ένα επίπεδο κύμα.

Θεωρώντας το πρόβλημά μας στις τρεις διαστάσεις και κρατώντας τον πρώτο από τους δύο όρους της λύσης μας για κάθε μία από τις συναρτήσεις p_x, p_y, p_z , που σημαίνει ότι δεχόμαστε διάδοση προς μία κατεύθυνση, βλέπουμε ότι η ακουστική πίεση παίρνει τη μορφή :

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.4.16)$$

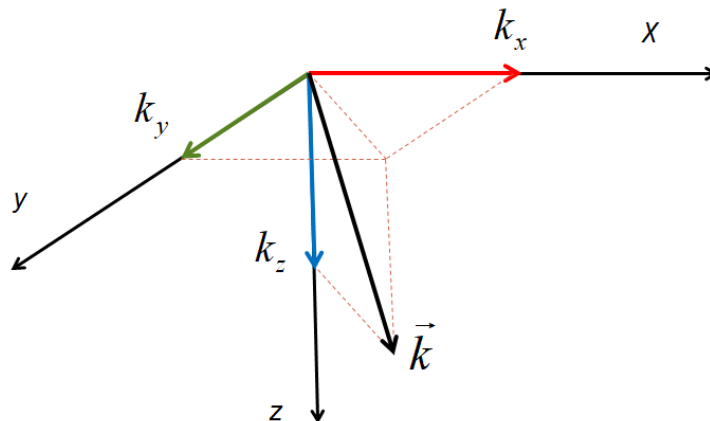
και σε διανυσματική μορφή ως προς τον εκθέτη του e ,

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.4.17)$$

όπου $D = A_1 B_1 C_1$ και όπου έχουμε θεωρήσει ένα νέο διάνυσμα $\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$.

Εάν ανατρέξουμε στην εξίσωση 2.4.13, με την ως άνω θεώρηση βλέπουμε ότι το πηλίκο $\frac{\omega}{c}$ αντιπροσωπεύει το μέτρο του διανύσματος $\vec{k}$, με k_i $i = x, y, z$ να είναι τα μέτρα των συνιστωσών του. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{k}$ είναι ο **αριθμός κύματος** που τον συναντήσαμε και στο πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεων στο οποίο αναφερθήκαμε στα κύματα βαρύτητας.

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε τη διανυσματική απεικόνιση του αριθμού κύματος με τις αντίστοιχες συνιστώσες στις τρεις διαστάσεις. Παρατηρούμε τέλος ότι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι επίπεδα κάθετα στο διάνυσμα $\vec{k}$. Επομένως η 2.4.17 αντιπροσωπεύει επίσης λύση για επίπεδα κύματα, με το διάνυσμα του αριθμού κύματος να είναι κάθετο στην επιφάνεια σταθερής φάσης (μέτωπο κύματος). Η παραπάνω παρατήρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της γεωμετρίας της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα αλλά και για τις περιπτώσεις ανάκλασης και διάδοσης του ήχου στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 2.3 Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος.

2.5 Διάδοση σε ελαστικούς χώρους ακουστικών και διατμητικών κυμάτων.

2.5.1 Δυναμικό μετατόπισης

Υπενθυμίζουμε ότι το ακουστικό κύμα είναι διάμηκες κύμα που διαδίδεται σε κάθε συμπιεστό μέσον. Όταν ο χώρος θεωρηθεί ρευστός (π.χ. νερό ή αέρας) τα ακουστικά είναι τα μόνα μηχανικά κύματα που μπορεί να διαδοθούν. Σε ελαστικούς εν γένει χώρους όπως χαρακτηρίζονται οι χώροι με αρκετή ακαμψία υποστηρίζεται και η διάδοση διατμητικών κυμάτων για τα οποία θα γίνει μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια. Δεδομένου όμως ότι όπως θα δούμε, οι δύο ομάδες κυμάτων συνυπάρχουν στα ιζήματα του πυθμένα, η μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο ομάδων κυματισμών θα πρέπει να μελετηθεί τουλάχιστον στον βαθμό που επηρεάζει την ακουστική διάδοση στο νερό που ενδιαφέρει βασικά την ακουστική ωκεανογραφία. Η μελέτη βοηθιέται ουσιαστικά με την εισαγωγή ενός μεγέθους που μπορεί να περιγράψει τις βασικές συναρτήσεις που σχετίζονται με τα δύο είδη κυμάτων σε ενιαία μορφή. Το μέγεθος αυτό είναι το «δυναμικό» που θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να μελετήσουμε το πρόβλημα της διάδοσης κυμάτων σε ελαστικούς εν γένει χώρους.

Γνωρίζουμε ότι η περιστροφή της κλίσης μια συνάρτησης μηδενίζεται.

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (2.5.1)$$

Από την εξίσωση 2.3.17 παρατηρούμε ότι εάν πάρουμε την περιστροφή των δύο μερών, θα πρέπει να ισχύει και $\nabla \times \vec{u} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί μέσω της κλίσης ενός βαθμωτού μεγέθους Φ_u που ονομάζεται «δυναμικό» (potential).

$$\vec{u} = \nabla \Phi_u \quad (2.5.2)$$

Η ανωτέρω σχέση ισχύει γενικά για την ταχύτητα ροής σε «αστροβίλα» ρευστά, και ειδικά στην περίπτωση της ακουστικής διαταραχής, θεωρούμε ότι η διαταραχή δεν δημιουργεί στροβιλισμό στο ρευστό.

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι και τα υπόλοιπα διανυσματικά μεγέθη που σχετίζονται με την ταχύτητα μπορούν να εκφραστούν από αντίστοιχα δυναμικά. Επιλέγουμε στη συνέχεια την μετατόπιση (displacement) $\vec{d}$ των στοιχειωδών σωματιδίων ενός μέσου που όπως θα φανεί στη συνέχεια είναι ένα μέγεθος που μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην μελέτη της αλληλεπίδρασης των κυμάτων.

Ορίζουμε λοιπόν μία νέα βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\vec{x}, t)$ που καλείται **δυναμικό μετατόπισης** (displacement potential) και της οποίας η κλίση μας δίδει την μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων του συμπιεστού μέσου.

$$\vec{d} = \nabla \Phi \quad (2.5.3)$$

Θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε στη συνέχεια την ακουστική πίεση με το δυναμικό μετατόπισης. Η μεταβολή της πίεσης του στοιχειώδους σωματιδίου ενός ρευστού μέσου, συνδέεται με την προκαλούμενη μετατόπιση μέσω του νόμου του Hooke:

$$p_1 = -K \nabla \cdot \vec{d} \quad (2.5.4)$$

όπου K είναι το **μέτρο διόγκωσης** (*bulk modulus*). Περισσότερα για το μέτρο διόγκωσης και άλλα μεγέθη της μηχανικής που μας ενδιαφέρουν στο μάθημα αναφέρονται στο Παράρτημα Β. Στη συνέχεια θα παραλείψουμε τα ορίσματα σε όλες τις συναρτήσεις που υπεισέρχονται στην ανάλυση για ευκολία στην ανάπτυξη των σχέσεων. Εκτός και αν αναφέρεται αλλού, η ταχύτητα διάδοσης είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών, ενώ οι κυματικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου.

Από τις 2.5.3 και 2.5.4 παίρνουμε αμέσως

$$p_1 = -K \nabla^2 \Phi \quad (2.5.5)$$

Το δυναμικό μετατόπισης Φ υπόκειται επίσης στην κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.6)$$

ενώ για το μέτρο διόγκωσης K ισχύει (δείτε Παράρτημα Β),

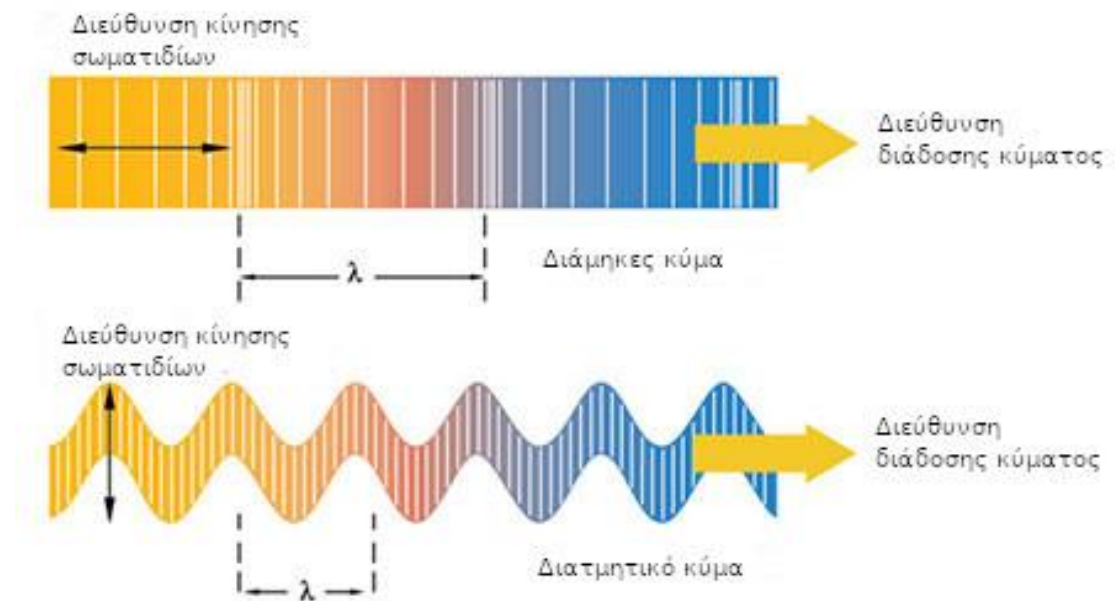
$$K = \rho c^2 \quad (2.5.7)$$

και η ακουστική πίεση μπορεί επίσης να γραφεί στην μορφή

$$p_1 = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.8)$$

2.5.2 Διατμητικά κύματα

Όταν το μέσον διάδοσης της ακουστικής διαταραχής διαθέτει επαρκή ακαμψία, μπορεί να δεχθεί τη διάδοση και **διατμητικών κυμάτων** (*shear waves*). Η διαφορά των ακουστικών από τα διατμητικά κύματα είναι ότι τα μεν πρώτα αφορούν διαμήκεις μετατοπίσεις των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου διάδοσης σε σχέση με την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ενώ τα διατμητικά αφορούν εγκάρσιες μετατοπίσεις. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζονται και ως *εγκάρσια κύματα*. Με άλλα λόγια, στα διαμήκη κύματα (P-waves στην σεισμολογία και την γεωλογία) η διεύθυνση μετατόπισης των στοιχειωδών σωματιδίων είναι κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ενώ στα διατμητικά κύματα (S-waves), η διεύθυνση μετατόπισης είναι κάθετη σε εκείνη της διεύθυνσης διάδοσης (Σχήμα 2.4). Το νερό όπως και άλλα υλικά δεν διαθέτουν επαρκή ακαμψία και συνεπώς δεν υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει στην μεγάλη πλειοψηφία των θαλασσινών ιζημάτων τα οποία είναι αρκετά «άκαμπτα», και υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων.



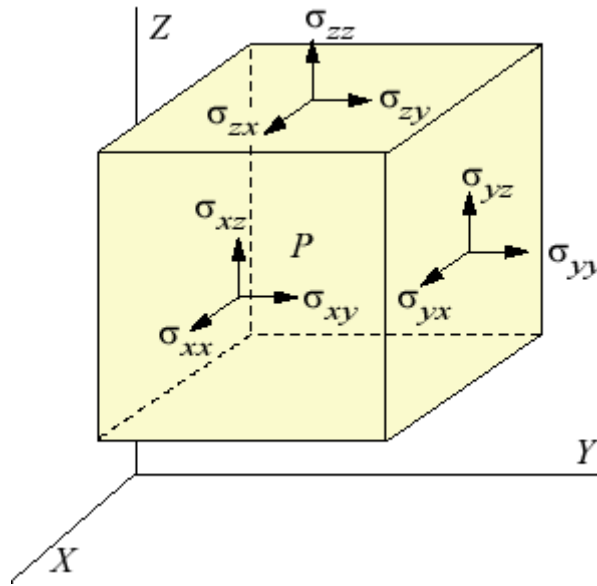
Σχήμα 2.4 Σχηματική παράσταση διαμήκων και διατμητικών κυμάτων

Επομένως, σε κάθε ωκεανογραφικό σύστημα θα πρέπει να περιλάβουμε και τη μελέτη των διατμητικών κυμάτων καθώς και την αλληλεπίδρασή τους με τα ακουστικά κύματα.

Δεν πρόκειται να επεκταθούμε στη σχετική ανάπτυξη μια και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον μας είναι στην διάδοση του ήχου στο νερό και παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σε εγχειρίδια μηχανικής που περιγράφουν το φαινόμενο της διάδοσης διατμητικών κυμάτων με πληρότητα (π.χ. Ewing et al. 1957).

Στα πλαίσια του μαθήματός μας όμως θα δούμε το πώς η διέγερση διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα επηρεάζει την διάδοση του ήχου στο νερό και συνεπώς είναι απαραίτητη μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία διάδοσης και των διατμητικών κυμάτων.

Θεωρούμε ένα ομογενές και ισότροπο στερεό σώμα το οποίο υπόκειται σε μικρές μεταβολές της δυναμικής του κατάστασης. Οι μεταβολές αυτές δημιουργούν δυνάμεις οι οποίες εκφράζονται μέσω των τάσεων οι οποίες με την σειρά τους αναφέρονται στις επιφάνειες στις οποίες αναπτύσσονται αλλά και στην διεύθυνσή τους. Οι τάσεις συμβολίζονται ως σ_{ij} (ή τ_{ij}) με τον πρώτο δείκτη να αναφέρεται στην επιφάνεια ανάπτυξης της τάσης και τον δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνση εφαρμογής της τάσης. Αντίστοιχα οι συνιστώσες της μετατόπισης θα συμβολίζονται με d_i με τον δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνσή τους (x, y, z) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 2.5 Οι τάσεις σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Στη μηχανική εισάγεται και η έννοια της παραμόρφωσης ε_{ij} (strain) ως εξής :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.9)$$

Αξίζει επίσης να επισημανθεί το γεγονός ότι ο πίνακας των παραμορφώσεων είναι συμμετρικός ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$).

Η σχέση τάσης και παραμόρφωσης από το Νόμο του Hooke για ισοτροπικά υλικά είναι :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5.10)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, λ και μ είναι οι σταθερές Lamè της μηχανικής (βλ. Παράρτημα Β) και το σύμβολο ε_{kk} υποδηλώνει άθροισμα ως προς όλους τους δείκτες. Δηλαδή στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων :

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.5.11)$$

Το ανωτέρω άθροισμα καλείται **ανοιγμένη διόγκωση (dilatation)** και σε πολλά βιβλία συμβολίζεται ως Θ .

Αντικαθιστώντας την παραμόρφωση από την 2.5.9 στην 2.5.10 παίρνουμε :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.12)$$

Αξιοποιώντας τον δεύτερο Νόμο του Newton και αντίστοιχες υποθέσεις με αυτές που είδαμε στην παραγωγή της ακουστικής εξίσωσης παίρνουμε τη σχέση τάσης-μετατόπισης :

$$\rho \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.5.13)$$

όπου αναγνωρίζουμε το αντίστοιχο της εξίσωσης 2.3.17 για την συνιστώσα i της μετατόπισης.

Αντικαθιστώντας την τάση από την 2.5.12 στην 2.5.13, θεωρώντας και πάλι μικρές μεταβολές και εφαρμόζοντας ιδιότητες των τελεστών παίρνουμε :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d}) \quad (2.5.14)$$

Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζεται και ως **σεισμική εξίσωση** (seismic equation) και διέπει και τα δύο είδη κυμάτων που διαδίδονται στο ελαστικό μέσον.

Παίρνοντας την περιστροφή των δύο μερών και εφαρμόζοντας ξανά ιδιότητες των τελεστών καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{d}) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{d})}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.15)$$

$$\text{όπου } c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι κυματική για τη διανυσματική συνάρτηση $\nabla \times \vec{d}$ και διέπει την διάδοση των διατμητικών κυμάτων σε ένα ελαστικό μέσο. Επίσης το μέγεθος c_s^2 αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων την οποία θα θεωρήσουμε σταθερά.

Παίρνοντας τώρα την απόκλιση της 2.5.14, με αντίστοιχο τρόπο καταλήγουμε σε μία άλλη κυματική εξίσωση της μορφής :

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{d}) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{d})}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.16)$$

όπου ο όρος

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (2.5.17)$$

αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων που επίσης θα θεωρηθεί σταθερά. Η συνάρτηση $\nabla \cdot \vec{d}$ είναι βαθμωτή.

Παρατηρούμε ότι για $\mu=0$, οδηγούμεθα στην περίπτωση ενός υλικού που υποστηρίζει τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μόνο και η ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων c_p

είναι στην πραγματικότητα η ταχύτητα διάδοσης των ακουστικών κυμάτων που είδαμε προηγουμένως.

Στο ελαστικό μέσον θα θεωρήσουμε ένα διανυσματικό *ελαστικό δυναμικό* Ψ (*shear wave potential*) (συνιστώσες Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z).

Η μετατόπιση του στοιχειώδους σωματιδίου του ελαστικού μέσου είναι τώρα:

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (2.5.18)$$

ενώ σημειώνουμε ότι για το ελαστικό δυναμικό ισχύει ότι η απόκλιση του είναι 0

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \quad (2.5.19)$$

Το ελαστικό δυναμικό υπακούει επίσης στην κυματική εξίσωση με την ταχύτητα του κύματος να είναι εκείνη των διατμητικών κυμάτων.

Συνοψίζοντας, σε ένα ελαστικό μέσο, οι δύο κυματικές εξισώσεις που ισχύουν ταυτόχρονα είναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.20)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (2.5.21)$$

Για τις λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων ισχύει ό,τι έχουμε πει και για την ακουστική εξίσωση. Με χωρισμό μεταβλητών καταλήγουμε σε χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{\pm i\omega t}$ (ίδια και για τους δύο κυματισμούς) ενώ για την χωρική εξάρτηση διατυπώνονται αντίστοιχα δύο εξισώσεις Helmholtz της μορφής :

$$\nabla^2 \Phi_\omega + \left(\frac{\omega}{c_p} \right)^2 \Phi_\omega = 0 \quad (2.5.22)$$

$$\nabla^2 \Psi_\omega + \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 \Psi_\omega = 0 \quad (2.5.23)$$

όπου $\Phi_\omega(\vec{x})$ και $\Psi_\omega(\vec{x})$ είναι αντίστοιχα οι χωρικές εξαρτήσεις των αντίστοιχων δυναμικών. Στις εξισώσεις 2.5.22 και 2.5.23 αναγνωρίζουμε και τους αριθμούς κύματος για τα διαμήκη και διατμητικά κύματα αντίστοιχα :

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad \text{και} \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (2.5.24)$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων είναι μεγαλύτερη από εκείνη των διατμητικών κυμάτων (Παράρτημα Γ), το μέτρο του αριθμού κύματος των

διαμήκων κυμάτων είναι μικρότερο από εκείνο των διατμητικών κυμάτων για το ίδιο μέσο διάδοσης.

Θα προσθέσουμε εδώ ως παρατήρηση ότι η απόκλιση της μετατόπισης που εισάγεται στην εξίσωση 2.5.16 είναι

$$\nabla \cdot \vec{d} = \nabla \cdot (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) = \nabla^2 \Phi \quad (2.5.25)$$

λόγω της 2.5.19, ενώ η περιστροφή της μετατόπισης που εισάγεται στην εξίσωση 2.5.15 είναι

$$\nabla \times \vec{d} = \nabla \times (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) = \nabla \times \nabla \times \Psi \quad (2.5.26)$$

αφού η περιστροφή της κλίσης μια βαθμωτής συνάρτησης είναι 0. Περαιτέρω αξιοποίηση των ιδιοτήτων των τελεστών και της 2.5.19 μας οδηγεί στη σχέση :

$$\nabla \times \vec{d} = -\nabla^2 \Psi \quad (2.5.27)$$

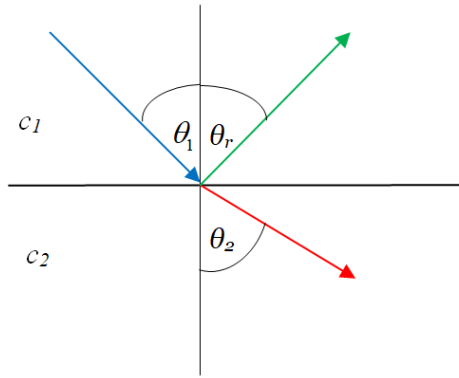
2.6 Διάθλαση ακουστικών κυμάτων και Νόμος του Snell.

Θα μελετήσουμε τώρα την πρόσπτωση ενός ακουστικού κύματος στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο υλικά διαφορετικής σύστασης που χαρακτηρίζονται από διαφορετική ταχύτητα διάδοσης του ήχου c_1 και c_2 αντίστοιχα. Θα θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια αυτή είναι επίπεδη και οριζόντια. Στην ανάπτυξη της παραγράφου αυτής θα θεωρήσουμε ότι η ακουστική πηγή βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την διεπιφάνεια, ώστε το μέτωπο κύματος να μπορεί να περιγραφεί πολύ καλά ως επίπεδο.

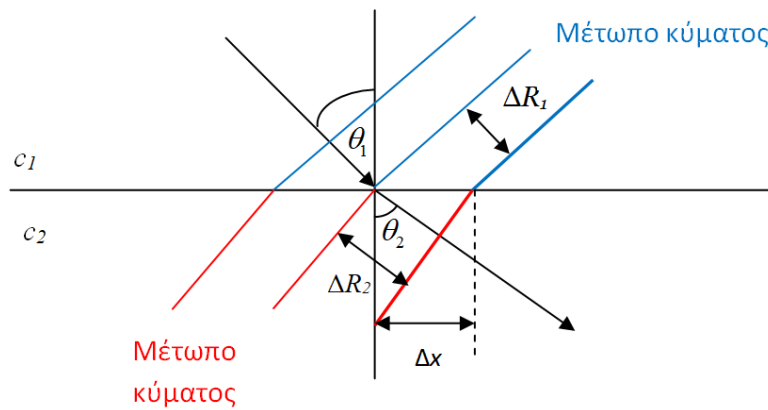
Θα μελετήσουμε το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις και συγκεκριμένα στο επίπεδο x,z . Το μέτωπο κύματος θα είναι επίπεδο, κάθετο στο επίπεδο της μελέτης, με το ίχνος του να είναι ευθεία στο επίπεδο x,z .

Η πρόσπτωση του κύματος γίνεται υπό γωνία θ_1 ως προς τον κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 2.6α), όπου η γωνία ορίζεται από την φέρουσα του αριθμού κύματος και τον κάθετο στην διεπιφάνεια άξονα. Σύμφωνα με την φυσική, η πρόσπτωση ενός κύματος σε επιφάνεια που χωρίζει δύο υλικά διαφορετικής σύνθεσης επιφέρει μία ανάκλαση του κύματος, οπότε μέρος της κυματικής ενέργειας επιστρέφει στο μέσο από το οποίο προσέπεσε ενώ μέρος της ενέργειας διαδίδεται στο δεύτερο μέσον. Η ανάκλαση γίνεται υπό γωνία θ_r ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και η διάδοση υπό γωνία θ_2 .

Για να υπάρξει διάδοση θα πρέπει να ικανοποιούνται και ορισμένες άλλες συνθήκες όπως θα δούμε στη συνέχεια, ενώ θα πρέπει να τονισθεί ότι υπάρχει η δυνατότητα διάδοσης και άλλου είδους κυματισμού (π.χ. διατμητικών κυμάτων εάν το δεύτερο μέσον θεωρηθεί ελαστικό).



Σχήμα 2.6α Ανάκλαση και διάθλαση επίπεδων κυμάτων στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων διαφορετικής ταχύτητας διάδοσης



Σχήμα 2.6β Διάθλαση επίπεδων κυμάτων. Γεωμετρική θεώρηση για την απόδειξη του Νόμου του Snell.

Προς το παρόν πάντως θα επικεντρωθούμε στα ακουστικά κύματα και θα μελετήσουμε την ανάκλαση και τη διάθλαση ενός ακουστικού κύματος σε μία οριζόντια διεπιφάνεια που χωρίζει δύο ακουστικά μέσα.

Αναφερόμαστε στο σχήμα 2.6β. Μετά την πρόπτωση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων του επίπεδου κύματος που προέρχεται από το μέσον 1 και τη διάδοσή του στο μέσον 2, το μέτωπο κύματος θα πάρει διαφορετική κλίση και η νέα γωνία διάδοσης θ_2 που ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο μέτωπο κύματος με την κάθετο στην διεπιφάνεια, θα σχετίζεται με την πρώτη, μέσω της σχέσης :

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (2.6.1)$$

Αυτός είναι ο νόμος του Snell που η απόδειξή του μπορεί να γίνει με απλά γεωμετρικά μέσα, εάν ληφθούν υπόψιν οι απλοποιητικές παραδοχές που αναφέραμε προηγουμένως.

Έτσι, θεωρώντας διάδοση του μετώπου στο μέσον 1 κατά ΔR_1 μετά την πρόσπτωση και στο μέσον 2 κατά ΔR_2 κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt , η καθοριστική φυσική συνθήκη είναι ότι ταυτόχρονα πάνω στην διεπιφάνεια τα δύο μέτωπα πρέπει να βρίσκονται σε επαφή έχοντας διανύσει την κοινή απόσταση Δx . Από απλή γεωμετρία παίρνομε τότε :

$$\Delta R_1 = \Delta x \sin \theta_1 \quad \text{και} \quad \Delta R_2 = \Delta x \sin \theta_2 \quad (2.6.2)$$

Συνεπώς

$$\Delta R_1 / \sin \theta_1 = \Delta R_2 / \sin \theta_2 \quad (2.6.3)$$

Καθώς οι ταχύτητες είναι

$$c_1 = \frac{\Delta R_1}{\Delta t} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{\Delta R_2}{\Delta t} \quad (2.6.4)$$

αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για ΔR_1 και ΔR_2 στην 2.6.3, παίρνομε τη σχέση που διέπει το Νόμο του Snell.

Η απόδειξη του ότι η γωνία πρόσπτωσης θ_1 είναι ίδια με την γωνία ανάκλασης θ_r γίνεται με τον ίδιο τρόπο και την παρατήρηση ότι η ταχύτητα διάδοσης στο πρώτο μέσο είναι σταθερή.

Θα πρέπει να διευκρινίσουμε στο σημείο αυτό ότι εάν υπάρχει διάδοση στο δεύτερο μέσο και κυματισμού άλλου είδους, το μέτωπο του δεύτερου αυτού κυματισμού θα διαδοθεί με διαφορετική γωνία εάν η ταχύτητα διάδοσης του κυματισμού αυτού είναι διαφορετική από εκείνη του πρώτου μέσου. Με εντελώς αντίστοιχη θεώρηση με αυτή που αναπτύξαμε στο εδάφιο αυτό, είναι προφανές ότι εάν η γωνία διάδοσης του δεύτερου κυματισμού είναι θ_{s2} (το σύμβολο s αντιστοιχεί στα διατμητικά κύματα που είναι ο δεύτερος κυματικός μηχανισμός που θα μας απασχολήσει), και η ταχύτητα διάδοσης c_{s2} , θα ισχύει

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_{s2}}{c_{s2}} \quad (2.6.5)$$

2.7 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο στρώματα διαφορετικής σύνθεσης. Το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις

2.7.1 Εισαγωγή

Συνεχίζοντας να μελετάμε το πρόβλημα της πρόσπτωσης ακουστικών κυμάτων στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο μέσα, θα διατηρήσουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και θα θεωρήσουμε διάδοση σε δύο διαστάσεις. Τα ακουστικά κύματα θα θεωρηθούν επίπεδα, που αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση ενός πραγματικού φαινομένου ακουστικής διάδοσης όταν η ακουστική πηγή θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη διεπιφάνεια.

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της ανάκλασης της ακουστικής ενέργειας σε μία διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο μέσα από τα οποία το πρώτο διαδίδει μόνο ακουστικά κύματα, ενώ το δεύτερο είναι ελαστικό επιτρέποντας τη διάδοση τόσο ακουστικών (διαμήκων) όσο και διατμητικών κυμάτων. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε με τον όρο «ρευστό» στο μέσον στο οποίο διαδίδονται μόνο ακουστικά κύματα και με τον όρο «ελαστικό» στο μέσον που υποστηρίζει τόσο διαμήκη όσο και διατμητικά κύματα.

Είναι συνηθισμένο σε ένα πρόβλημα αυτής της γεωμετρίας να θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους x και z με τον άξονα των z να τείνει προς τα κάτω (δείτε το σχήμα 2.6). Όλα τα μεγέθη του προβλήματος θεωρούνται ανεξάρτητα από το y , ενώ η διεπιφάνεια που χωρίζει τα δύο ακουστικά μέσα νοείται κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με το ίχνος της στο επίπεδο του σχήματος να αντιστοιχεί στον άξονα των x . Έτσι ο άξονας των z είναι κάθετος στην διεπιφάνεια.

Σε ένα πρόβλημα όπως αυτό, τα μεγέθη που υπεισέρχονται από την μεριά του ρευστού, είναι η πίεση και η μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων, ενώ για την περίπτωση του ελαστικού μέσου, έχουμε τον τανυστή⁷ των τάσεων και την μετατόπιση. Ο τανυστής των τάσεων αποτελείται από τις συνιστώσες της τάσης που αναπτύσσεται σε ένα στερεό και οι οποίες συμβολίζονται ως σ_{ij} όπως έχουμε δει, με τον πρώτο δείκτη να αναφέρεται στην επιφάνεια στην οποία επενεργεί η τάση και τον δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Καθώς αναφερόμαστε σε πρόβλημα δύο διαστάσεων με τη διεπιφάνεια να είναι κάθετη στον άξονα των z , τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν θα αφορούν το εν λόγω επίπεδο και συνεπώς με βάση τον ορισμό των τάσεων ο πρώτος δείκτης στο σχετικό συμβολισμό θα είναι πάντα ο z ενώ ο δεύτερος θα αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Από τις τάσεις που αναπτύσσονται στο ελαστικό μέσο, στο πρόβλημά μας υπεισέρχεται όπως θα δούμε η συνιστώσα που είναι κάθετη στη διεπιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα και συμβολίζεται με σ_{zz} και η συνιστώσα που βρίσκεται στο επίπεδο της διεπιφάνειας και συμβολίζεται με σ_{zx} . Σημειώνουμε τέλος ότι στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα του δυναμικού της μετατόπισης των διατμητικών κυμάτων είναι κάθετο στο επίπεδο xz και έχει μέτρο Ψ (άσκηση), οπότε αρκεί μόνο η συγκεκριμένη συνιστώσα για να μελετηθεί το πρόβλημα της διάδοσης των κυμάτων στο δεύτερο μέσον.

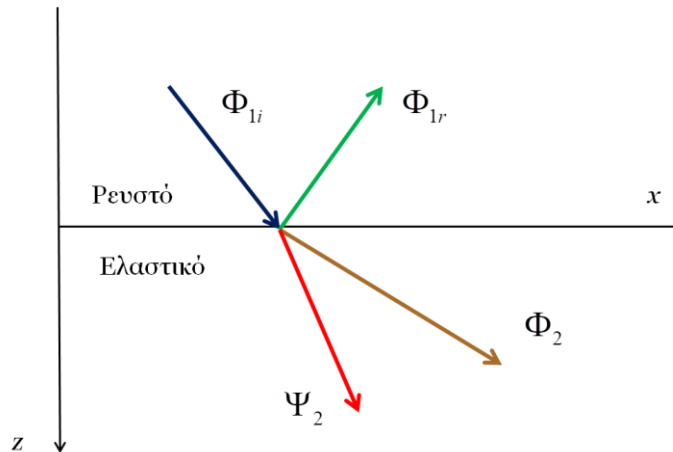
Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυναμικά των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων με τις συνιστώσες των τάσεων από την 2.5.10 είναι :

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.1)$$

και

$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.2)$$

⁷ Τανυστής είναι ένα γενικευμένο διάνυσμα τάξης n ανάλογα με τις συνιστώσες του. Ένα βαθμωτό μέγεθος είναι ειδική περίπτωση τανυστή τάξης 0 ενώ ένα διανυσματικό φυσικό μέγεθος στον χώρο έχει τανυστική τάξη 1 καθώς απαιτεί 3^1 αριθμούς για τον προσδιορισμό του.



Σχήμα 2.7 Δυναμικά κυμάτων που προσπίπτουν, ανακλώνται και διαδίδονται στην επιφάνεια που χωρίζει ένα ρευστό από ένα ελαστικό μέσον.

2.7.2 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον.

Θεωρούμε λοιπόν μία ακουστική διαταραχή που διαδίδεται με την μορφή επίπεδου κύματος και προσπίπτει στην επιφάνεια που χωρίζει τα δύο μέσα από την πλευρά του ρευστού (Σχήμα 2.7). Τα δύο μέσα θεωρούνται ημιάπειρα σε έκταση κατά τη διεύθυνση z , ενώ υπενθυμίζουμε ότι όλα τα μεγέθη δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή y . Τμήμα της ακουστικής ενέργειας θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει στο ρευστό και τμήμα θα διαδοθεί στο ελαστικό μέσον αλλά με τη μορφή δύο κυμάτων διαφορετικού είδους: Διάμηκες και διατμητικό.

Τα κύματα θα παραμείνουν επίπεδα (στο σχήμα βλέπουμε την διεύθυνση διάδοσης των αντίστοιχων κυμάτων) και θα χαρακτηρίζονται από τα εξής δυναμικά:

- Δυναμικό μετατόπισης ακουστικού κύματος στο ρευστό μέσον $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$
- Δυναμικό μετατόπισης ακουστικού κύματος στο ελαστικό μέσον Φ_2
- Ελαστικό δυναμικό διατμητικού κύματος στο ελαστικό μέσον Ψ_2 (μία συνιστώσα λόγω επίπεδης γεωμετρίας).

Προσέξτε ότι το δυναμικό μετατόπισης στο πρώτο μέσον το γράψαμε ως άθροισμα δύο δυναμικών τα οποία, με βάση το σχήμα 2.7, μας παραπέμπουν στο προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα.

Υπενθυμίζουμε ότι τα ως άνω δυναμικά ικανοποιούν τις αντίστοιχες κυματικές εξισώσεις με τις ταχύτητες διάδοσης των κυμάτων που αντιστοιχούν στο κάθε μέσον μετάδοσης.

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \quad (2.7.3)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.4)$$

$$\nabla^2 \Psi_2 = \frac{1}{c_{s2}^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.5)$$

όπου οι ταχύτητες διάδοσης του ακουστικού και του διατμητικού κύματος στο δεύτερο μέρος συμβολίζονται με c_{p2} και c_{s2} αντίστοιχα.

Κάνοντας την παρατήρηση ότι έχουμε διάδοση μόνο προς τα θετικά x ,⁸ οι λύσεις των ως άνω κυματικών εξισώσεων θα είναι αντίστοιχα :

$$\Phi_1 = A_1 e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} + A_2 e^{i(k_{x1}x - k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.6)$$

$$\Phi_2 = B_1 e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} + B_2 e^{i(k_{x2}x - k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.7)$$

$$\Psi_2 = C_1 e^{i(k_{x2}x + k_{sz2}z - \omega t)} + C_2 e^{i(k_{x2}x - ik_{sz2}z - \omega t)} \quad (2.7.8)$$

όπου βέβαια έχουμε θεωρήσει χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$.

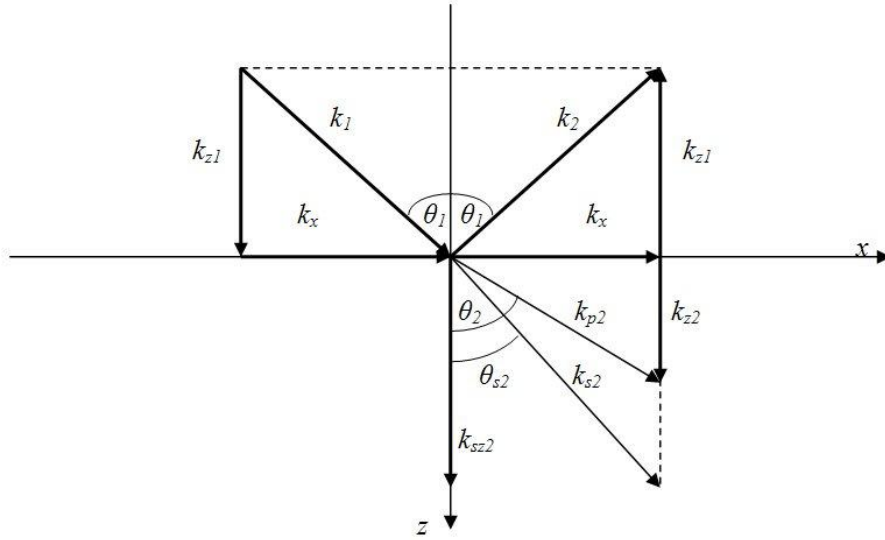
Οι ανωτέρω εκφράσεις παραπέμπουν σε λύσεις που αντιπροσωπεύουν κύματα που διαδίδονται τόσο προς τα θετικά (αυξανόμενα) – πρώτος όρος, όσο και προς τα αρνητικά (μειούμενα) – δεύτερος όρος, z . Οι συνιστώσες του αριθμού κύματος που εμφανίζονται στις ανωτέρω σχέσεις υποδηλώνονται με το δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στο αντίστοιχο μέσον διάδοσης.

Επομένως, στην 2.7.6 αναγνωρίζουμε τον πρώτο όρο ως Φ_{1r} και τον δεύτερο ως Φ_{1r} . Επίσης παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν κύματα που να οδεύουν προς τα αρνητικά z στο δεύτερο μέσον. Έτσι οι συντελεστές B_2 και C_2 στις 2.7.7 και 2.7.8 πρέπει να είναι 0.

Απλοποιούμε στη συνέχεια τους υπολογισμούς μας θεωρώντας ότι το κύμα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με μοναδιαίο πλάτος ($A_1=1$).

Έτσι, αντικαθιστώντας τους συντελεστές των λύσεων των δυναμικών που δίδονται από τις εκφράσεις 2.7.6-2.7.8 με σύμβολα που παραπέμπουν στους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων στα δύο μέσα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, παίρνομαι τις παρακάτω εκφράσεις :

⁸ Η τεκμηρίωση των σχέσεων 2.7.6-2.7.8 αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη



Σχήμα 2.8 Οι αριθμοί κύματος στο πρόβλημα της ανάκλασης επίπεδων ακουστικών κυμάτων από επιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον. Θεωρούμε ότι $C_{s2} < C_{p2}$

$$\Phi_{1i} = e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.9)$$

$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_{x1}x - k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.10)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.11)$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(k_{x2}x + k_{zs2}z - \omega t)} \quad (2.7.12)$$

Ο συντελεστής R_{12} είναι ο **συντελεστής ανάκλασης** (reflection coefficient) του ήχου στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο ρευστό και το ελαστικό μέσον ενώ οι συντελεστές T_p και T_s είναι αντίστοιχα οι **συντελεστές διάδοση**⁹ (transmission coefficients) των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων στο δεύτερο μέσον.

Με δεδομένο ότι το μέτρο της εκθετικής συνάρτησης είναι μονάδα, και ότι ο προσπίπτων κυματισμός έχει πλάτος 1, αντιλαμβάνεται κανείς ότι οι συντελεστές εκφράζουν το ποσοστό της ακουστικής ενέργειας που ανακλάται στο πρώτο η διαδίδεται στο δεύτερο μέσον αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός των συντελεστών θα γίνει στη συνέχεια όταν εφαρμοστούν οι φυσικές συνθήκες που διέπουν τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στη διεπιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα.

Στο σχήμα 2.8 βλέπουμε τους αριθμούς κύματος που υπεισέρχονται στο πρόβλημά μας με τη διανυσματική τους έκφραση. Βλέπουμε και τις γωνίες πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάδοσης, καθώς και τις συνιστώσες των αριθμών κύματος.

⁹ Με αναφορά πάντα στα δυναμικά των κυμάτων.

Σημειώνουμε ότι από το νόμο του Snell, η οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος k_x παραμένει η ίδια και στα δύο ήδη κυματισμών (γιατί ;). Έτσι θα ισχύει $k_{x1} = k_{x2} = k_x$. Η κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος στο πρώτο μέρος θα παραμείνει ως μέτρο η ίδια αλλά θα αλλάξει φορά και διεύθυνση, με τη γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που είδαμε ανωτέρω για τις ταχύτητες διάδοσης ακουστικών και διατμητικών κυμάτων στα δύο μέσα, οι αντίστοιχοι αριθμοί κύματος έχουν μέτρο $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $k_{p2} = \frac{\omega}{c_{p2}}$ και $k_{s2} = \frac{\omega}{c_{s2}}$.

Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές των δυναμικών όταν είναι γνωστά τα κυματικά χαρακτηριστικά στα δύο μέσα και η γωνία πρόσπτωσης στο ρευστό μέσο.

Για το σχετικό υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν ως συνέπεια των φυσικών νόμων και περιορισμών που διέπουν το πρόβλημα. Οι νόμοι αυτοί είναι:

- Δεν υπάρχει υπερβάλλουσα πίεση από την μία ή την άλλη πλευρά της διεπιφάνειας
- Τα δύο μέσα βρίσκονται πάντα σε επαφή

Ως συνέπεια αυτού παίρνουμε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις κάθε είδους στη διεπιφάνεια πρέπει να είναι συνεχείς (πρώτος νόμος), ενώ η κάθετη στην διεπιφάνεια μετατόπιση θα πρέπει να είναι επίσης συνεχής συνάρτηση (δεύτερος νόμος).

Στην περίπτωση του προβλήματος με το ρευστό και το ελαστικό μέσον, οι συνθήκες εξειδικεύονται στη συνέχεια της κάθετης τάσης στη διεπιφάνεια, στο μηδενισμό της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια (δεν υπάρχει διατμητική τάση στο ρευστό) και τέλος στην συνέχεια της κάθετης μετατόπισης.

$$\sigma_{1,zz} = \sigma_{2,zz} \quad (2.7.13)$$

$$\sigma_{2,zx} = 0 \quad (2.7.14)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις, ενθυμούμενοι ότι στο πρώτο μέσον που είναι ρευστό έχουμε διάδοση μόνο ακουστικών κυμάτων, παίρνουμε αντίστοιχα

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.16)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x} \right) = 0 \quad (2.7.17)$$

και

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (2.7.18)$$

όπου $\Phi_1 = \Phi_{li} + \Phi_{lr}$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις στο βάθος $z=0$ και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των δυναμικών από τις σχέσεις 2.7.9-2.7.12, η επίλυση του συστήματος μας δίνει τους άγνωστους συντελεστές. Από αυτούς αναφέρουμε μόνο το συντελεστή ανάκλασης R_{12} που είναι

$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)} \quad (2.7.19)$$

Αξίζει να σχολιάσουμε λίγο τα μεγέθη που υπεισέρχονται στην ανωτέρω σχέση με αναφορά και στο σχήμα 2.8 που φαίνονται οι συνιστώσες των αριθμών κύματος.

Για να έχουμε κυματικό φαινόμενο (διάδοση κυμάτων στις δύο διαστάσεις), θα πρέπει όλες οι συνιστώσες των αριθμών κύματος να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι φανταστικοί, η λύση που προκύπτει δεν αντιπροσωπεύει κύμα. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό εάν αναλογισθεί κανείς ότι οι συνιστώσες του αριθμού κύματος πολλαπλασιαζόμενοι με την χωρική μεταβλητή, συνιστούν το όρισμα της εκθετικής συνάρτησης $e^{i\varphi}$. Έτσι εάν στη έκφραση $u = e^{iax}$ θεωρήσουμε το a , φανταστικό αριθμό ($a = ia_1, a_1 \in R$), θα πάρουμε $u = e^{-a_1x}$ που εκφράζει μία αποσβενύμενη συμπεριφορά χωρίς κυματικό φαινόμενο (για a_1 θετικό) ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει διάδοση του κύματος στην αντίστοιχη διεύθυνση.

Για να έχουμε λοιπόν όλους τους αριθμούς κύματος πραγματικούς θα πρέπει να ισχύει $k_{p2} > k_{z2}, k_{p2} > k_x, k_{s2} > k_{zs2}, k_{s2} > k_x$ ώστε να έχει νόημα η ανάλυση του αριθμού κύματος ως διανυσματικού μεγέθους σε δύο (πραγματικές) συνιστώσες. Αυτό δεν είναι όμως πάντα δυνατό και εξαρτάται από τη σχέση των παραμέτρων των δύο μέσων μεταξύ τους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε πρόσπτωση επίπεδων κυμάτων σε δύο μέσα για τα οποία ισχύει $c_{p2} > c_1$. Από το νόμο του Snell παίρνουμε ότι

$$\sin \theta_2 = \frac{c_{p2}}{c_1} \sin \theta_1 \quad (2.7.20)$$

Παρατηρούμε ότι για κάποιες γωνίες θ_1 , το ημίτονο της γωνίας διάθλασης παίρνει τιμή μεγαλύτερη από τη μονάδα και επομένως η γωνία διάθλασης γίνεται

φανταστική. Αυτό ισοδυναμεί με την κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος να είναι φανταστική. Επομένως δεν υπάρχει διάδοση κατά τον άξονα των z .

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο περισσότερο στην αναφορά μας στο πρόβλημα της ανάκλασης στην επιφάνεια που χωρίζει δύο ρευστά μέσα όπου και θα εισάγουμε την έννοια της «κρίσιμης γωνίας». Στο σημείο αυτό μπορούμε όμως να δούμε τι θα πάρουμε εάν οι κατακόρυφες συνιστώσες και των δύο αριθμών κύματος στο δεύτερο (ελαστικό) μέσον γίνουν φανταστικές ποσότητες. $k_{z2} = ig_2$, $k_{sz2} = iq_2$.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στο συντελεστή ανάκλασης (2.7.13), παίρνουμε την έκφραση του συντελεστή ανάκλασης στην περίπτωση ολικής ανάκλασης από ένα ελαστικό μέσο. Κάνοντας τις σχετικές πράξεις (Άσκηση) διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης γράφεται στην περίπτωση αυτή ως

$$R_{12} = -e^{2in} \quad (2.7.21)$$

όπου

$$n = \text{Arc tan} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\kappa_{z1}}{g_2} \frac{c_{s2}^4}{\omega^4} [-4g_2q_2k_x^2 + (q_2^2 + k_x^2)^2] \right\} \quad (2.7.22)$$

Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό ανάκλασης διαφέρει ως προς το δυναμικό πρόσπτωσης μόνο ως προς την φάση. Το πλάτος του δυναμικού του ανακλώμενου κύματος, που εκφράζει μέσω της αντίστοιχης πίεσης και την ενέργεια που επιστρέφει στο νερό, παραμένει το ίδιο. Με άλλα λόγια, όλη η ενέργεια που προσέπεσε στη διαχωριστική επιφάνεια ανακλάστηκε, αλλά το ακουστικό κύμα υπέστη μια διαφορά φάσης. Συνεπώς δεν υπάρχει κυματική ενέργεια που να διαδίδεται στο ελαστικό μέσον !

2.7.3 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα.

Θα δούμε τώρα την ειδική περίπτωση που το δεύτερο μέσον είναι ρευστό. Η περίπτωση αυτή αποκτά ειδικό ενδιαφέρον στην ακουστική ωκεανογραφία, μια και τα υλικά του βυθού κοντά στις ακτές και στις ρηχές θάλασσες μπορούν να θεωρηθούν ρευστά. Στις περιοχές αυτές η ακουστική ωκεανογραφία έχει πληθώρα εφαρμογών.

Όταν τα δύο μέσα είναι ρευστά, το μόνο δυναμικό που ορίζεται είναι το δυναμικό των διαμήκων κυμάτων Φ . Για το προσπίπτον το ανακλώμενο και το διαθλώμενο κύμα (όλα διαμήκη – ακουστικά) η έκφραση των δυναμικών είναι :

$$\Phi_{1i} = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.23)$$

$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.24)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.25)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια παραμένουν οι ίδιες με αυτές της προηγούμενης περίπτωσης με την απουσία βέβαια της συνθήκης για τα διατμητικά κύματα που εδώ είναι κενή περιεχομένου. Έτσι παίρνουμε

$$\sigma_{1zz} = \sigma_{2zz} \quad (2.7.26)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων που έχουμε δει στις δύο διαστάσεις, παίρνουμε :

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.28)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad (2.7.29)$$

Με αντικατάσταση των δυναμικών στις αντίστοιχες εκφράσεις και έχοντας υπόψιν ότι $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$, παίρνουμε

$$\rho_1 \omega^2 \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} + R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = \rho_2 \omega^2 T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.30)$$

και

$$ik_{z1} \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} - R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = ik_{z2} T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.31)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές στη διεπιφάνεια ($z=0$) και παρατηρώντας ότι έχουμε κοινούς όρους $e^{i(k_x x - \omega t)}$ και στα δύο μέρη, παίρνουμε

$$\rho_1 (1 + R_{12}) = \rho_2 T_p \quad (2.7.32)$$

$$k_{z1} (1 - R_{12}) = k_{z2} T_p \quad (2.7.33)$$

Το γραμμικό σύστημα ως προς τους συντελεστές R_{12}, T_p επιλύεται εύκολα (Άσκηση) και δίδει τα αποτελέσματα

$$R_{12} = \frac{k_{z1} \rho_2 - k_{z2} \rho_1}{k_{z1} \rho_2 + k_{z2} \rho_1} \quad (2.7.34)$$

$$T_p = \frac{2k_{z1} \rho_1}{k_{z1} \rho_2 + k_{z2} \rho_1} \quad (2.7.35)$$

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι οι σχέσεις 2.7.34 και 2.7.35, εκφράζουν τα όρια των αντίστοιχων συντελεστών για την περίπτωση του προβλήματος της ανάκλασης ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον, από τους οποίους έχουμε ήδη παρουσιάσει το συντελεστή ανάκλασης (Σχέση 2.7.19), όταν η ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού κύματος τείνει στο 0 ($c_{s2} \rightarrow 0$).

Επίσης θα πρέπει να προσέξουμε ότι ο συντελεστής διάδοσης στη μορφή που τον δίνει η σχέση 2.7.35 αφορά το συντελεστή που υπεισέρχεται στην έκφραση του δυναμικού μετατόπισης. Στα περισσότερα βιβλία που αφορούν κυματική διάδοση, ο συντελεστής διάδοσης αναφέρεται στο λόγο της πίεσης διάδοσης ως προς την πίεση πρόσπτωσης και έχει διαφορετική έκφραση σε σχέση με αυτό που αναφέρεται στην ανωτέρω σχέση (Άσκηση).

Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το συντελεστή ανάκλασης για να μελετήσουμε και πάλι την περίπτωση της ολικής ανάκλασης.

Εναλλακτική έκφραση του συντελεστή ανάκλασης μέσω των γωνιών ανάκλασης και διάθλασης και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό c_2 για την ταχύτητα διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στο δεύτερο μέσον (αφού δεν υπάρχουν διατμητικά κύματα) παίρνομε με χρήση των σχέσεων

$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1 = \frac{\omega}{c_1} \cos \theta_1 \quad (2.7.36)$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c_2} \cos \theta_2 \quad (2.7.37)$$

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.38)$$

Από το νόμο του Snell έχουμε $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1$ οπότε και $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$

Όπως είχαμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε και στην προηγούμενη περίπτωση, εάν $c_2 < c_1$, η γωνία θ_2 είναι πάντα πραγματική και υπάρχει κυματικό φαινόμενο και στο δεύτερο μέσον. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όταν όλες οι συνιστώσες των αριθμών κύματος είναι πραγματικοί αριθμοί, ο συντελεστής ανάκλασης είναι πραγματικός αριθμός. Όταν όμως $c_2 > c_1$ υπάρχει η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της **κρίσιμης γωνίας** (*critical angle*) που ορίζεται μέσω της σχέσης 2.7.14 :

$$\theta_{cr} = \text{Arc sin } \frac{c_1}{c_2} \quad (2.7.39)$$

Για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της κρίσιμης, η γωνία διάδοσης στο δεύτερο μέσον είναι φανταστική και ο αντίστοιχος κατακόρυφος αριθμός κύματος γράφεται $k_{z2} = i g_2$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης γίνεται :

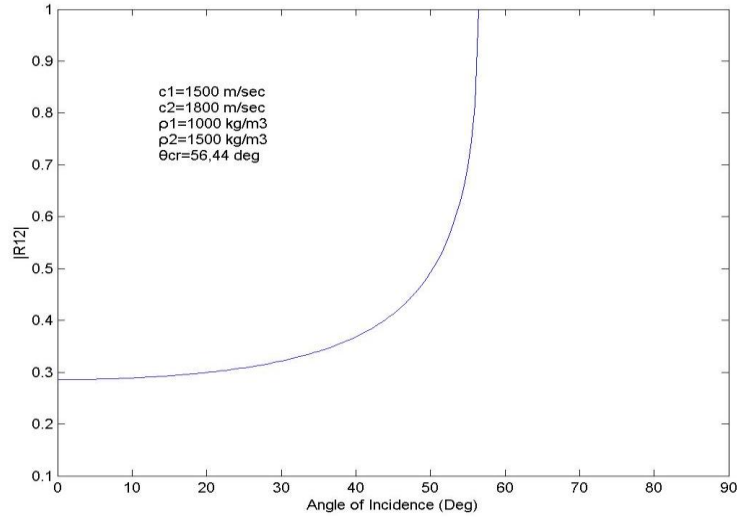
$$R_{12} = \frac{k_{z1} \rho_2 - i g_2 \rho_1}{k_{z1} \rho_2 + i g_2 \rho_1} \quad (2.7.40)$$

Παρατηρώντας ότι ο αριθμητής είναι ο συζυγής του παρανομαστή, ο συντελεστής ανάκλασης είναι μιγαδικός αριθμός που γράφεται ως

$$R_{12} = -e^{2i\chi} \quad (2.7.41)$$

όπου

$$\chi = \text{Arc tan}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{k_{z1}}{g_2}\right) \quad (2.7.42)$$



Σχήμα 2.9 Συντελεστής ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών για τα οποία ισχύει $c_2 > c_1$. Προσέξτε την κρίσιμη γωνία στις 56.44°.

Στο σχήμα 2.9 βλέπουμε ένα διάγραμμα του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης για την περίπτωση δύο ρευστών ακουστικών μέσων, από τα οποία το δεύτερο χαρακτηρίζεται από ταχύτητα διάδοσης μεγαλύτερη από εκείνη του πρώτου μέσου.

Πρόκειται για μία τυπική περίπτωση της ακουστικής ωκεανογραφίας, μια και συνήθως οι ταχύτητες διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στα θαλασσινά ιζήματα είναι μεγαλύτερες από εκείνες του νερού.

Να σημειώσουμε τέλος ότι το γινόμενο $\rho_i c_i$, $i=1,2$ ονομάζεται **χαρακτηριστική ακουστική αντίσταση** (characteristic acoustic impedance) και αποτελεί ιδιότητα ενός ακουστικού υλικού.

2.7.4 Ανάκλαση επίπεδου ηχητικού κύματος από πολυστρωματοποιημένο ρευστό μέσο

Στην πραγματικότητα, ο πυθμένας της θάλασσας δεν είναι ένα ομογενές και ισότροπο υλικό όπως απαιτεί η ανάπτυξη που κάναμε μέχρι τώρα. Αποτελείται από πολλά επάλληλα στρώματα υλικών διαφορετικής σύνθεσης που στην απλούστερη των περιπτώσεων μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι διαχωρίζονται από επιφάνειες που είναι επίπεδες, και παράλληλες μεταξύ τους σε οριζόντια διάταξη. Επί πλέον υποθέτουμε ότι οι παράμετροι των υλικών μεταβάλλονται μόνο με το βάθος z .

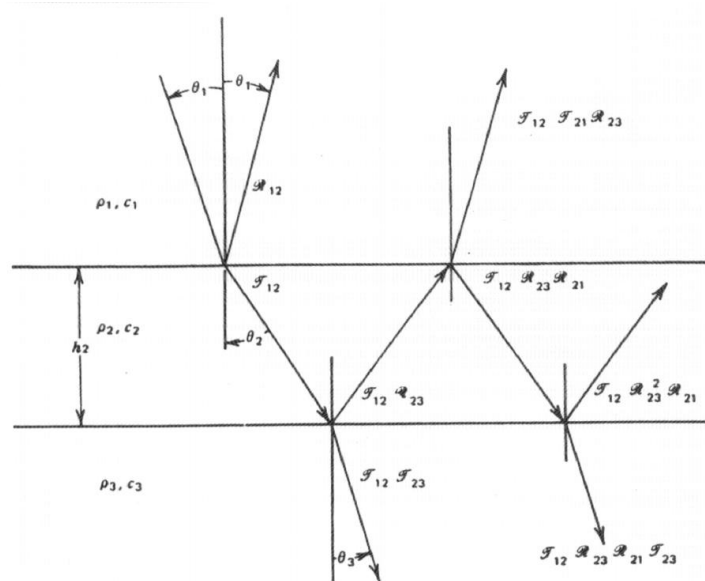
Πυθμένες με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται **οριζόντια στρωματοποιημένοι** (*horizontally stratified*). Στο παρόν κεφάλαιο θα συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι σε κάθε στρώμα η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου δεν μεταβάλλονται. Έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στη μοντελοποίηση του προβλήματος της ανάκλασης του ήχου από πυθμένα αποτελούμενο από πολλά ομογενή και ισότροπα στρώματα, κάνοντας επέκταση των όσων αναπτύξαμε προηγουμένως για την περίπτωση ενός υλικού μόνο. Σε κάθε περίπτωση το τελευταίο στρώμα θα θεωρείται ότι εκτείνεται μέχρι το άπειρο στο z . Για απλούστευση πάντως της ανάπτυξης θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση πολλών επάλληλων **ρευστών** στρωμάτων.

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την περίπτωση του πυθμένα που αποτελείται από ένα στρώμα πεπερασμένου πάχους πάνω από ένα ημίπειρο ημίχωρο. Η επέκταση όπως θα δούμε για πολλαπλά στρώματα είναι άμεση.

Θεωρείστε το σχήμα 2.10, στο οποίο σημειώνονται οι διευθύνσεις διάδοσης ενός ακουστικού κύματος, οι αντίστοιχες γωνίες πρόσπτωσης και οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για κάθε κυματισμό, όπως αυτοί ορίστηκαν από τα προηγούμενα.

Το πρώτο στρώμα στον πυθμένα (δεύτερο κατά αύξοντα αριθμό) έχει πάχος h_2 . Περιγραφικά, το κύμα που διαθλάται στο στρώμα αυτό ανακλάται στην διαχωριστική επιφάνεια του τρίτου στρώματος και μέρος της ενέργειας επιστρέφει για να προσπέσει στη συνέχεια στο όριο ανάμεσα στο δεύτερο και το πρώτο στρώμα (νερό), οπότε τμήμα της ενέργειας επιστρέφει στο νερό και τμήμα της ενέργειας γυρίζει πίσω για να ακολουθηθεί θεωρητικά η διαδικασία αυτή επ' αόριστον.

Το ενδιαφέρον μας συνήθως εστιάζεται στον υπολογισμό του ακουστικού κύματος που επιστρέφει στο νερό και το οποίο αποτελείται από επαλληλία όλων των κυματισμών που γυρίζουν σ' αυτό μετά από τις διαδικασίες ανάκλασης και διάθλασης που περιγράψαμε ανωτέρω.



Σχήμα 2.10 Ανάκλαση και διάθλαση σε πυθμένα αποτελούμενο από δύο ρευστά στρώματα, το δεύτερο ημιάπειρου πάχους

Με αναφορά στους συντελεστές του σχήματος 2.10, μπορούμε να εκφράσουμε άμεσα εκείνους που αναφέρονται ανάμεσα σε δύο μέσα με τις υποθέσεις του προηγούμενου εδαφίου. Παίρνουμε δηλαδή :

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.43)$$

$$R_{23} = \frac{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 - \rho_2 c_2 \cos \theta_3}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.44)$$

$$T_{12} = \frac{2\rho_1 c_2 \cos \theta_1}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.45)$$

$$T_{23} = \frac{2\rho_2 c_3 \cos \theta_2}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.46)$$

Πρέπει να προσέξουμε όμως εδώ, ότι το κύμα που έχει διαδοθεί μέσα στο δεύτερο στρώμα, έχει υποστεί συνολικά μία διαφορά φάσης $2k_2 h_2 \cos \theta_2 = 2k_{z2} h_2$ από τη στιγμή που αποχωρίζεται τη διαχωριστική επιφάνεια πρώτου-δευτέρου στρώματος μέχρι την επιστροφή της σ' αυτή μετά από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο στρώμα (Άσκηση).

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$R_{12} = -R_{21} \quad (2.7.47)$$

$$T_{12} T_{21} = 1 - R_{12}^2 \quad (2.7.48)$$

Αθροίζοντας γεωμετρικά όλες τις συνεισφορές από τις πολλαπλές επιστροφές στο νερό, παρατηρούμε ότι ο συνολικός συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο πρώτο και το σύνολο των δύο στρωμάτων, παίρνει τη μορφή

$$R_{13} = R_{12} + T_{12} T_{21} R_{23} \exp(2i\phi_2) + T_{12} T_{21} R_{23}^2 R_{21} \exp(4i\phi_2) + \dots \quad (2.7.49)$$

όπου $\phi_2 = k_2 h_2 \cos \theta_2$.

Μετά τον πρώτο όρο, οι όροι στην 2.7.42 έχουν τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1} \text{ για } r < 1, \text{ οπότε γράφουμε}$$

$$R_{13} = R_{12} + T_{12}T_{21}R_{23} \exp(2i\phi_2) \sum_{n=0}^{\infty} [R_{23}R_{21} \exp(2i\phi_2)]^n \quad (2.7.50)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.7.47 και 2.7.48, παίρνουμε μία απλή έκφραση για το συντελεστή ανάκλασης που έχει τη μορφή

$$R_{13} = \frac{R_{12} + R_{23} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.51)$$

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να πάρουμε για το κύμα που διαδίδεται στο τελευταίο μέσο, το συντελεστή διάδοσης

$$T_{13} = \frac{T_{12}T_{23} \exp(i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.52)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές έχουν τη μορφή ταλαντευόμενης συνάρτησης που εξαρτάται και από τη συχνότητα μέσω του κατακόρυφου αριθμού κύματος, σε αντίθεση με την περίπτωση του συντελεστή ανάμεσα σε δύο ρευστά στρώματα που είναι ανεξάρτητος της συχνότητας.

Εάν τα στρώματα είναι περισσότερα σε αριθμό, μία διαδικασία αντίστοιχη με αυτή που παρουσιάσαμε μπορεί να εφαρμοστεί με αρχή τα βαθύτερα στρώματα, έτσι ώστε να πάρουμε λύση για το συντελεστή ανάκλασης από το σύνολο των στρωμάτων. Έτσι, εάν έχουμε $n-1$ στρώματα κάτω από το νερό, ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο στρώμα $n-2$ και το τελευταίο στρώμα, θα είναι σε ευθεία αντιστοιχία με τη σχέση 2.7.51

$$R_{(n-2)n} = \frac{R_{(n-2)(n-1)} + R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})}{1 + R_{(n-2)(n-1)}R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})} \quad (2.7.53)$$

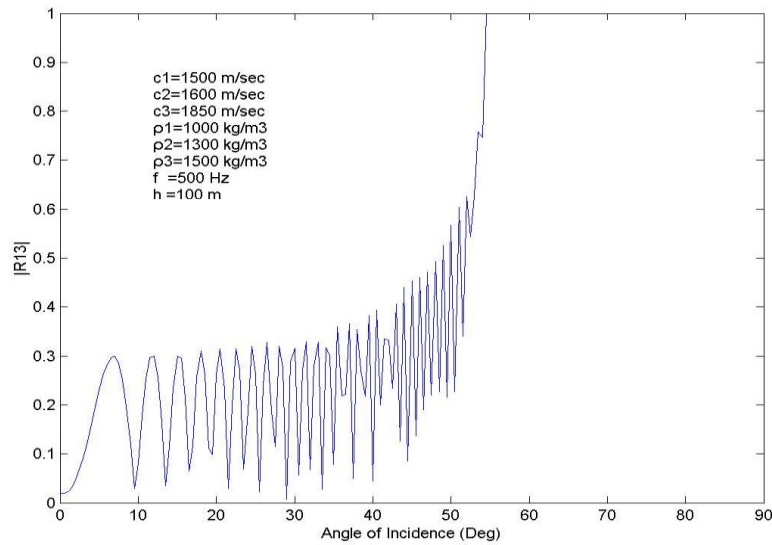
Για το αμέσως προηγούμενο στρώμα θα πάρουμε

$$R_{(n-3)n} = \frac{R_{(n-3)(n-2)} + R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})}{1 + R_{(n-3)(n-2)}R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})} \quad (2.7.54)$$

και τελικά ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο νερό και το σύνολο των στρωμάτων παίρνει τη μορφή

$$R_{1n} = \frac{R_{12} + R_{2n} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{2n} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.55)$$

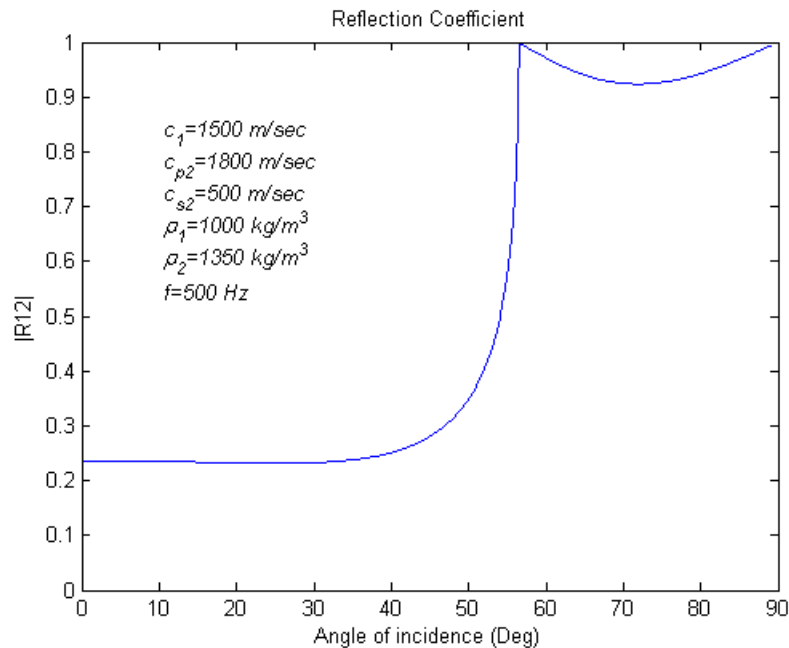
Η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για το πρόβλημά μας θα ισχύσει εφ' όσον σε κάποιο από τα στρώματα του πυθμένα υπάρξει (τοπικά) ολική ανάκλαση. Στην περίπτωση αυτή, οδηγούμεθα και πάλι σε συντελεστή ανάκλασης με μέτρο μονάδα.



Σχήμα 2.11 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια νερού και δύο στρωμάτων επάλληλων ρευστών. Η κρίσιμη γωνία εδώ είναι στις 54.18°

Στο σχήμα 2.11 βλέπουμε το διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή ανάκλασης από ένα πυθμένα που αποτελείται από δύο συνολικά στρώματα. Η κρίσιμη γωνία εμφανίζεται όταν παρουσιαστεί ολική ανάκλαση στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο στρώμα του πυθμένα (γιατί ;).

Στο σχήμα 2.12 βλέπουμε το αντίστοιχο διάγραμμα στην περίπτωση ενός ελαστικού πυθμένα ημιάπειρου πάχους.



Σχήμα 2.11 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια νερού και ελαστικού στρώματος πυθμένα

3. Διάδοση της ηχητικής ενέργειας σε μεγάλες αποστάσεις. Γεωμετρική ακουστική.

Η γεωμετρική ακουστική είναι η μία από τις δύο βασικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα και χρησιμοποιεί την έννοια της ακουστικής ακτίνας για τη μελέτη των προβλημάτων διάδοσης σε ένα ακουστικό μέσο. Η άλλη μέθοδος βασίζεται στην πλήρη κυματική θεωρία και χαρακτηρίζεται ως κυματική ακουστική. Τα προβλήματα ανάκλασης και διάθλασης που εξετάσαμε προηγουμένως εντάσσονται μέσα στα γενικά πλαίσια της γεωμετρικής ακουστικής, σύμφωνα με την οποία παρακολουθείται η ηχητική ενέργεια σημείο προς σημείο καθώς αυτή διαδίδεται σε ένα μέσον και ανακλάται στις διαχωριστικές του επιφάνειες. Είναι μία μέθοδος που συνδυάζει παραστατικότητα και φυσική ερμηνεία σε αντίθεση με την κυματική θεωρία που δεν συνδέει άμεσα το αποτέλεσμα με γεωμετρικές έννοιες. Στα πλαίσια του μαθήματος «Ακουστική Ωκεανογραφία» θα περιοριστούμε στην γεωμετρική ακουστική ενώ στο μάθημα «Κυματική Διάδοση» θα εμβαθύνουμε σε μεθόδους της κυματικής θεώρησης.

3.1 Ηχητικές ακτίνες

Ως ηχητική ακτίνα θα θεωρήσουμε την καμπύλη, σε κάθε σημείο της οποίας ο αριθμός κύματος είναι εφαπτόμενο διάνυσμα. Η ηχητική ακτίνα λοιπόν είναι κάθετη στο μέτωπο κύματος. Η διεύθυνση της ηχητικής ακτίνας ταυτίζεται με τη διεύθυνση του αριθμού κύματος για κάθε μέσον διάδοσης. Όταν ο αριθμός κύματος είναι σταθερός (σταθερή ταχύτητα διάδοσης του ήχου) η ηχητική ακτίνα είναι ευθεία. Όταν όμως η ταχύτητα μεταβάλλεται με την απόσταση, η μεταβολή του μέτρου του αριθμού κύματος σε συνδυασμό με το νόμο του Snell που επιβάλλει σταθερό οριζόντιο αριθμό κύματος, επιβάλουν την αλλαγή στη διεύθυνση του διανύσματος του αριθμού κύματος και επομένως αλλαγή στη διεύθυνση της ηχητικής ακτίνας. Όταν οι μεταβολές του αριθμού κύματος είναι συνεχείς, το αποτέλεσμα για την ηχητική ακτίνα είναι μία ομαλή καμπύλη στο χώρο.

Θα θεωρήσουμε και σε αυτό το κεφάλαιο, όπως κάναμε και στο προηγούμενο, επίπεδα ακουστικά κύματα. Βέβαια θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα επίπεδα κύματα είναι μία απλούστευση της πραγματικής λύσης του προβλήματος ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα. Η λύση της ακουστικής εξίσωσης για ένα δεδομένο πρόβλημα όπως αυτό περιγράφεται από τη γεωμετρία, τις παραμέτρους και τις οριακές συνθήκες, δεν δίδεται με τη μορφή επίπεδων ακουστικών κυμάτων και είναι προφανές ότι θα πρέπει να ανατρέξει κανείς σε περισσότερο σύνθετες λύσεις της ακουστικής εξίσωσης. Η έννοια του επίπεδου κύματος ωστόσο παραμένει χρήσιμη και πολλές φορές γίνεται αναγωγή σ' αυτήν για να μελετηθούν πολύπλοκα προβλήματα ακουστικής διάδοσης με απλούς αλλά ταυτόχρονα εποπτικούς τρόπους και γενικά είναι μια καλή προσέγγιση για κύματα που διαδίδονται σε μεγάλη απόσταση από την πηγή.

Σημειώνουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη θάλασσα μεταβάλλεται κυρίως με το βάθος όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου και λιγότερο με την οριζόντια απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι σε πολλά προβλήματα αρκεί να υπολογίσουμε την διάδοση του ήχου στην θάλασσα όταν τα μεγέθη μεταβάλλονται μόνο με το βάθος (οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο) και όχι και με την απόσταση. Αυτή την απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια ώστε να γίνουν κατανοητές οι

βασικές έννοιες που μας ενδιαφέρουν. Πιο περίπλοκα περιβάλλοντα αντιμετωπίζονται ερευνητικά και δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος μαθήματος.

Σε κάθε περίπτωση η γεωμετρική ακουστική είναι χρήσιμη σε προβλήματα που αναζητούνται λύσεις στο πεδίο του χρόνου καθώς είναι εύκολο να ολοκληρώσει κανείς ποσότητες πάνω στις ακτίνες που θεωρούνται ως οδοί διάδοσης της ηχητικής ενέργειας. Ενεργειακά μεγέθη ολοκληρούμενα πάνω στις ακτίνες δίδουν μια προσεγγιστική λύση για το ακουστικό πεδίο σε κάποιο σημείο του ακουστικού μέσου. Δεν θα επεκταθούμε όμως πολύ σ' αυτό το θέμα. Θα δώσουμε ένα απλό τρόπο υπολογισμού ενός διαγράμματος ακτίνων σε ένα μέσο στο οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα διάδοσης συνεχώς με το βάθος (Σχήμα 3.1) και θα ακολουθήσει μία απλουστευμένη θεώρηση του προβλήματος του υπολογισμού της ακουστικής πίεσης σε δεδομένη θέση στη θάλασσα με χρήση της θεωρίας ακτίνων. Θα θεωρήσουμε όπως κάναμε μέχρι τώρα διάδοση σε δύο διαστάσεις. Σημειώνουμε ότι το διάγραμμα μεταβολής της ταχύτητας διάδοσης του ήχου με το βάθος συνθέτει το «προφίλ» της ταχύτητας.

Ο νόμος του Snell ορίζει ότι σε ένα κυματικό μέσον στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι συνάρτηση μιας χωρικής μεταβλητής (ας πούμε z), το πηλίκο $\frac{\sin \theta(z)}{c(z)}$ παραμένει σταθερό και ίσο με a . Η γωνία θ είναι εκείνη που σχηματίζει ο

αριθμός κύματος λαμβανόμενος ως διάνυσμα με τον άξονα των z . Μέχρι τώρα το νόμο τον είδαμε να εφαρμόζεται μόνο στην διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα. Στην περίπτωση μας η γωνία θ μπορεί να θεωρηθεί ως η σχηματιζόμενη από την ηχητική ακτίνα και τον κατακόρυφο άξονα με δεδομένο ότι σε οποιοδήποτε σημείο της ηχητικής ακτίνας ο αριθμός κύματος είναι εφαπτόμενο διάνυσμα.

Για να παρακολουθήσουμε την διαδρομή μιας ηχητικής ακτίνας με το νόμο του Snell, θα θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες μήκος ds πάνω στην ακτίνα, που διανύθηκε σε χρόνο dt . (Σχήμα 3.2) Με αναφορά στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε χρησιμοποιήσει, παίρνουμε

$$ds = \frac{dz}{\cos \theta} \quad (3.1.1)$$

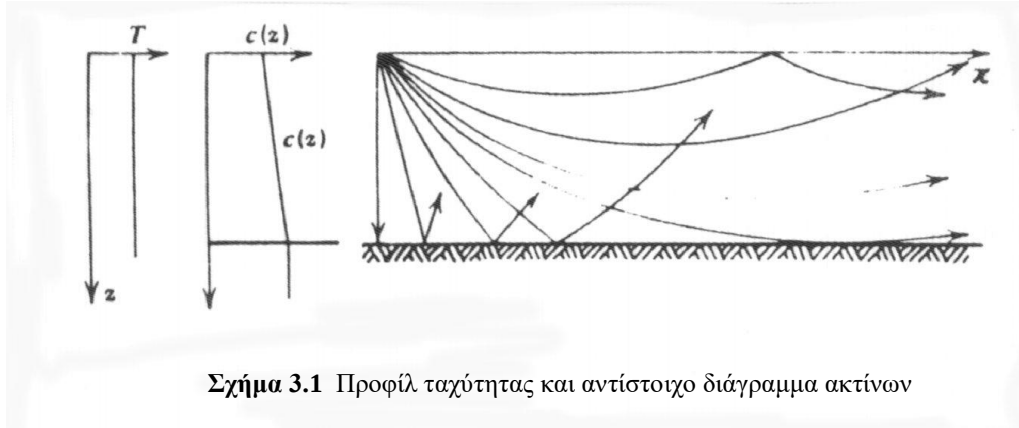
$$dt = \frac{ds}{c(z)} = \frac{dz}{c(z) \cos \theta} \quad (3.1.2)$$

Η οριζόντια απόσταση που διανύθηκε στον ίδιο χρόνο είναι

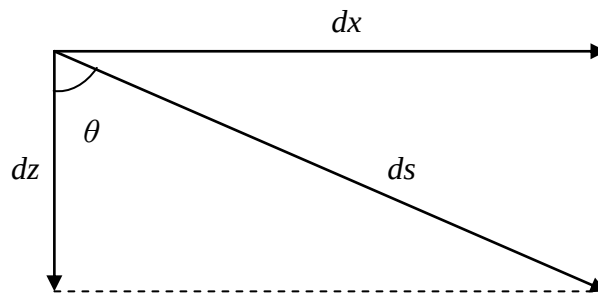
$$dx = \tan \theta dz \quad (3.1.3)$$

Από το νόμο του Snell παίρνουμε

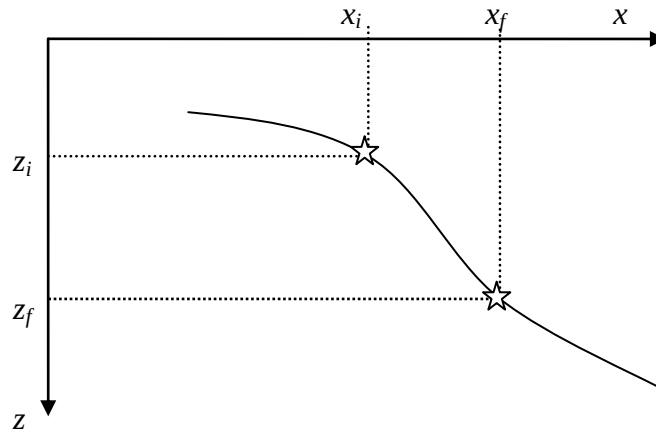
$$\begin{aligned} \sin \theta &= ac(z) \\ \cos \theta &= [1 - a^2 c^2(z)]^{1/2} \\ \tan \theta &= ac(z) / [1 - a^2 c^2(z)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$



Σχήμα 3.1 Προφίλ ταχύτητας και αντίστοιχο διάγραμμα ακτίνων



Σχήμα 3.2 Στοιχειώδες μήκος σε μία ηχητική ακτίνα



Σχήμα 3.3 Γεωμετρία για τον υπολογισμό συντεταγμένων μιας ηχητικής ακτίνας

Ολοκληρώνοντας ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές t_f και t_i , και θεωρώντας ότι οι αντίστοιχες συντεταγμένες κατά τον άξονα των z είναι z_f και z_i παίρνομε για τις αντίστοιχες οριζόντιες συντεταγμένες (Σχήμα 3.3)

$$x_f - x_i = \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{z_i}^{z_f} \frac{ac(z)dz}{[1 - a^2 c^2(z)]^{1/2}} \quad (3.1.5)$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να παρακολουθήσουμε την πορεία μιας ηχητικής ακτίνας. Ξεκινώντας από ένα γνωστό σημείο (x_0, z_0) που συνήθως είναι η θέση της

πηγής, μπορούμε να υπολογίσουμε για δεδομένη γωνία διάδοσης την ηχητική ακτίνα, υπολογίζοντας για κάθε βάθος z την αντίστοιχη οριζόντια απόσταση x που έχει βρεθεί η ακτίνα, για δεδομένη συνάρτηση $c(z)$.

Ο αντίστοιχος χρόνος που έχει περάσει δίδεται από τη σχέση:

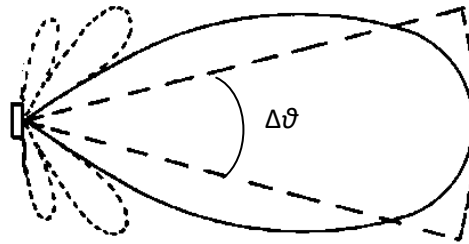
$$t_f - t_i = \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{c(z)[1 - a^2 c^2(z)]^{1/2}} \quad (3.1.6)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ηχητική γίνεται οριζόντια σε βάθος z_h για το οποίο ισχύει :

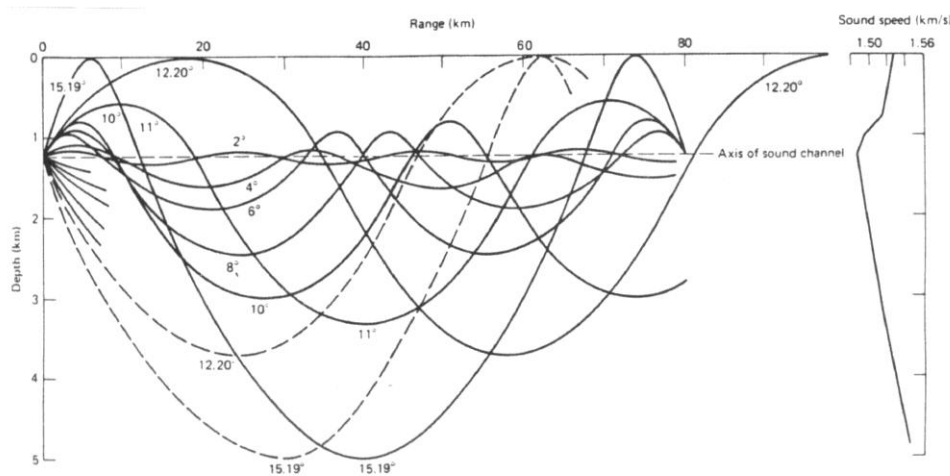
$$c(z_h) = c(z_i) / \sin \theta_i \quad (3.1.7)$$

καθώς στο σημείο οριζοντιοποίησης το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της ακτίνας με την κατακόρυφο θα πρέπει να είναι 1 ($\sin \theta_h = 1$). Το σημείο αυτό είναι ένα κρίσιμο σημείο του διαγράμματος της ηχητικής ακτίνας. Άλλα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία πρόσπτωσης στην επιφάνεια και τον πυθμένα της θάλασσας. Η ολοκλήρωση πάνω σε μία ηχητική ακτίνα για τον προσδιορισμό των κρίσιμων ακουστικών μεγεθών γίνεται ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Τα κρίσιμα σημεία είναι επίσης καθοριστικά για τον υπολογισμό της διαδρομής της ηχητικής ακτίνας χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω ολοκληρώματα, αλλά και χρησιμοποιώντας τον τρόπο υπολογισμού που θα ακολουθήσει.

Με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα γίνεται σαφές ότι η ηχητική ενέργεια δεν ταξιδεύει σε ένα ακουστικό μέσον σε ευθεία γραμμή εκτός και αν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι σταθερή. Σε κάθε άλλη περίπτωση η ηχητική ακτίνα είναι καμπύλη, η εξίσωση της οποίας υπολογίζεται μέσω της σχέσης 3.1.5. Το φαινόμενο είναι πολύ ενδιαφέρον στο νερό, και σε εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας που εκμεταλλεύονται την καμπύλωση της ηχητικής ενέργειας και τις δημιουργούμενες περιοχές μεγάλης ή μικρής συγκέντρωσης ακτίνων ανάλογα με την εφαρμογή. Στο σημείο αυτό να πούμε απλά ότι μεγάλη συγκέντρωση ακτίνων υποδηλώνει περιοχή ισχυρού ακουστικού πεδίου σε αντίθεση με την περιοχή όπου οι ακτίνες είναι αραιές που υποδηλώνει περιοχή ασθενούς πεδίου. Στο ερώτημα για το πώς καθορίζονται οι περιοχές μεγάλης ή μικρής συγκέντρωσης ακτίνων αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η εκπομπή ηχητικής ενέργειας από μία πηγή γίνεται συνήθως με τη μορφή δέσμης (Σχήμα 3.4). Η δέσμη αυτή καθορίζεται από την κατευθυντότητα της πηγής όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 2. Η απλουστευτική παραδοχή που γίνεται είναι ότι μέσα στη δέσμη παίρνουμε μία διακριτοποίηση στη γωνία και ανά ακτινικό βήμα $\delta\theta$ θεωρούμε μία ηχητική ακτίνα. Έτσι η εκπομπή ηχητικής ενέργειας στην πηγή θεωρείται ομοιόμορφη, παρά το γεγονός ότι η κατευθυντότητα υποδηλώνει ότι αυτό δεν ισχύει πάντα. Ωστόσο για τις ανάγκες εποπτικής μελέτης της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα αυτό είναι αρκετό. Ακολουθώντας παρακολουθείται η πορεία κάθε μιας από τις ακτίνες αυτές στο περιβάλλον και σχεδιάζεται ένα διάγραμμα ακτίνων όπως στο σχήμα 3.5. Μια πρώτη εικόνα των χαρακτηριστικών περιοχών συγκέντρωσης ή αραιώσης της ηχητικής ενέργειας μας δίνει η αντίστοιχη περιοχή συγκέντρωσης ή αραιώσης των ηχητικών ακτίνων.



Σχήμα 3.4 Δέσμη εκπομπής από ηχητική πηγή

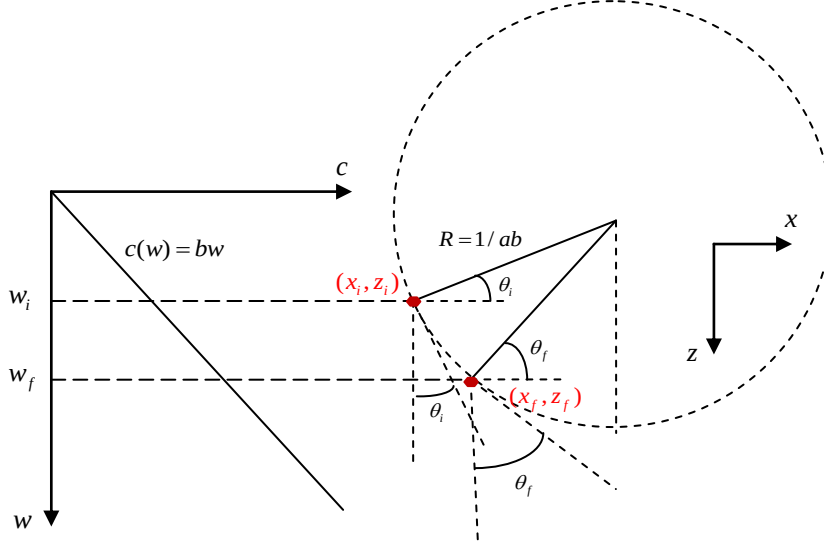


Σχήμα 3.5 Τυπικό διάγραμμα ακτίνων σε βαθιά θάλασσα για το εμφανιζόμενο δεξιά προφίλ ταχύτητας. Έχουν σημειωθεί οι γωνίες εκπομπής για την κάθε ακτίνα. (από Clay and Medwin)

Η ολοκλήρωση στη σχέση 3.1.5 μπορεί να γίνει αριθμητικά, όταν η ταχύτητα είναι μία γενική συνάρτηση του βάθους. Πολλές φορές όμως καταφεύγουμε σε απλουστεύσεις του προφίλ ταχύτητας ώστε η ολοκλήρωση να μπορεί να γίνει έστω και τμηματικά με αναλυτικές σχέσεις. Στην περίπτωση αυτή συνήθως χρησιμοποιούμε μία προσέγγιση του προφίλ ταχύτητας με συναρτήσεις τμηματικά συνεχείς, η κάθε μία από τις οποίες μπορεί να δώσει αναλυτική έκφραση για το ολοκλήρωμα της σχέσης 3.1.5. Μία συνάρτηση αυτού του είδους είναι η γραμμική, σύμφωνα με την οποία το προφίλ ταχύτητας δίδεται από τη σχέση :

$$c(z) = c(z_1) + b(z - z_1) \quad \text{για } z_1 \leq z \leq z_2 \quad (3.1.8)$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το προφίλ ταχύτητας χωρίζεται σε πολλά τμήματα στα οποία η ταχύτητα έχει δεδομένη σταθερή κλίση. Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται ανάμεσα στα τμήματα αυτά και στη συνέχεια τα παραγόμενα επί μέρους διαγράμματα ακτίνων ενώνονται για να δώσουν το τελικό διάγραμμα. Για να επιτευχθεί ομαλή καμπύλη, συνήθως ακολουθεί μία εξομάλυνση του τελικού διαγράμματος, ώστε να μην παρατηρούνται ασυνέχειες μέσα στο νερό, κάτι που αντίκειται στους φυσικούς νόμους.



Σχήμα 3.6 Κυκλική διαδρομή ακτίνων για ταχύτητα ήχου γραμμικά μεταβαλλόμενη με το βάθος

Αξίζει να δώσουμε τη μορφή του διαγράμματος ακτίνων ανάμεσα σε δύο βάθη για τα οποία η μεταβολή της ταχύτητας είναι γραμμική. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την βοηθητική μεταβλητή

$$w = z - z_1 + \frac{c(z_1)}{b} \quad (3.1.9)$$

Ισχύει :

$$dw = dz \quad (3.1.10)$$

$$c(z) = bw \quad (3.1.11)$$

Τα ολοκληρώματα (3.1.5) και (3.1.6) υπολογίζονται ως εξής :

$$t_f - t_i = \int_{w_i}^{w_f} \frac{dw}{bw(1 - a^2 b^2 w^2)^{1/2}} \quad (3.1.12)$$

$$x_f - x_i = \int_{w_i}^{w_f} \frac{abw dw}{(1 - a^2 b^2 w^2)^{1/2}} \quad (3.1.13)$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες ολοκληρωμάτων καταλήγουμε στις σχέσεις

$$t_f - t_i = \frac{1}{b} \log_e \frac{w_f [1 + (1 - a^2 b^2 w_i^2)^{1/2}]}{w_i [1 + (1 - a^2 b^2 w_f^2)^{1/2}]} \quad (3.1.14)$$

$$\text{ή} \quad t_f - t_i = \frac{1}{b} \log_e \frac{w_f (1 + \cos \theta_i)}{w_i (1 + \cos \theta_f)} \quad (3.1.15)$$

$$\text{και} \quad x_f - x_i = \frac{1}{ab} [(1 - a^2 b^2 w_i^2)^{1/2} - (1 - a^2 b^2 w_f^2)^{1/2}] \quad (3.1.16)$$

$$\text{ή} \quad x_f - x_i = \frac{1}{ab} (\cos \theta_i - \cos \theta_f) = R(\cos \theta_i - \cos \theta_f) \quad (3.1.17)$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (3.1.17) και με την βοήθεια του σχήματος 3.6, ότι η ακτίνα καμπυλότητας της ηχητικής ακτίνας R στο διάστημα κατά το οποίο η κλίση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου είναι σταθερή, είναι επίσης σταθερή και ίση με το πηλίκο $\frac{1}{ab}$. Άρα η ηχητική ακτίνα έχει τη μορφή τόξου κύκλου. Αυτό διευκολύνει αρκετά τους υπολογισμούς και την κατασκευή αλγορίθμων για την παρακολούθηση της πορείας της ηχητικής ακτίνας.

Αντίστοιχα η σχέση ανάμεσα στα βάθη z_f και z_i είναι.

$$z_f - z_i = R(\sin \theta_f - \sin \theta_i) \quad (3.1.18)$$

Υπολογίζοντας τις συντεταγμένες μιας ηχητικής ακτίνας από τις ανωτέρω σχέσεις, παρακολουθούμε την γεωμετρία της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα.

Θα πρέπει να προσέξουμε ότι εάν δεν υπάρχει εμπόδιο στην πορεία της ηχητικής ακτίνας που να την αναγκάσει να επιστρέψει πίσω, η μεταβολή $x_f - x_i$ πρέπει να είναι πάντα θετική. Αυτό ισχύει ακόμη και όταν η ακτίνα προσπέσει στον πυθμένα της θάλασσας όταν αυτός θεωρείται επίπεδος και οριζόντιος όπως είχαμε δει μέχρι τώρα. Αντίθετα η μεταβολή $z_f - z_i$ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ανάλογα με τον η ακτίνα οδεύει προς τον πυθμένα ή την επιφάνεια της θάλασσας αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό πρέπει να προσέξει κάποιος στη χρήση της σωστής γωνίας (αρνητική ή θετική) ανάλογα και με το πρόσημο της ακτίνας καμπυλότητα R , που όπως φαίνεται και από τον ορισμό της μπορεί να είναι $+$ ή $-$ ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς b . Ο αναγνώστης εύκολα μπορεί να αντιληφθεί τη σωστή χρήση των πρόσημων με λίγη εξάσκηση.

Σήμερα η παρακολούθηση της διαδρομής μιας ηχητικής ακτίνας γίνεται με αριθμητικές τεχνικές που εξασφαλίζουν μεγαλύτερη ακρίβεια στην χάραξη της διαδρομής ιδιαίτερα σε γενικά προφίλ ταχύτητας.

3.2 Ακουστική πίεση και γεωμετρική ακουστική.

Η ακουστική ενέργεια που μεταφέρεται από ένα κύμα εξαρτάται βέβαια από την ένταση της πηγής που το προκαλεί. Μέχρι τώρα το μέγεθος αυτό δεν μας είχε απασχολήσει, μια και στα προβλήματα που μελετήσαμε μας ενδιέφερε η μορφή της λύσης της ακουστικής εξίσωσης και τα σχετικά πλάτη των ενεργειακών μεγεθών ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μία απλή μέθοδο για υπολογισμό της ακουστικής πίεσης με τη βοήθεια της γεωμετρικής ακουστικής, καθώς και μεγέθη που διευκολύνουν την μελέτη των σχετικών προβλημάτων. Σημειώνουμε εδώ ότι ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης με χρήση

της γεωμετρικής ακουστικής δεν εξαντλείται στην μέθοδο που θα παρουσιάσουμε εδώ, αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε εξειδικευμένα βιβλία (π.χ. Jensen et al. 1994) για περισσότερες λεπτομέρειες, καθώς η σχετική θεωρία ξεφεύγει από τον σκοπό του μαθήματος μας.

3.2.1 Εκπομπή ηχητικής ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι βρισκόμαστε σε ένα άπειρο μέσον και ότι υπάρχει σημειακή ηχητική πηγή που εκπέμπει αρμονικά. Η συμμετρία του προβλήματος μας οδηγεί στη διατύπωση της ακουστικής εξίσωσης στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και στην έκφραση των μεγεθών του προβλήματος ως συναρτήσεις της απόστασης από την πηγή μόνο, όπου θεωρούμε και την αρχή του συστήματός μας. Θα θεωρήσουμε την πηγή στην αρχή του σφαιρικού συστήματος και αφού εκπέμπει σε άπειρο μέσον, το ακουστικό πεδίο παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία.

Θα χρειαστεί μια αναφορά στο Παράρτημα Ε, στο οποίο δίδεται επιγραμματικά η λύση της ακουστικής εξίσωσης σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Εδώ εισάγουμε για πρώτη φορά ενεργειακά μεγέθη που θα μας βοηθήσουν να κάνουμε μία προσεγγιστική εκτίμηση της ακουστικής πίεσης με βάση τη γεωμετρική ακουστική.

Στιγμιαία ένταση (instantaneous intensity), είναι η ακουστική ισχύς που διαδίδεται δια μέσου της μονάδας επιφανείας ενός ακουστικού μέσου σε μια χρονική στιγμή και δίδεται από το γινόμενο της πίεσης και της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του ακουστικού μέσου ($p(r,t)u(r,t)$) όταν και οι δύο ποσότητες είναι πραγματικές ή το γινόμενο της πίεσης με τη συζυγή της ταχύτητας, όταν και οι δύο ποσότητες είναι μιγαδικές ($p(r,t)u^*(r,t)$), όπου με u^* συμβολίζεται η συζυγής της ταχύτητας. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την γενική περίπτωση της μιγαδικής ταχύτητας.

Ακουστική ένταση (acoustic intensity) ορίζεται ως η μέση ισχύς που περνά δια μέσου της μονάδας επιφανείας και δίδεται από τη σχέση :

$$\langle I \rangle = \text{Real} \left(\frac{1}{T} \int_0^T p(r,t) u^*(r,t) dt \right) \quad (3.2.1)$$

Αντικατάσταση της πίεσης και της ταχύτητας από τη σχέση που τις συνδέει στην ανωτέρω εξίσωση

$$p(r,t) \approx (\rho c) u(r,t) \quad (3.2.2)$$

(βλ. Παράρτημα Ε) και λαμβάνοντας υπ όψιν την χρονική εξάρτηση της πίεσης (αρμονικά κύματα) παίρνουμε

$$\langle I \rangle = \frac{|p|^2}{\rho c} \quad (3.2.3)$$

όπου το σύμβολο $|p|$ υποδηλώνει και την **μέση τετραγωνική πίεση** η οποία ως γνωστόν δίδεται από τη σχέση $|p|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt$. Στην περίπτωση της πίεσης του κύματος, η χρονική εξάρτηση του οποίου εκφράζεται μέσω του όρου $e^{-i\omega t}$ έχουμε

$$|p| = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad (3.2.4)$$

όπου P είναι το πλάτος της πίεσης.

Εάν η **ολική ισχύς** που εκπέμπεται από την πηγή είναι Π (μονάδες στο μετρικό σύστημα, Watts), θα πρέπει σε δεδομένη θέση r να ισχύει

$$\Pi = \int_S \langle I \rangle dS = \int_{4\pi} \langle I \rangle r^2 d\Omega \quad (3.2.5)$$

όπου $d\Omega = dS/r^2$ είναι η στοιχειώδης στερεά γωνία και dS είναι μία στοιχειώδης σφαιρική επιφάνεια.

Αφού $\langle I \rangle$ και r είναι σταθερά στην επιφάνεια dS , παίρνουμε

$$\Pi = \langle I \rangle r^2 \int d\Omega = 4\pi |p|^2 \frac{r^2}{\rho c} \quad (3.2.6)$$

Επομένως η μέση τετραγωνική πίεση σε απόσταση r από την πηγή, συναρτήσει της ισχύος της πηγής είναι

$$|p| = \left(\frac{\Pi \rho c}{4\pi r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.7)$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι με χρήση της λύσης της ακουστικής εξίσωσης για σφαιρικά κύματα $p(r,t) = \frac{A}{r} \exp[i(kr - \omega t)] = P \exp[i(kr - \omega t)]$ (Ε.1.3) και της έκφρασης για τη μέση τετραγωνική πίεση από την 3.2.4, έχουμε

$$|p| = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{A}{r\sqrt{2}} \quad (3.2.4\alpha)$$

και η 3.2.6 μας δίνει

$$\Pi = 2\pi \frac{A^2}{\rho c} \quad (3.2.8)$$

που υποδηλώνει ότι η ισχύς είναι ανεξάρτητη της απόστασης δηλαδή σταθερή, κάτι αναμενόμενο στα πλαίσια της γενικής μας παραδοχής για διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα.

Στη συνέχεια, η αναφορά στην πίεση ενός ακουστικού μέσου θα παραπέμπει στη μέση τετραγωνική πίεση $|p|$ παραλείποντας τον επιθετικό προσδιορισμό. Επίσης η ακουστική ένταση θα αποδίδεται από το σύμβολο I αντί για $\langle I \rangle$.

3.2.2 Μονάδες μέτρησης της πίεσης και του ηχητικού πεδίου

Η μονάδα μέτρησης της πίεσης στο μετρικό σύστημα είναι τα newtons ανά τετραγωνικό μέτρο (N/m^2) που ονομάζεται και Pascal (Pa). Επειδή όμως σε ένα ακουστικό μέσον αναμένονται έντονες διακυμάνσεις σε αριθμητικά μεγέθη, έχει επικρατήσει να υπολογίζονται τα ακουστικά μεγέθη σε μονάδες decibel (dB). Οι μονάδες αυτές δίδουν μία λογαριθμική έκφραση του αντίστοιχου μεγέθους.

Καλούμε **Επίπεδο έντασης** (Sound Intensity Level ή SIL) το μέγεθος

$$SIL = 10 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} \quad \text{dB re } I_{ref} \quad (3.2.9)$$

όπου I_{ref} είναι η ένταση αναφοράς για την οποία θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **Επίπεδο πίεσης** (Sound Pressure Level ή SPL) το μέγεθος

$$SPL = 20 \log_{10} \frac{|p|}{p_{ref}} \quad \text{dB re } p_{ref} \quad (3.2.10)$$

Σημειώνουμε ότι η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου της πίεσης, επομένως τα δύο μεγέθη είναι ταυτόσημα, εφ' όσον αναφέρονται σε αντίστοιχη ποσότητα αναφοράς. Συνήθως στην υποβρύχια ακουστική χρησιμοποιείται ως μονάδα αναφοράς της πίεσης το $1 \mu\text{Pa}$ (10^{-6} N/m^2) που για τυπικές τιμές ταχύτητας διάδοσης ήχου και πυκνότητας (1480 m/sec και 1000 kg/m^3 αντίστοιχα) αντιστοιχεί μέσω της 3.2.3, σε ένταση $6.76 \times 10^{-19} \text{ W/m}^2$.

Ως **Επίπεδο πίεσης πηγής** (Source pressure Level SL) θεωρούμε κατά σύμβαση το επίπεδο πίεσης σε απόσταση r_0 από την πηγή η οποία θεωρείται απόσταση αναφοράς. Στο μετρικό σύστημα η απόσταση αυτή είναι τυπικά 1 μέτρο. Με βάση τα μέχρι τώρα λεχθέντα, και σε άπειρο μέσον στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, η πίεση είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Επομένως, η πίεση $|p|$ σε τυχούσα θέση r δίδεται συναρτήσει της πίεσης $|p_0|$ στην απόσταση r_0 από τη σχέση

$$|p| = \frac{|p_0| r_0}{r} \quad (3.2.11)$$

Ως **Απώλεια διάδοσης** (Transmission Loss TL) ορίζουμε τη διαφορά σε επίπεδα πίεσης ανάμεσα σε δύο θέσεις ενός ηχητικού μέσου :

$$TL_{12} = SPL_1 - SPL_2 \quad (3.2.12)$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 υποδηλώνουν τις αντίστοιχες θέσεις. Η απώλεια διάδοσης είναι θετική, όταν το επίπεδο πίεσης στη θέση 2 είναι μικρότερο σε σχέση με τη θέση 1.

Εναλλακτικός ορισμός της απώλειας διάδοσης είναι μέσω του λόγου των μέσων τετραγωνικών πιέσεων στις αντίστοιχες θέσεις :

$$TL_{12} = -20 \log_{10} \frac{|p_2|}{|p_1|} \quad (3.2.13)$$

Όταν το μέσον χαρακτηρίζεται από σφαιρική διάδοση ως ανωτέρω, παίρνουμε :

$$TL_{12} = 20 \log_{10} \frac{|p_1|}{|p_{ref}|} - 20 \log_{10} \frac{|p_2|}{|p_{ref}|} = 20 \log_{10} \frac{|p_1|}{|p_2|} = 20 \log_{10} \frac{r_2}{r_1} \quad (3.2.14)$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων μας ενδιαφέρει η απώλεια διάδοσης σε σχέση με την απόσταση αναφοράς r_0 :

$$TL = 20 \log_{10} \frac{r}{r_0} \quad (3.2.15)$$

Η έκφραση «απώλεια διάδοσης» υποδηλώνει ότι η πίεση ελαττώνεται ανάμεσα στις δύο θέσεις ($TL > 0$) που είναι βέβαια εύκολα κατανοητό στη σφαιρική διάδοση όπου λόγω της αύξησης της επιφάνειας του μετώπου κύματος, η πίεση μειώνεται με την απόσταση από την πηγή.

Τέλος να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση της πρόσπτωσης κυμάτων τη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα, ορίζουμε κατ' αντιστοιχία το μέγεθος **απώλεια ανάκλασης** (Reflection Loss, RL) και επειδή μας ενδιαφέρει στην ακουστική ωκεανογραφία ειδικότερα η περίπτωση της πρόσπτωσης στον πυθμένα, το μέγεθος **απώλεια πυθμένα** (Bottom Loss, BL) από τη σχέση :

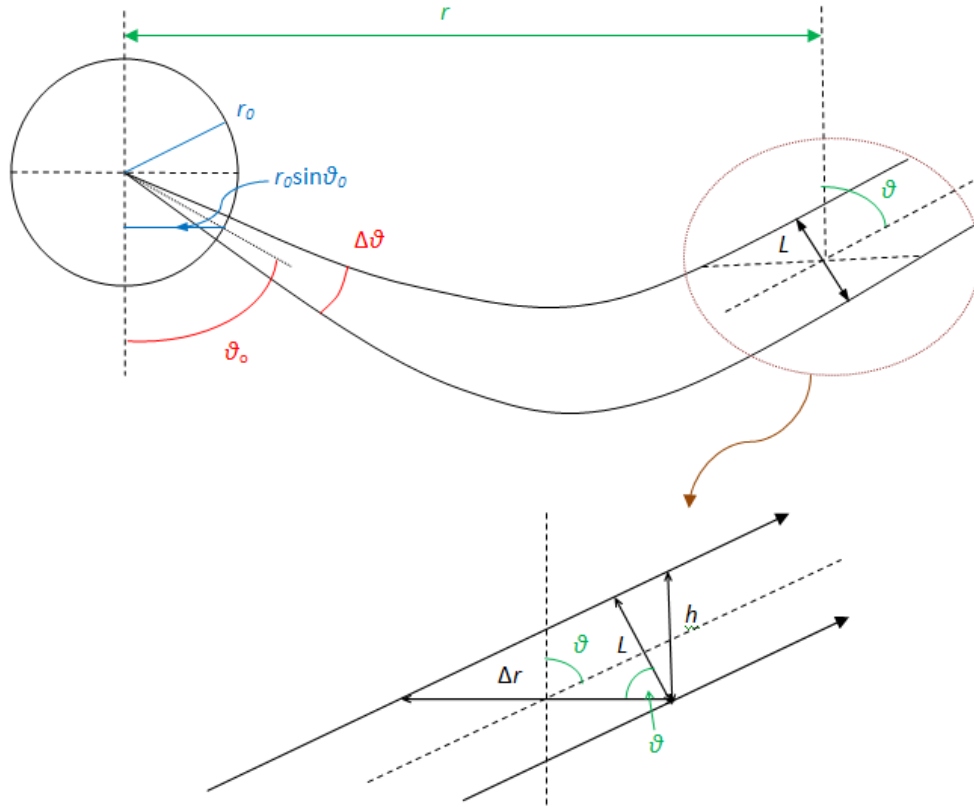
$$BL = -20 \log_{10} \frac{|p_r|}{|p_i|} = -20 \log_{10} |R_b| \quad (3.2.16)$$

όπου το αρνητικό σημείο τίθεται ώστε το μέγεθος να παραμένει θετικό αφού $|p_r| \leq |p_i|$ και R_b είναι ο συντελεστής ανάκλασης. Ο δείκτης b αναφέρεται στην ανάκλαση από τον πυθμένα ο οποίος μπορεί να έχει οποιαδήποτε σύσταση και στρωματοποίηση, οπότε υπολογίζεται ανάλογα και ο συντελεστής ανάκλασης.

3.2.3 Απώλεια διάδοσης κατά μήκος μιας ηχητικής ακτίνας

Για να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση σε δεδομένη θέση στη θάλασσα με χρήση της γεωμετρικής ακουστικής, θα καταφύγουμε σε μία απλουστευμένη θεώρηση που όμως δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιοχές που δεν έχουμε έντονη συγκέντρωση ή αραίωση της ηχητικής ενέργειας.

Ο υπολογισμός μας θα βασιστεί στην απόσταση ανάμεσα σε γειτονικές ακτίνες, όπως χαρακτηρίζονται εκείνες που απέχουν μικρή γωνιακή απόσταση $\Delta\theta$ μεταξύ τους. Ως γωνία θ μιας ηχητικής ακτίνας θεωρούμε τη σχηματιζόμενη από την εφαιπόμενη στην ακτίνα με την κατακόρυφο (σχήμα 3.7). Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό r αντί για x για την οριζόντια απόσταση, ώστε να υπάρχει αντιστοιχία συμβολισμού με την απόσταση αναφοράς. ΠΡΟΣΟΧΗ όμως : Η χρήση του συμβολισμού αυτού δεν αλλάζει τη γεωμετρία μελέτης του προβλήματος που σε μεγάλη απόσταση από την πηγή παραμένει στο επίπεδο x, z .



Σχήμα 3.7 Διάγραμμα ακτίνων για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης.

Με αναφορά στο σχήμα 3.7 για τη γεωμετρία, θεωρούμε μία ηχητική πηγή που εκπέμπει ακουστική ενέργεια ισχύος Π με τη μορφή αρμονικών κυμάτων ομοιόμορφα σε δέσμη $\Delta\theta$. Η παραδοχή για ομοιόμορφη εκπομπή είναι απλουστευτική, όταν όμως η γωνία της δέσμης $\Delta\theta$ είναι μικρή, η παραδοχή είναι ικανοποιητική. Η ακουστική ισχύς $\Delta\Pi$ που εκπέμπεται στον στοιχειώδη δακτύλιο που ορίζεται από την ακτίνα r_0 είναι

$$\Delta\Pi = \frac{|p_0|^2}{\rho_0 c_0} (2\pi r_0 \sin \theta_0) r_0 \Delta\theta \quad (3.2.17)$$

όπου οι δείκτες 0 στην πυκνότητα και ταχύτητα υποδηλώνουν την αναφορά τους στην απόσταση r_0 . Σημειώστε ότι η θεωρούμενη γεωμετρία είναι τρισδιάστατη με συμμετρία γύρω από τον άξονα Oz .

Δεδομένου ότι πολύ κοντά στην πηγή η ταχύτητα του ήχου είναι σταθερή και η διάδοση θεωρείται σφαιρική, από τη σχέση (3.2.7), η πίεση $|p_0|$ δίδεται μέσω της

$$|p_0|^2 = \frac{\rho_0 c_0 \Pi}{4\pi r_0^2} \quad (3.2.18)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι οι δύο ακραίες ακτίνες της δέσμης έχουν διαδοθεί στο περιβάλλον και μετά από καμπύλωση έχουν έρθει στην κατάσταση που περιγράφεται από το σχήμα 3.7 (λεπτομέρεια στο κάτω μέρος). Η οριζόντια απόσταση υπολογισμού της ακουστικής πίεσης είναι η $r \equiv x$. Η επιφάνεια την οποία διαπερνά η ηχητική ισχύς που περιορίζεται από τις δύο ακραίες ακτίνες είναι $2\pi rL$, όπου L είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις ακτίνες που μετράται στο μέτωπο κύματος. Για μικρό εύρος δέσμης, η προσέγγιση ότι οι δύο ακτίνες είναι παράλληλες είναι αποδεκτή. Αφού η ισχύς παραμένει η ίδια με την αρχική (απουσία φυσικής εξασθένησης – διατήρηση ενέργειας), θα πρέπει να ισχύει

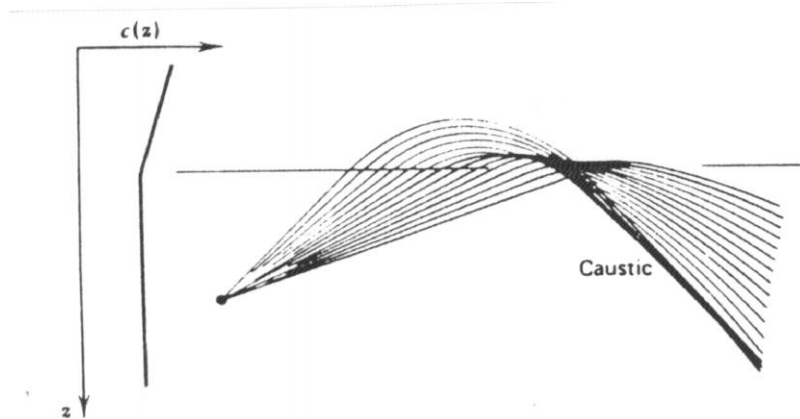
$$\Delta\Pi = \frac{2\pi_0^2}{\rho_0 c_0} |p_0|^2 \sin\theta_0 \Delta\theta = \frac{2\pi L |p|^2}{\rho c} \quad (3.2.19)$$

Επομένως η πίεση στην απόσταση r θα δίδεται από τη σχέση

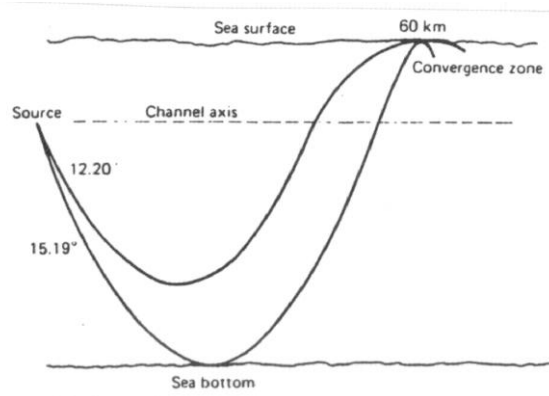
$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2 \rho c \sin\theta_0 \Delta\theta}{\rho_0 c_0 r L} \quad (3.2.20)$$

Παρατηρούμε ότι η πίεση παραμένει πεπερασμένη εκτός εάν $L=0$. Η περίπτωση αυτή είναι δυνατή όταν έχουμε διασταύρωση των ακτίνων (Σχήμα 3.8). Στα σημεία διασταύρωσης επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση από τη σχέση 3.2.20 μια και σύμφωνα με σχέση αυτή η πίεση φαίνεται να απειρίζεται, ενώ στην πραγματικότητα παραμένει πεπερασμένη. Περιοχές συγκέντρωσης και διασταύρωσης ακτίνων έχουμε πρακτικά σε όλα τα διαγράμματα ακτίνων και ορίζουν τις λεγόμενες **καυστικές** (*caustics*). Ο υπολογισμός της πίεσης εκεί, με μεθόδους της γεωμετρικής ακουστικής είναι εξαιρετικά δύσκολος. Αντίθετα δεν παρουσιάζει δυσκολίες όταν χρησιμοποιηθούν μέθοδοι κυματικής θεωρίας (Μάθημα Κυματικής Θεωρίας).

Επίσης να σημειώσουμε ότι με βάση τη μεγέθυνση της περιοχής της λήψης που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.7, εναλλακτικές εκφράσεις για το L που όμως σχετίζονται με τη διαδικασία υπολογισμού του διαγράμματος των ακτίνων, παίρνουμε από τις σχέσεις $L = h \sin\theta$, ή $L = \Delta r \cos\theta$. Έτσι, εάν υπολογίζουμε το διαχωρισμό των ακτίνων σε ένα βάθος z , η χρήση του Δr μας εξυπηρετεί, ενώ εάν την υπολογίζουμε σε μία οριζόντια απόσταση x , η χρήση του h ενδείκνυται.



Σχήμα 3.8 Ακτίνες που διασταυρώνονται και αντίστοιχο προφίλ ταχύτητας. Σχηματισμός καυστικής (Από Clay and Medwin).



Σχήμα 3.9 Διάγραμμα ακτίνων στο οποίο παρατηρούμε ζώνη σύγκλισης. (Από Clay and Medwin).

Στο σχήμα 3.9 παρατηρούμε την περίπτωση ενός διαγράμματος ακτίνων που εφάπτονται τόσο του πυθμένα όσο και της επιφάνεια της θάλασσας. Η επαφή με την επιφάνεια γίνεται για τη δεδομένη δέσμη εύρους 3° σε απόσταση 60 km όπου και παρατηρείται συγκέντρωση ηχητικής ενέργειας (convergence zone).

Θα κλείσουμε την παράγραφο με τον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης κατά μήκος μιας ηχητικής ακτίνας. Σύμφωνα με τα μέχρι τώρα λεχθέντα, η απώλεια διάδοσης ανάμεσα στις αποστάσεις r_0 και r είναι :

$$TL = -20 \log_{10} \left| \frac{p}{p_0} \right| \quad (3.2.21)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.2.19 παίρνουμε :

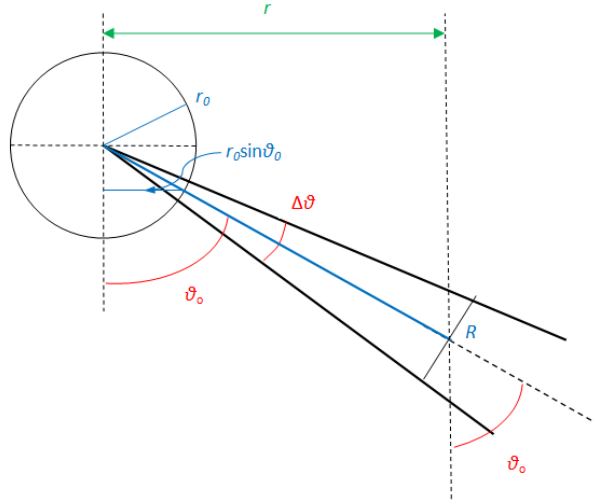
$$TL = 10 \log_{10} \frac{r}{r_0} - 10 \log_{10} \frac{\rho c}{\rho_0 c_0} + 10 \log_{10} \frac{L}{r_0 \sin \theta_0 \Delta \theta} \quad (3.2.22)$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της πίεσης στη θέση ενός δέκτη θα πρέπει να υπολογισθεί η διαδρομή των ηχητικών ακτίνων που συνδέουν πηγή και δέκτη με βάση το προφίλ της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Προσέξτε επίσης από τη σχέση 3.2.22 ότι στην περίπτωση που πηγή και δέκτης βρίσκονται στο ίδιο βάθος, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, όταν σύμφωνα και με τις παραδοχές που έχουμε ήδη κάνει η πυκνότητα στο νερό θεωρείται σταθερή.

Αξίζει να σχολιάσουμε την ειδική περίπτωση που η διάδοση γίνεται σε περιβάλλον σταθερής ταχύτητας διάδοσης του ήχου χωρίς να παρεμβάλλονται σύνορα. Στην περίπτωση αυτή οι ηχητικές ακτίνες δεν καμπυλώνονται και η γεωμετρία είναι αυτή που εμφανίζεται στο σχήμα 3.10.

Η σχέση 3.2.19 γράφεται τώρα

$$\Delta \Pi = \frac{2\pi r_0^2}{\rho_0 c_0} |p_0|^2 \sin \theta_0 \Delta \theta = \frac{2\pi r (r / \sin \theta_0) \Delta \theta |p|^2}{\rho c} \quad (3.2.23)$$



Σχήμα 3.10 Διάγραμμα ακτίνων για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης στην περίπτωση της διάδοσης σε περιβάλλον σταθερής ταχύτητας διάδοσης του ήχου.

Επομένως παίρνουμε :

$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2 \rho c (\sin \theta_0)^2}{\rho_0 c_0 r^2} \quad (3.2.24)$$

Παρατηρώντας ότι πυκνότητα και ταχύτητα στη θέση πηγής και δέκτη είναι ίδιες έχουμε :

$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2}{(r / \sin \theta_0)^2} \quad (3.2.25)$$

Παρατηρούμε στο σχήμα ότι ο λόγος $r / \sin \theta_0$ αντιπροσωπεύει την ευθεία απόσταση πηγής δέκτη που τη συμβολίζουμε εδώ με R προκειμένου να μην υπάρχει σύγχυση με την οριζόντιο απόσταση r . Έτσι έχουμε :

$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2}{R^2} \quad (3.2.26)$$

που αποτελεί το χαρακτηριστικό νόμο της σφαιρικής διάδοσης.

Η αντίστοιχη απώλεια διάδοσης είναι :

$$TL = -20 \log_{10} \frac{|p|}{|p_0|} = 20 \log_{10} \frac{R}{r_0} \quad (3.2.27)$$

που αντιπροσωπεύει απώλεια διάδοσης σφαιρικού κύματος σε περιβάλλον χωρίς σύνορα με σταθερή ταχύτητα διάδοσης, όπως είδαμε ήδη με τη σχέση 3.2.14 (προσοχή και πάλι στο συμβολισμό της απόστασης).

3.2.4 Ανακλάσεις στον πυθμένα

Εάν μία ηχητική ακτίνα έρθει σε επαφή με λείες διεπιφάνειες στο χώρο διάδοσης, η ανάκλαση που παρατηρείται οδηγεί σε συνέχιση της πορείας της με γωνία ίση με εκείνη της γωνίας πρόσπτωσης. Η καμπυλότητα της ανακλώμενης ακτίνας στο σημείο πρόσπτωσης είναι ίδια με εκείνη της προσπίπτουσας ακτίνας. Ανακλάσεις αυτού του είδους έχουμε τυπικά στην επιφάνεια και τον πυθμένα της θάλασσας.

Επειδή η επιφάνεια της θάλασσας θεωρείται ελεύθερη πίεσεων, η απώλεια ανάκλασης εκεί σύμφωνα με την απλουστευτική παραδοχή που υιοθετείται στα πλαίσια του μαθήματος είναι 0. Αντίθετα στον πυθμένα της θάλασσας μπορεί να έχουμε σημαντική απώλεια ενέργειας η οποία οδεύει προς τον πυθμένα. Εάν χρειαστεί να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση μετά από κάποια ανάκλαση, καταφεύγουμε στην θεωρία των επίπεδων κυμάτων για να κάνουμε τους σχετικούς υπολογισμούς. Με βάση λοιπόν τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα για το συντελεστή ανάκλασης πυθμένα, θα θεωρήσουμε ότι για μία ακτίνα που χαρακτηρίζεται κατά την πρόσπτωση της στον πυθμένα από τη γωνία θ , το μέτωπο κύματος είναι επίπεδο και άρα ο συντελεστής ανάκλασης R_{12} .

Η σχέση (3.2.16) μας δίνει την απώλεια πυθμένα κατά την πρόσπτωση της ηχητικής ενέργειας στην διεπιφάνεια και το μέγεθος αυτό εκφρασμένο σε dB είναι προσθετός στη σχέση 3.2.21 που δίνει την ολική απώλεια διάδοσης ανάμεσα σε δύο θέσεις στη θάλασσα. Είναι προφανές ότι για την περίπτωση πολλαπλών ανακλάσεων, οι απώλειες πυθμένα αθροίζονται, και βέβαια η ολική πίεση στο θαλάσσιο περιβάλλον μειώνεται αρκετά. Θα δούμε περισσότερα στο κεφάλαιο για την εξίσωση SONAR.

3.3 Φυσική εξασθένηση της ηχητικής ενέργειας στο νερό και τα ιζήματα του πυθμένα

Στη μέχρι τώρα θεώρηση του προβλήματος δεν είχαμε δεχθεί οποιοδήποτε μηχανισμό απώλειας της ηχητικής ενέργειας. Η ηχητική ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή παραμένει στο ακουστικό μέσον χωρίς μετατροπή. Η έντασή της όμως μεταβάλλεται με βάση την γεωμετρική εξάπλωση που υφίσταται το μέτωπο κύματος, γεγονός που οδηγεί σε μείωση του πλάτους της ακουστικής πίεσης, καθώς η αύξηση της επιφάνειας του μετώπου κύματος οδηγεί σε μείωση του πλάτους της πίεσης.

Στην πραγματικότητα όμως, διάφοροι μηχανισμοί στο νερό και τα θαλασσινά ιζήματα οδηγούν σε μετατροπή της ακουστικής ενέργειας σε άλλης μορφής ενέργεια (π.χ. θερμότητα) χωρίς δυνατότητα επανάκτησης της και αυτό σημαίνει ότι χάνεται οριστικά για το ακουστικό μέσον. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι περίπλοκοι και δεν είναι εύκολη η μαθηματική μοντελοποίηση τους. Από τους σημαντικούς ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το αντικείμενο αξίζει να μνημονεύουμε τους Stokes και Kirchhoff, οι οποίοι απέδωσαν την εξασθένηση (attenuation) του ήχου σε ένα μέσον, στην θερμική αγωγιμότητα και τη συνεκτικότητα. Η φυσική εξασθένηση σχετίζεται με την έννοια της απορρόφησης της ενέργειας και οι δύο έννοιες θα χρησιμοποιούνται στο παρόν εγχειρίδιο ως ταυτόσημες.

Απ' ό,τι φαίνεται από σύγχρονες μελέτες του θέματος, η βασική αιτία απορρόφησης της ηχητικής ενέργειας στο νερό είναι η **συνεκτικότητα** (viscosity). Ένα

χαρακτηριστικό μέγεθος του προβλήματος είναι ο **χρόνος χαλάρωσης** (*relaxation time*) που αντανakλά τον χρόνο που απαιτείται σε ένα μέσον ώστε να ανταποκριθεί στις αλλαγές της πίεσης που του επιβάλλονται. Η απώλεια ενέργειας εξαρτάται από τον λόγο του χρόνου χαλάρωσης προς την περίοδο ενός ακουστικού κύματος. Η απώλεια είναι μέγιστη όταν ο λόγος αυτός είναι μονάδα και μειώνεται δραστικά όταν ο χρόνος είναι πολύ διαφορετικός.

Οι μηχανισμοί ενεργειακής απώλειας οδηγούν σε μεταβολή της πίεσης ενός ακουστικού κύματος, της οποίας ο ρυθμός είναι ανάλογος της πίεσης με ένα συντελεστή που ονομάζεται «**συντελεστής απορρόφησης**» (*absorption coefficient*).

Για επίπεδα κύματα σε μία διάσταση, η σχέση αυτή γράφεται ως

$$\frac{d|p|}{dx} = -a_e |p| \quad (3.3.1)$$

Ολοκληρώνοντας από $x=0$ έως x (αντίστοιχα από $|p_i|$ σε $|p|$), παίρνουμε

$$|p| = |p_i| \exp(-a_e x) \quad (3.3.2)$$

Ο συντελεστής απορρόφησης έχει σύμφωνα με την παραπάνω σχέση μονάδες απόστασης⁻¹. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν για την μέση τετραγωνική πίεση.

Στην περίπτωση ενός σφαιρικού κύματος έχουμε δει ότι ισχύει η σχέση $|p| = |p_0| \frac{r_0}{r}$ για μία απόσταση αναφοράς r_0 , όπου r είναι η απόσταση από την πηγή. Με αυτά τα δεδομένα και υποθέτοντας αντίστοιχο νόμο της μεταβολής της πίεσης λόγω απορρόφησης ως προς την απόσταση μπορούμε να γράψουμε :

$$|p| = |p_0| \frac{r_0}{r} \exp[-a_e(r - r_0)] \quad (3.3.3\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την έκφραση της πίεσης για σφαιρικά κύματα (εξίσωση E.1.3 Παραρτήματος E) μπορούμε να πάρουμε σε συνδυασμό με τις σχέσεις 3.2.4α, για την ακουστική πίεση τη σχέση :

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp[-a_e(r - r_0)] \exp[i(kr - \omega t)] \quad (3.3.3\beta)$$

Στα περισσότερα προβλήματα ενδιαφερόμαστε για το ακουστικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις, ενώ η απόσταση αναφοράς αναφέρεται κοντά στην πηγή (συνήθως 1 m). Έτσι ισχύει $r \gg r_0$ και παραλείπεται το r_0 στη σχέση που μας δίνει την ακουστική πίεση με φυσική εξασθένιση :

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp[-a_e r] \exp i(kr - \omega t) \quad (3.3.3\gamma)$$

Η ανωτέρω έκφραση μας δίδει τη δυνατότητα να εκφράσουμε την απορρόφηση/εξασθένηση, μέσω ενός μιγαδικού αριθμού κύματος, του οποίου το φανταστικό μέρος θα είναι ο συντελεστής απορρόφησης

$$k_c = k + ia_e \quad (3.3.4)$$

Η ακουστική πίεση γράφεται στην περίπτωση αυτή :

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(k_c r - \omega t) \quad (3.3.5)$$

και διαπιστώνουμε ότι έχει ακριβώς την ίδια μορφή με εκείνη της περίπτωσης χωρίς απώλειες με την μόνη διαφορά στον αριθμό κύματος που είναι πλέον μιγαδικός αριθμός. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού κύματος είναι το μέτρο του διανύσματος που είδαμε να εκφράζει τον αριθμό κύματος στην περίπτωση της διάδοσης χωρίς απώλειες ($k = \omega / c$). Μπορούμε τώρα να εισάγουμε και για το μιγαδικό αριθμό κύματος ένα αντίστοιχο ορισμό :

$$k_c = \frac{\omega}{c_c} \quad (3.3.6)$$

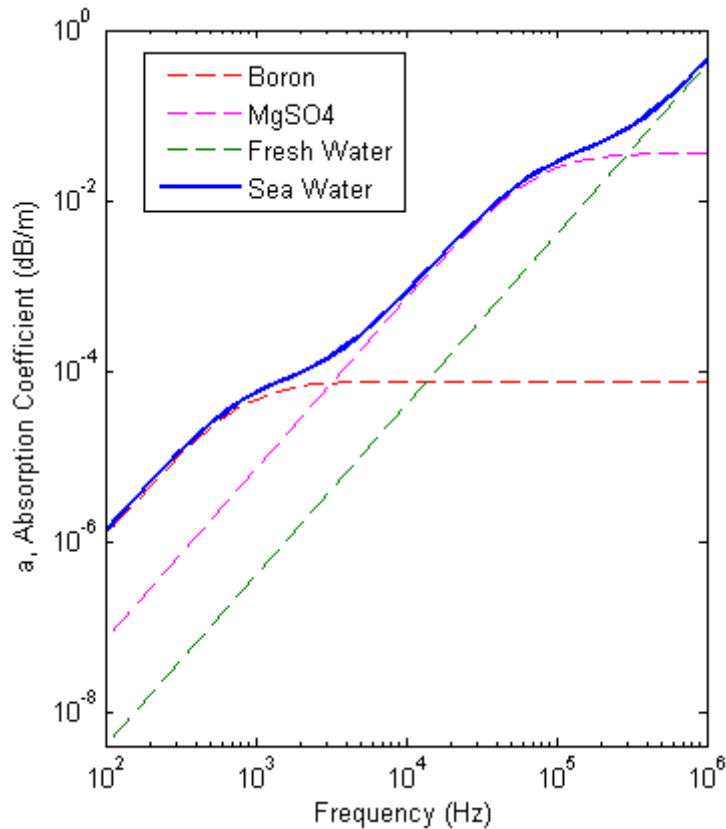
όπου c_c είναι μια μιγαδική ταχύτητα διάδοσης. Δεν θα επεκταθούμε όμως περισσότερο στη χρήση αυτής της έννοιας στην ακουστική ωκεανογραφία. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να βρουν ενδελεχή παρουσίαση των βασικών θεωρητικών εννοιών και των μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα της ποσοτικοποίησης της απορρόφησης της ηχητικής ενέργειας σε ρευστά, στο βιβλίο των Kinsler et al (βλ. βιβλιογραφία).

Ο μιγαδικός αριθμός κύματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση που θεωρήσουμε απόσβεση σε ένα ακουστικό μέσον. Ο συντελεστής απορρόφησης είναι συνήθως μικρός αριθμός (για μικρές συχνότητες). Οι μονάδες του είναι (m^{-1}) ή $neper/m$. Μπορεί ωστόσο να εκφραστεί σε dB/m , μέσω των σχέσεων ορισμού της απώλειας διάδοσης σε dB .

$$TL_{abs} = 20 \log_{10} \frac{|p_i|}{|p|} = a_e x (20 \log_{10} e) = 8,686 a_e x \quad (3.3.7)$$

όπου ο δείκτης abs υποδηλώνει απώλεια διάδοσης λόγω της φυσικής απορρόφησης. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον ισοδύναμο συντελεστή απορρόφησης σε dB/m μέσω της σχέσης

$$a = 8,686 a_e \quad (3.3.8)$$



Σχήμα 3.11 Διάγραμμα υπολογισμού του συντελεστή φυσικής εξασθένησης στο θαλασσινό νερό

Στο σχήμα 3.11 βλέπουμε ένα διάγραμμα που απεικονίζει την εξάρτηση του συντελεστή απορρόφησης στο νερό από τη συχνότητα f . Οι μηχανισμοί φυσικής εξασθένησης που επενεργούν στο θαλασσινό νερό φαίνονται χωριστά. Πρόκειται για τη συνεκτικότητα που αναφέρεται στο γλυκό νερό και τη διάλυση αλάτων και οξέων (magnesium sulfate –MgSO₄ και boric acid - H₃BO₃ -boron). Ο υπολογισμός των καμπύλων του σχήματος έγινε με βάση την επικρατούσα σήμερα εμπειρική σχέση 3.3.9 που συνυπολογίζει τους βασικούς μηχανισμούς απορρόφησης (βλ. Fisher and Simons, JASA, 1977), για θερμοκρασία νερού 20⁰ C αλατότητα 35 ppt και πίεση 1 Atm.

$$a = \frac{Af_1 f^2}{f_1^2 + f^2} + \frac{Bf_2 f^2}{f_2^2 + f^2} + Cf^2 \quad (3.3.9)$$

Στην ανωτέρω σχέση ο πρώτος όρος αφορά την επίδραση του MgSO₄ ο δεύτερος του H₃BO₃ και ο τρίτος της συνεκτικότητας. f_1 και f_2 είναι οι συχνότητες χαλάρωσης (αντίστροφες του χρόνου χαλάρωσης) που υπολογίζονται συναρτήσει της θερμοκρασίας, ενώ οι εμπειρικοί συντελεστές A , B και C εξαρτώνται επίσης από τη θερμοκρασία, ενώ οι B και C και από την πίεση.

Γενικά, βλέπουμε ότι ο συντελεστής απορρόφησης αυξάνει με το τετράγωνο της συχνότητας, γεγονός που καθιστά τις πολύ υψηλές συχνότητες μη αποδοτικές στο

νερό για τις συνήθεις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, ή τουλάχιστον όχι το ίδιο αποδοτικές με τις χαμηλές συχνότητες.

Να σημειώσουμε τέλος ότι συντελεστής απορρόφησης ορίζεται και για τα θαλασσινά ιζήματα και μάλιστα έχει σχετικά μεγαλύτερη σημασία στην ακουστική διάδοση. Οι μηχανισμοί απορρόφησης είναι ασφαλώς διαφορετικοί σε σχέση με εκείνους του νερού, ωστόσο έχουν το ίδιο αποτέλεσμα για ένα ακουστικό κύμα με εκείνους του νερού : Απορροφούν ενέργεια και οδηγούν σε φυσική εξασθένηση του κύματος. Για τυπικές τιμές του συντελεστή απορρόφησης στα θαλασσινά ιζήματα παραπέμπομε στο Παράρτημα Γ.

3.4 Η εξίσωση SONAR

Ο όρος SONAR προέρχεται από την έννοια «**SO**und **NA**vigation and **R**anging» που περιγράφει ουσιαστικά τις αρχικές χρήσεις του ήχου στη θάλασσα. Η εξίσωση του SONAR συνδέει σε λογαριθμική κλίμακα κρίσιμα μεγέθη που υπεισέρχονται στη διαδικασία διάδοσης και λήψης ενός ακουστικού σήματος και αποσκοπεί κυρίως στο να αποδώσει με απλό τρόπο τα ποσοτικά χαρακτηριστικά του σήματος που λαμβάνεται σε ένα δέκτη. Η χρήση της εξίσωσης SONAR για επιχειρησιακούς λόγους είναι αυτονόητη. Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τα βασικά συστατικά της εξίσωσης του SONAR με έμφαση στα μεγέθη που έχουμε δει μέχρι τώρα. Πρόσθετες έννοιες και αντίστοιχα μεγέθη παρουσιάζονται επίσης, χωρίς όμως εμβάθυνση στους τρόπους υπολογισμού τους.

3.4.1 Βασικά μεγέθη

Παρατίθενται τα βασικά μεγέθη που υπεισέρχονται στην εξίσωση του SONAR με τους αντίστοιχους συμβολισμούς τους :

- **SL: Επίπεδο πηγής** (Source Level).

Το επίπεδο της πηγής αναφέρεται κατά σύμβαση σε απόσταση 1 m από αυτήν και δίδεται από τη σχέση

$$SL = 10 \log_{10} \frac{|p_0|^2}{|p_{ref}|^2} \text{ dB re } p_{ref} \quad (3.4.1)$$

Όπου p_0 είναι η πίεση σε απόσταση 1 m από την πηγή. Ως πίεση αναφοράς p_{ref} λαμβάνεται κατά σύμβαση το $1\mu\text{Pa}$ (10^{-6} N/m^2). Σημειώνουμε ότι σε πολλά εγχειρίδια ο ορισμός δίδεται μέσω της αντίστοιχης έντασης του σήματος. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει η ένταση αναφοράς να αναφέρεται στην πίεση αναφοράς.

- ***EL : Επίπεδο Λήψης*** (Echo Level)

Πρόκειται για την ένταση του σήματος λήψης στο δέκτη, εκφρασμένη σε μονάδες dB. Σε αντιστοιχία με το επίπεδο πηγής θα έχουμε :

$$EL = 10 \log_{10} \frac{|p_2|^2}{|p_{ref}|^2} \text{ dB re } p_{ref} \quad (3.4.2)$$

όπου έχουμε υιοθετήσει το συμβολισμό p_2 για την πίεση στο δέκτη.

- ***TL : Απώλεια διάδοσης*** (Transmission Loss)

Πρόκειται για την απώλεια έντασης του σήματος κατά τη διάδοση του στο θαλάσσιο περιβάλλον όπως την ορίσαμε ήδη. Για λόγους πληρότητας επαναλαμβάνουμε τον ορισμό :

$$TL = -20 \log_{10} \frac{|p_2|}{|p_1|} \quad (3.2.13)$$

Στην εξίσωση SONAR η θέση 1 αντιστοιχεί συνήθως στην πίεση του σήματος σε απόσταση 1 μέτρο από την πηγή. Επομένως εδώ $p_1 = p_0$.

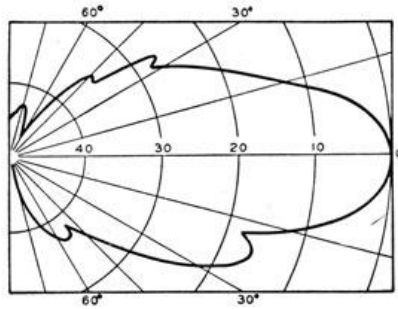
Η απώλεια διάδοσης στην περίπτωση που ληφθεί υπ όψιν και η φυσική εξασθένηση του ήχου προκύπτει ως άθροισμα της γεωμετρικής απώλειας TL_{geom} που αντιστοιχεί στην απώλεια διάδοσης που είδαμε στο κεφάλαιο 3.2 (σχέση 3.2.22) και της φυσικής απώλειας T_{abs} που προκύπτει από τη μείωση της μέσης τετραγωνικής πίεσης λόγω φυσικής απορρόφησης (σχέση 3.3.6).

- ***NL : Επίπεδο θορύβου*** (Noise Level)

Για τον θόρυβο στο θαλάσσιο περιβάλλον θα μιλήσουμε στο κεφάλαιο 4.2.3 . Στο σημείο αυτό δίνουμε τον ορισμό του επιπέδου θορύβου, ως τον λόγο της έντασης του θορύβου σε ένα σημείο στη θάλασσα ως προς την ένταση αναφοράς που έχει χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του επιπέδου πηγής. Προσέξτε και εδώ την αντιστοιχία της έντασης αναφοράς με τη μέση τετραγωνική πίεση αναφοράς.

- ***DI Δείκτης Κατευθυντότητας*** (Directivity Index)

Ο δείκτης κατευθυντότητας εκφράζει ποσοτικά το γεγονός ότι η εκπομπή από κάποια πηγή ή η λήψη ακουστικής ενέργειας από κάποιο δέκτη δεν γίνεται συνήθως ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Στο σχήμα 3.12 φαίνεται ένα διάγραμμα κατευθυντότητας (σε δύο διευθύνσεις) τυπικού μεταλλάκτη (transducer) υποβρύχιας χρήσης που χρησιμοποιείται ως πηγή. Η διεύθυνση μέγιστης εκπομπής είναι στις 0^0 ενώ σημειώνονται και οι διευθύνσεις εκπομπής 30^0 και 60^0 . Οι κύκλοι υποδηλώνουν τη μείωση της έντασης εκπομπής ως προς τη μέγιστη σε μονάδες dB.



Σχήμα 3.12 Τυπικό πολικό διάγραμμα κατευθυντότητας υδροφώνου

Ας θεωρήσουμε μία κατευθυντική πηγή στον άξονα της οποίας (διεύθυνση μέγιστης εκπομπής) η πίεση σε απόσταση r από το κέντρο της είναι $|p_{ax}|$. Εάν η πηγή εξέπεμπε την ίδια ενέργεια με σφαιρική συμμετρία, η πίεση στην ίδια απόσταση θα ήταν $|p_s|$. Είναι προφανές ότι στα πλαίσια της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε $|p_{ax}| > |p_s|$. Ορίζεται ως κατευθυντότητα της πηγής το μέγεθος

$$D = \frac{|p_{ax}|^2}{|p_s|^2} = \frac{I_{ax}}{I_s} \quad (3.4.3)$$

που όπως βλέπουμε εκφράζει το λόγο των εντάσεων του ακουστικού κύματος στην κατεύθυνση του άξονα, σε σχέση με την ένταση παντοκατευθυντικής πηγής στην ίδια απόσταση.

Ο δείκτης κατευθυντότητας εκφράζει το λόγο αυτό σε μονάδες dB και είναι :

$$DI = 10 \log_{10} D \quad (3.4.4)$$

Συνήθως, στην εξίσωση του SONAR ο δείκτης κατευθυντότητας αναφέρεται στο δέκτη. Ο δέκτης έχει επίσης μία διεύθυνση μέγιστης λήψης και εάν προσανατολιστεί σε αυτή, θα ελαχιστοποιήσει το λόγο σήματος προς θόρυβο, βελτιώνοντας την ποιότητα λήψης. Ο ορισμός του δείκτη κατευθυντότητας παραμένει ο ίδιος με αναγωγή της έννοιας της πίεσης εκπομπής σε εκείνη της λήψης, που συγκρίνεται με την πίεση λήψης σε περίπτωση παντοκατευθυντικού δέκτη.

- **TS Target Strength (Ισχύς Στόχου)**

Ως ισχύ στόχου ορίζουμε σε μονάδες dB, το μέτρο της ικανότητα ενός στόχου να ανακλά ακουστική ενέργεια που προσπίπτει σε αυτόν προς την κατεύθυνση του δέκτη. Με απλή θεώρηση ορίζεται ως ο λόγος της έντασης του ανακλώμενου σήματος σε απόσταση 1 μέτρο από τον στόχο I_{ref} ως προς την ένταση πρόσπτωσης I_{in} εκφρασμένος σε dB.

$$TS = 10 \log_{10} \frac{I_{ref}}{I_{in}} \quad (3.4.5)$$

Η ισχύς του στόχου υπολογίζεται πειραματικά και διαφέρει πολύ ανάλογα με το είδος του στόχου, εξαρτάται δε από τη γεωμετρία, το μέγεθος, την ακουστική αντίσταση του στόχου, καθώς και από τη συχνότητα του προσπίπτοντος ακουστικού σήματος.

Αν μπορούμε σε κάποιες λεπτομέρειες ως προς την ισχύ στόχου θα ορίσουμε την *ενεργό επιφάνεια* ενός στόχου σ , ως την επιφάνεια που αντιλαμβάνεται τον προσπίπτοντα κυματισμό. Η ανάκλαση γίνεται προς όλες τις κατευθύνσεις και επομένως η επιφάνεια που «βλέπει» η εκπεμπόμενη ενέργεια θα είναι $A = 4\pi r^2$ και σε απόσταση ενός μέτρου $A = 4\pi$. Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας η προσπίπτουσα ισχύς είναι ίση με την ανακλώμενη οπότε παίρνουμε :

$$I_{in}\sigma = I_{ref} 4\pi \Rightarrow \frac{I_{ref}}{I_{in}} = \frac{\sigma}{4\pi} \quad (3.4.6)$$

και

$$TS = 10 \log_{10} \frac{\sigma}{4\pi} \quad (3.4.7)$$

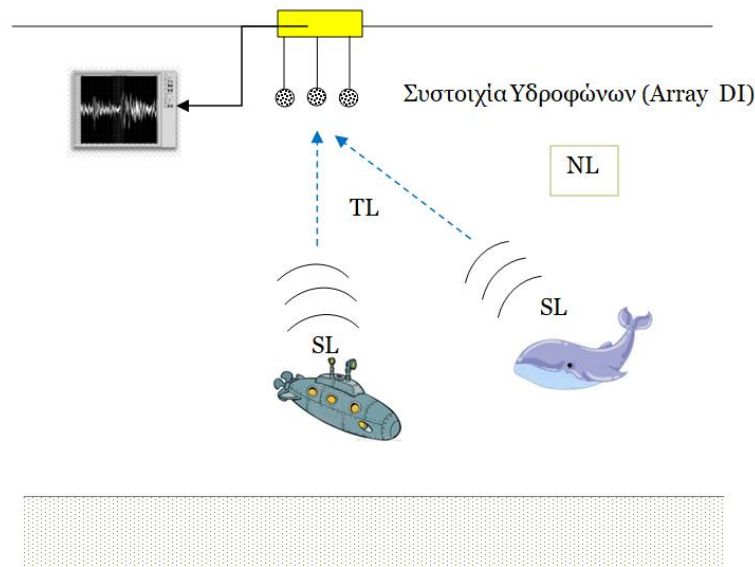
που είναι μία εναλλακτική έκφραση για την ισχύ στόχου σε περίπτωση που για ένα στόχο είναι γνωστή η ενεργός επιφάνεια. Η ισχύς στόχου μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ανάλογα με την φύση του στόχου. Στόχοι με αρνητική ισχύ είναι πιο δύσκολο να εντοπισθούν.

- **RL Επίπεδο Αντήχησης (Reverberation Level)**

Η αντήχηση (reverberation) προέρχεται από τη σκέδαση ενός σήματος από ανομοιογένειες του περιβάλλοντος, αλλά και από τις ανομοιογένειες των επιφανειών των συνόρων ενός ακουστικού μέσου. Είναι βασική παράμετρος της αρχιτεκτονικής ακουστικής καθορίζοντας την ποιότητα ακρόασης (ακουστικού πεδίου) σε ένα χώρο, αλλά και στη θαλάσσια ακουστική είναι σημαντική καθώς καθορίζει αντίστοιχα την ποιότητα λήψης και τη δυνατότητα αξιοποίησης ενός σήματος. Στη θάλασσα συνήθως διακρίνεται σε αντήχηση μέσου (volume) και αντήχηση συνόρων (surface) και μπορεί να εκτιμηθεί με κατάλληλα μοντέλα. Στην εξίσωση SONAR εισάγεται με μονάδες dB. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στον όρο αυτό αλλά θα τον συναντήσουμε στις αντίστοιχες εξισώσεις εξηγώντας τον ρόλο του.

- **DT Κατώφλι Εντοπισμού (Detection Threshold)**

Ένα ακουστικό σήμα λαμβάνεται στο δέκτη αφού υποστεί τις μεταβολές και τις αλλοιώσεις που του επιβάλει το περιβάλλον, ενώ σημαντικό ρόλο στην λήψη του σε κατάλληλα επίπεδα ώστε να είναι αξιοποιήσιμο παίζει και ο θόρυβος ανάμεσα στον οποίο πρέπει να αναγνωριστεί το σήμα. Όσο πιο ισχυρό είναι το σήμα, τόσο καλύτερα είναι τα ποιοτικά του χαρακτηριστικά και τόσο πιο εύκολα μπορεί να αξιοποιηθεί. Το κατώφλι εντοπισμού εκφρασμένο σε μονάδες dB αποδίδει το αποδεκτό όριο στο δέκτη που θα πρέπει να έχει η ένταση του σήματος λήψης προκειμένου να αναγνωρισθεί και να αξιοποιηθεί. Ορίζεται για κάθε σύστημα ανάλογα με τις προδιαγραφές του με βάση συγκεκριμένους κανόνες ως προς την πιθανότητα αναγνώρισης του σήματος.



Σχήμα 3.13 Σχηματική παράσταση παθητικού SONAR

3.4.2 Εξίσωση παθητικού SONAR

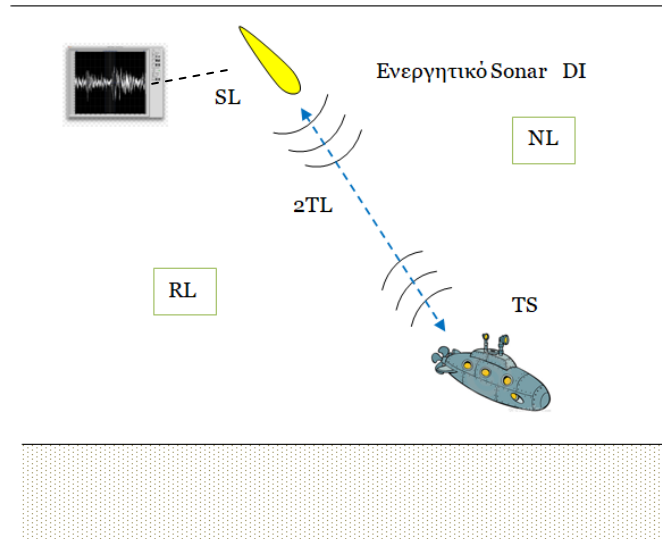
Θα θεωρήσουμε τώρα την απλή περίπτωση της λήψης ενός σήματος από σύστημα ακρόασης. Το σύστημα ακρόασης δεν εκπέμπει ήχο αλλά λαμβάνει ήχους από το περιβάλλον και από τις μεμονωμένες πηγές (πχ θαλάσσια θηλαστικά, υποβρύχια κλπ.). Σχηματική παράσταση ενός παθητικού SONAR δίδεται στο Σχήμα 3.13. Η πηγή εκπέμπει ακουστικά σήματα επιπέδου SL , τα οποία οδεύουν στο θαλάσσιο περιβάλλον, υφίστανται ως προς την έντασή τους απώλεια TL και λαμβάνονται στο δέκτη που μπορεί να είναι μια συστοιχία υδροφώνων με δείκτη κατευθυντότητας DI . Η λήψη γίνεται σε περιβάλλον θορύβου που αποδίδεται από το NL .

Η εξίσωση του παθητικού SONAR στην απλή της μορφή είναι :

$$EL = SL - TL - (NL - DI) \quad (3.4.8)$$

Το επίπεδο λήψης του σήματος θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του κατωφλίου εντοπισμού για ικανοποιητική λήψη ($EL > DT$). Σε πολλά εγχειρίδια, στη θέση του EL στην εξίσωση του SONAR μπαίνει το DT , προκειμένου να ρυθμιστούν όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες, που μπορεί να καθορισθούν από το χρήστη και να οδηγήσουν σε βέλτιστη λήψη του σήματος.

Επίσης στην ως άνω μορφή της εξίσωσης SONAR, το επίπεδο λήψης ισοδυναμεί με τον «Λόγο Σήματος προς Θόρυβο» που συμβολίζεται με $L_{S/N}$. Έτσι υπάρχει και η περίπτωση να δει κανείς την εξίσωση γραμμένη έτσι ώστε στη θέση του EL , να έχουμε το $L_{S/N}$. Να παρατηρήσουμε επίσης ότι όταν ο δέκτης είναι παντοκατευθυντικός, $DI=0$.



Σχήμα 3.14 Σχηματική παράσταση μονοστατικού ενεργητικού SONAR

3.4.3 Εξίσωση ενεργητικού SONAR

Στην περίπτωση του ενεργητικού **μονοστατικού** (monostatic)¹⁰ SONAR (Σχήμα 3.14), κάποια συσκευή εκπέμπει ένα ηχητικό σήμα το οποίο αφού ανακλαστεί στο στόχο, επιστρέφει στη συσκευή που λειτουργεί και ως στοιχείο λήψης. Επομένως χαρακτηρίζεται και από το δείκτη κατευθυντότητας DI . Η απώλεια διάδοσης στην απλή περίπτωση που εκπεμπόμενη και επιστρέφουσα ακουστική ενέργεια ακολουθούν την ίδια πορεία είναι $2TL$. Ο δέκτης χαρακτηρίζεται από ισχύ TS . Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η κατευθυντότητα του πομπού λαμβάνεται συνήθως υπ' όψιν στον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης και δεν υπεισέρχεται στην εξίσωση ως πρόσθετος όρος.

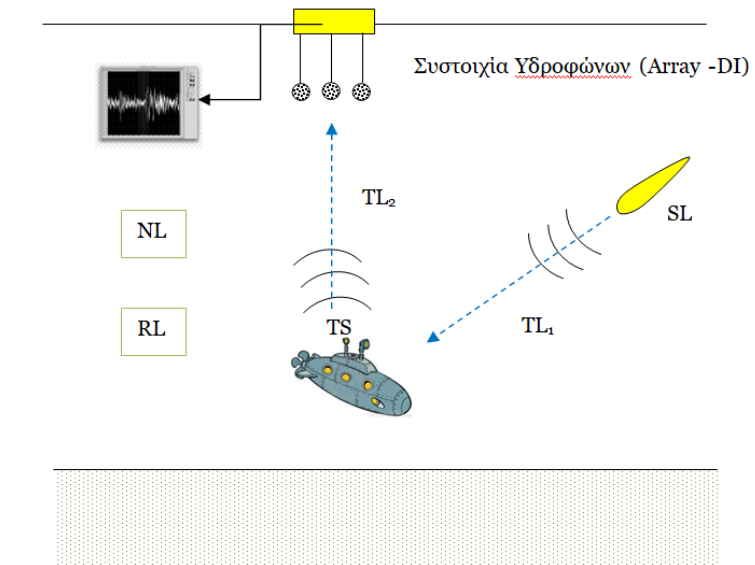
Συνήθως γίνεται η διάκριση ενός περιβάλλοντος έντονης αντήχησης (reverberation limited, R-L) ή περιβάλλοντος έντονου θορύβου (noise limited, N-L). Στην πρώτη περίπτωση ο όρος RL αντικαθιστά τον όρο $NL-DI$ που είδαμε στην εξίσωση του παθητικού SONAR. Έτσι λοιπόν έχουμε δύο διαφορετικές εξισώσεις ανάλογα με την κατάσταση του περιβάλλοντος :

$$R-L \rightarrow EL = SL - 2TL + TS - RL > DT \quad (3.4.9\alpha)$$

$$N-L \rightarrow EL = SL - 2TL + TS - (NL - DI) > DT \quad (3.4.9\beta)$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχει και η περίπτωση σε εφαρμογές ενεργητικού SONAR, η πηγή και ο δέκτης να βρίσκονται σε διαφορετικές διατάξεις (Σχήμα 3.15).

¹⁰ Μονοστατικό καλείται ένα SONAR όταν πηγή και δέκτης βρίσκονται στην ίδια διάταξη.



Σχήμα 3.15 Σχηματική παράσταση διστατικού ενεργητικού SONAR

Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε **διστατικό** (*bistatic*) SONAR και στις ανωτέρω σχέσεις αλλάζει η απώλεια διάδοσης που αποτελείται πλέον από δύο προσθετούς που αφορούν απώλεια από την πηγή στο στόχο (TL_1) και από το στόχο στο δέκτη (TL_2) αντίστοιχα

$$R-L \rightarrow EL = SL - (TL_1 + TL_2) + TS - RL > DT \quad (3.4.10\alpha)$$

$$N-L \rightarrow EL = SL - (TL_1 + TL_2) + TS - (NL - DI) > DT \quad (3.4.10\beta)$$

Σημειώνουμε καταληκτικά ότι στην εξίσωση SONAR μπορούν να υπεισέλθουν περισσότεροι όροι, εάν μπορούν να μοντελοποιηθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια οι μηχανισμοί εισαγωγής ακουστικής ενέργειας στο σύστημα (π.χ. από εξωτερικές πηγές, ή από φαινόμενα αντήχησης) καθώς επίσης και να διαχωριστούν οι όροι που αναφέρονται σε απώλεια διάδοσης, ώστε εκφραστούν χωριστά η απώλεια διάδοσης στην υδάτινη στήλη και απώλεια διάδοσης πυθμένα. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις προσεγγιστικού υπολογισμού της απώλειας διάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις και σε ρηχές θάλασσες όταν χρησιμοποιείται η θεωρία ακτίνων για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου. Λεπτομέρειες αυτής της μορφής δεν θα μας απασχολήσουν.

4. Εισαγωγή στην επεξεργασία ακουστικών σημάτων

Τα ακουστικά σήματα που καταγράφονται στο θαλάσσιο περιβάλλον ποικίλουν ανάλογα με την πηγή τους, ενώ η επιλογή του τύπου ενός ακουστικού σήματος που εκπέμπεται στη θάλασσα για συγκεκριμένους λόγους εξαρτάται από την εφαρμογή για την οποία εκπέμπεται. Κύρια κριτήρια επιλογής των σημάτων που εκπέμπονται από ενεργητικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην ακουστική ωκεανογραφία είναι η μεταφορά όσο το δυνατό μεγαλύτερης ενέργειας σε μεγάλη απόσταση και η επίτευξη χαρακτηριστικών λήψης που να είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και αξιοποιήσιμα. Με την έννοια αυτή ένα ημιτονοειδές κύμα (κύμα σταθερής συχνότητας ω , άπειρης διάρκειας), όπως αυτό στο οποίο βασίσαμε τη μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο, μια και δεν έχει καλά χαρακτηριστικά αναγνωρισιμότητας, όπως π.χ. μέτρησης χρόνου. Από την άλλη πλευρά, σήματα που εκπέμπονται από φυσικές πηγές έχουν τα δικά τους χαρακτηριστικά ως προς το εύρος συχνοτήτων από τα οποία συντίθενται. Είναι επομένως δύσκολο στα πλαίσια ενός εισαγωγικού μαθήματος να συζητήσει κανείς τα χαρακτηριστικά κάποιων από τα σήματα αυτά, έχει όμως νόημα να αναφερθούμε σε στοιχεία της επεξεργασίας τους που θα βοηθήσουν να κατανοήσουμε έννοιες όπως του εύρους του σήματος (bandwidth) του μετασχηματισμού από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων κ.λ.π. . Έτσι θα γίνει κατανοητή και η επιμονή μας στην αναφορά των λύσεων που αφορούν αρμονικά σήματα.

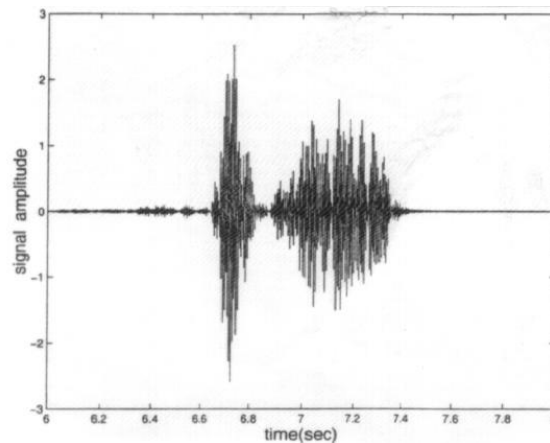
4.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.

Τα ακουστικά σήματα λαμβάνονται και καταγράφονται στο πεδίο του χρόνου. Εάν τα θεωρήσουμε με την αναλογική τους έκφραση, περιγράφονται ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου $f(t)$. Για παράδειγμα ένα μονοχρωματικό σήμα που οδεύει κατά μήκος του άξονα r μπορεί να έχει την έκφραση.

$$f(t) = A \sin(kr - \omega t) \quad (4.1.1)$$

Ένα τυχαίο σήμα (ντετερμινιστικό όμως ως προς την έκφρασή του) μπορεί να συντεθεί από πολλές αρμονικές, συνιστώσες δηλαδή σήματα που έχουν την ως άνω μορφή (4.1.1) αλλά που μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλάτος και τη συχνότητα. Εάν θεωρήσουμε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων, η συνεισφορά κάθε μίας από τις συχνότητες στο σήμα, χαρακτηρίζεται μέσω της συνάρτησης $F(\omega)$. Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος συναρτήσεων που χαρακτηρίζει το οποιοδήποτε αναλογικό σήμα. Ο υπολογισμός του κάθε μέλους του ζεύγους μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε το άλλο, μέσω του **Μετασχηματισμού Fourier** (Fourier Transform) που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Εάν οι ως άνω συναρτήσεις δεν είναι συνεχείς αλλά δίδονται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών t και ω (t_i, ω_j), η σχέση τους δίδεται μέσω του **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier** (Discrete Fourier Transform). Με δεδομένη τη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία, η τελευταία αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στις δύο περιπτώσεις αρχίζοντας από τη συνεχή περίπτωση.



Σχήμα 4.1 Καταγραφή ενός ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου

4.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Τα ζεύγη των μιγαδικών εν γένει συναρτήσεων $f(t)$ και $F(\omega)$ καλούνται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, και συμβολίζονται ως $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, όταν σχετίζονται μέσω των εξισώσεων

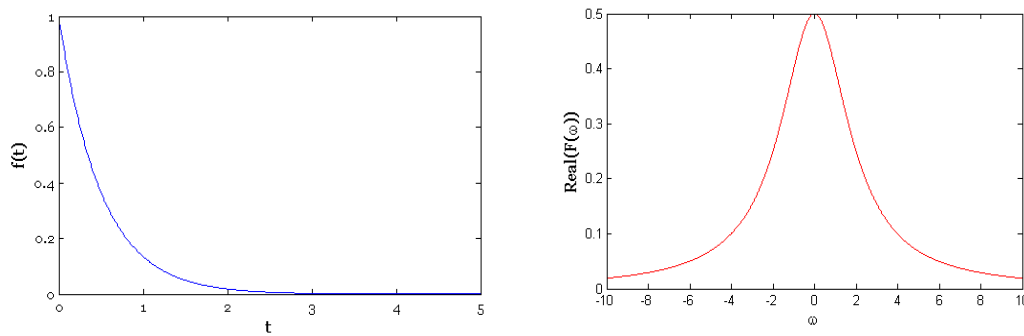
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.3)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις υποθέτουμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής του Cauchy¹¹.

Η συνάρτηση $F(\omega)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ και συμβολίζεται και ως $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ ενώ η $f(t)$ χαρακτηρίζεται ως αντίστροφος μετασχηματισμός της $F(\omega)$ και συμβολίζεται ως $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\}$. Να σημειώσουμε εδώ, ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $F(\omega)$ και $f(t)$ για τις πρακτικές εφαρμογές αναφέρεται στο μέτρο τους π.χ. ($|F(\omega)|$), που είναι και ένας ενεργειακός δείκτης πολύ χρήσιμος στις εφαρμογές ή στο πραγματικό μέρος της $F(\omega)$.

¹¹ Δηλαδή για το ολοκλήρωμα ισχύει μια σχέση της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x(t) dt$



Σχήμα 4.2 Παράδειγμα του σήματος της σχέσης 4.1.4 στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Οι τιμές αφορούν $\alpha=2$.

Για παράδειγμα, εάν $f(t) = e^{-at}$ $a > 0$ $t > 0$ (Σχήμα 4.2), η $F(\omega)$ είναι

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a + i\omega} \quad (4.1.4)$$

Η αντίστροφη σχέση 4.1.3 μπορεί να διαπιστωθεί από τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Σημειώνουμε εδώ ως πρώτη βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier τη **γραμμικότητα**.

Η γραμμικότητα εκφράζεται ως εξής :

Εάν $f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$ για $i=1, \dots, N$ και c_i αυθαίρετες πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές, τότε ισχύει :

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega) + \dots + c_n F_n(\omega) \quad (4.1.5)$$

Όπως είπαμε, οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ είναι γενικά μιγαδικές.

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης μέσω ημίτονου και συνημίτονου (τύπος Euler) και την ιδιότητα της γραμμικότητας μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε εκφράσεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ως άνω συναρτήσεων :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.6a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) \cos \omega t - f_1(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.6\beta)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (4.1.6\gamma)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (4.1.6\delta)$$

Στην πράξη, αναφερόμενοι σε επεξεργασία σημάτων, οι συναρτήσεις $f(t)$ αντιπροσωπεύουν μετρήσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου και είναι πραγματικές συναρτήσεις ($f_2(t) = 0$). Στην περίπτωση αυτή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (4.1.7)$$

Άλλες σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι $R(-\omega) = R(\omega)$ και $X(-\omega) = -X(\omega)$. Έτσι, υποδηλώνοντας με * τον συζυγή, βλέπουμε ότι ισχύει και μια σχέση της μορφής $F^*(\omega) = F(-\omega)$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, ($f(-t) = f(t)$) παίρνουμε $X(\omega) = 0$. Δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης δίνει πραγματική συνάρτηση. Αντίστοιχα εάν $f(-t) = -f(t)$ (περιττή συνάρτηση) παίρνουμε $R(\omega) = 0$.

Παραθέτουμε στη συνέχεια χωρίς απόδειξη μια σειρά από ενδιαφέροντα θεωρήματα αντιστοίχισης που ισχύουν για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει τις αντιστοιχίες ως άσκηση.

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$	
$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$	Συμμετρία (Δυσκότητα)
$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$	Συζυγία
$f^*(-t) \leftrightarrow F^*(\omega)$	
$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$	Αντιστροφή χρόνου
$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Αλλαγή κλίμακας
$\frac{1}{ a } f\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow F(a\omega)$	
$f(t-a) \leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega)$	Μετατόπιση χρόνου
$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega-\alpha)$	Μετατόπιση συχνότητας
$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)]$	Διαμόρφωση

4.1.2 Συνέλιξη

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ και τα αντίστοιχα δεύτερα μέλη των ζευγών του μετασχηματισμού Fourier $F_1(\omega)$ και $F_2(\omega)$.

Συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ονομάζουμε το ολοκλήρωμα

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (4.1.8)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει μία νέα συνάρτηση του χρόνου και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη των φίλτρων. Σημειώνουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε και το συμβολισμό $f_1(t) * f_2(t)$ για τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων. Επομένως θα θεωρήσουμε ότι ως προς το συμβολισμό ισχύει $f_1(t) * f_2(t) \equiv (f_1 * f_2)(t)$.

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $(f_1 * f_2)(t)$, έχουμε για $t = \tau + x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα σε ό,τι αφορά στο γινόμενο συναρτήσεων που περιγράφονται στο πεδίο των συχνοτήτων :

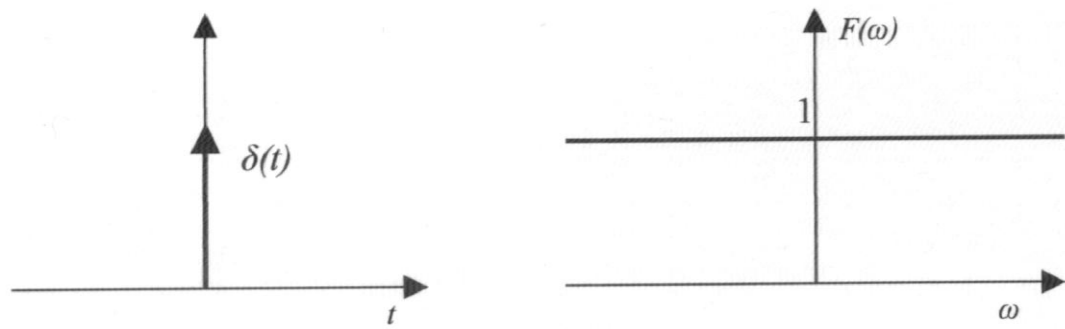
Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η συμβολικά : Εάν $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ και $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ τότε

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (4.1.9)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση) ότι

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (4.1.10)$$



Σχήμα 4.3 Ο παλμός δ.

Τέλος θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ενέργεια του σήματος παραμένει αναλλοίωτη με το μετασχηματισμό. Η ιδιότητα αυτή έρχεται ως συνέπεια της φόρμουλας του Parseval για συνεχή σήματα που είναι :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^* d\omega \quad (4.1.11)$$

Για $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ παίρνουμε :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.1.12)$$

που εκφράζει το ενεργειακό θεώρημα για το μετασχηματισμό Fourier. Θα το συναντήσουμε αργότερα, στην αναφορά μας στο θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

4.1.3 Ο παλμός δ

Σε πολλές εφαρμογές της ανάλυσης σημάτων συναντάμε συναρτήσεις με τη μορφή ενός παλμού δέλτα (delta function δ). Οι ιδιότητες της ειδικής αυτής συνάρτησης βασίζονται στην ορισμό της, που δίδεται μέσω της σχέσης

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad (4.1.13)$$

που ισχύει για κάθε συνάρτηση $\phi(t)$ που είναι συνεχής στο $t = 0$.

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (4.1.14)$$

που σημαίνει απλά ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δ είναι η μονάδα (1).

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.1.15)$$

Με άλλα λόγια, ένας παλμός δέλτα στο πεδίο του χρόνου (στιγμιαία διέγερση) μετασχηματίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων σε μία σταθερή συνάρτηση (Σχήμα 4.3).

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για τον αντίστροφο μετασχηματισμό, παίρνουμε :

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.16)$$

Εάν $f(t) = 1$ παίρνουμε

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.17)$$

Επομένως:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.18)$$

4.1.4 Περιοδικά σήματα – Σειρές Fourier

Το πέρασμα από το συνεχή μετασχηματισμό Fourier στο διακριτό είναι απαραίτητο μια και σήμερα η επεξεργασία των σημάτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ψηφιακή ανάλυση. Τα σήματα ψηφιοποιούνται και βέβαια η επεξεργασία γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο και για πεπερασμένες συχνότητες. Έτσι δεν είναι δυνατή η άμεση εφαρμογή του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier. Αναζητείται συνεπώς κάτι περισσότερο συνδεδεμένο με τα πραγματικά δεδομένα της ανάλυσης σημάτων. Ως πρώτο βήμα για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου. Το σήμα αυτό εκφράζεται μέσω της συνάρτησης $f(t)$ για την οποία ισχύει :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) \quad (4.1.19)$$

$$\text{όπου } f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

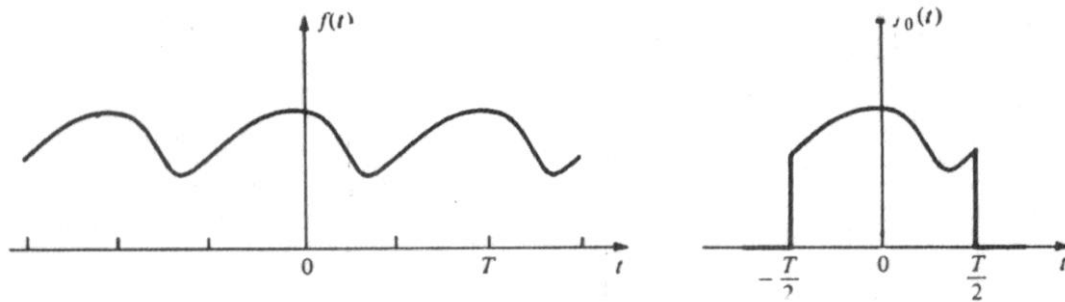
και T είναι η περίοδος του σήματος. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f_0(t)$ είναι η $F_0(\omega)$.

Εάν συμβολίσουμε με $\bar{\delta}(t)$ τη σειρά

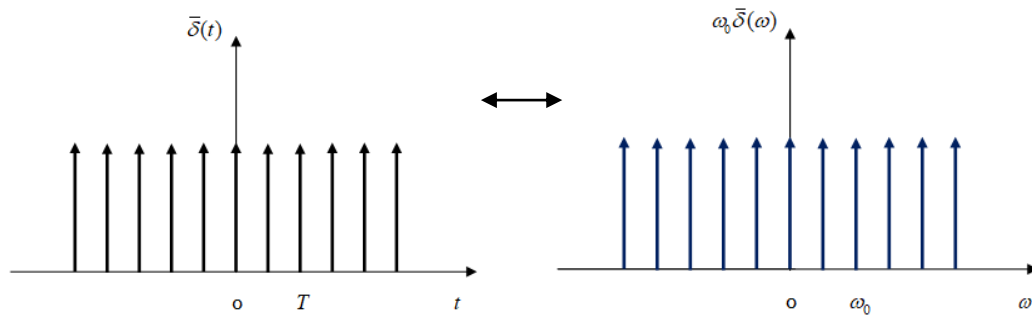
$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) \quad (4.1.20)$$

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ γράφεται ως

$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t) \quad (4.1.21)$$



Σχήμα 4.4 Περιοδικό σήμα

Σχήμα 4.5 Το ζεύγος των παλμών $\bar{\delta}(t)$, $\omega_0 \bar{\delta}(\omega)$

Συμβολίζοντας με $\bar{\delta}(\omega)$ τη σειρά, $\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ όπου $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$ (Σχήμα 4.5).

Στη συνέχεια παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μερών της 4.1.21 και με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης έχουμε :

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.1.22)$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας των συναρτήσεων δ , $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$.

Επομένως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης περιόδου T , αποτελείται από μία αλληλουχία παλμών δ σε αποστάσεις ω_0 μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα οδηγεί στην έκφραση της $f(t)$ μέσω σειράς Fourier. Πράγματι, εάν πάρουμε

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.23)$$

και τον αντίστροφο μετασχηματισμό στα δύο ακραία μέλη της εξίσωσης (4.1.22), οδηγούμεθα στη σχέση

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.24)$$

Αντίστοιχα, από την 4.1.22 βλέπουμε ότι η $F(\omega)$ γράφεται

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.1.25)$$

Οι συναρτήσεις $f(t)$, $F(\omega)$ αποτελούν το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier.

Παράδειγμα Για να έχουμε μια εποπτεία των ανωτέρω, θα αναφερθούμε στο σχήμα 4.6 (από Παρουλίσ) στο οποίο παρουσιάζεται η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) \quad \text{όπου} \quad f_0(t) = q_c(t) \quad \text{με}$$

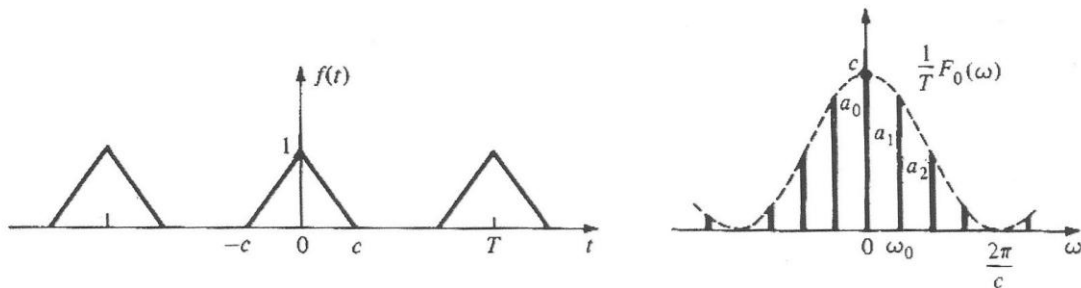
$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases} \quad (4.1.26)$$

και οι συντελεστές Fourier a_n της $f(t)$.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε (Άσκηση) ότι

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4\sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2} \quad (4.1.27)$$

ενώ από την (4.1.23) υπενθυμίζουμε ότι $a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$. Στο σχήμα φαίνονται τόσο οι συντελεστές a_n όσο και η συνάρτηση $\frac{1}{T} F_0(\omega)$ (δικεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 4.6 Η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ του παραδείγματος και οι συντελεστές a_n

Παρατηρούμε ότι στο πεδίο των συχνοτήτων, η περιοδικότητα της συνάρτησης $f(t)$ εκφράζεται με διακριτή αλληλουχία παλμών στις συχνότητες $\omega = n\omega_0, -\infty < n < \infty$ και επομένως στο πεδίο του χρόνου η συνάρτηση $f(t)$ αναπαρίσταται με σειρά και όχι με ολοκλήρωμα. Προσέξτε επίσης τα όρια ολοκλήρωσης στον υπολογισμό των συντελεστών a_n .

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί και ένα θεώρημα συνέλιξης για τα σήματα της ως άνω κατηγορίας. Έτσι, εάν

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.28)$$

τότε

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.29)$$

και

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} \quad (4.1.30)$$

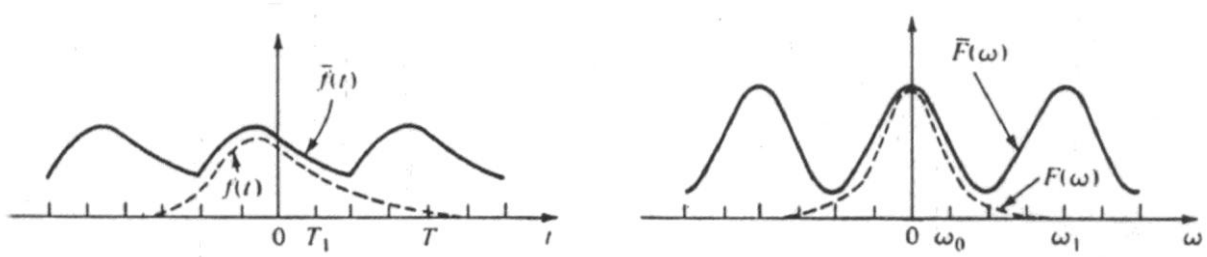
Τέλος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι εάν η περίοδος της συνάρτησης $f(t)$ αρχίζει τη χρονική στιγμή T_0 , τα όρια ολοκλήρωσης στην 4.1.23 είναι από T_0 έως $T_0 + T$. Είναι επίσης συνηθισμένο η ολοκλήρωση να γίνεται ως προς τη συχνότητα και όχι ως προς την κυκλική συχνότητα (πρβλ την αναφορά μας στα φίλτρα). Συμβολίζοντας με f τη συχνότητα και αλλάζοντας το συμβολισμό της συνάρτησης του χρόνου σε $x(t)$, για να αποφύγουμε τυχόν σύγχυση με το συμβολισμό της συχνότητας, γράφομε για το ζεύγος του μετασχηματισμού

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(2\pi f - 2\pi n f_0) \quad (4.1.31)$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (4.1.32)$$

εδώ, $f_0 = \frac{1}{T}$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ανωτέρω θεώρηση μπορεί να προκύψει και από τη θεωρία αναπαράστασης των περιοδικών συναρτήσεων με σειρές Fourier. Η έκφραση της $f(t)$ από την 4.1.24 (αντίστοιχα της $x(t)$ από την 4.1.31) είναι η κλασσική αναπαράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων με χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βάσης στην εκθετική τους μορφή.



Σχήμα 4.5 Οι συναρτήσεις $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$ (από Papoulis)

4.1.5 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Στόχος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι ο υπολογισμός του ζεύγους $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ όταν είναι γνωστές διακριτές τιμές της μίας ή της άλλης συνάρτησης. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να δει κανείς τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier ως μία προσπάθεια αριθμητικού υπολογισμού των ολοκληρωμάτων που ορίζουν το συνεχή μετασχηματισμό (Σχέσεις 4.1.2 και 4.1.3). Είναι προφανές ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier έχει άμεση εφαρμογή στη σημερινή ψηφιακή εποχή.

Θεωρούμε το ζεύγος $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ και τις σχετιζόμενες με αυτό νέες συναρτήσεις :

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1) \quad (4.1.33)$$

Η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T , ενώ η $\bar{F}(\omega)$ είναι επίσης περιοδική, με περίοδο ω_1 (Σχήμα 4.5). Οι σταθερές T και ω_1 είναι αυθαίρετες.

Μπορεί να δειχτεί ότι η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ γράφεται με τη μορφή ενός *αθροίσματος Poisson* (Poisson sum formula) ως

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.1.34)$$

Προφανώς, οι συντελεστές $F(n\omega_0)$ είναι οι συντελεστές Fourier της περιοδικής συνάρτησης $T\bar{f}(t)$ (πρβλ. Σχέση 4.1.24). Δηλαδή

$$F(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.35)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\bar{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-inT_1\omega} \quad , \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (4.1.36)$$

Οι συντελεστές $F(n\omega_0)$ μπορεί να θεωρηθούν ως διακριτές τιμές της συνάρτησης $F(\omega)$ αφού υπολογίζονται σε διακριτές τιμές του πεδίου των συχνοτήτων. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τις τιμές $n\omega_0$, το ολοκλήρωμα

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{με όρια στο άπειρο, μεταπίπτει στο πεπερασμένο ολοκλήρωμα}$$

4.1.35 αλλά για την συνάρτηση $\bar{f}(t)$.

Χρειαζόμαστε κάτι ανάλογο και για τη συνάρτηση $f(t)$. Δηλαδή ένα τρόπο υπολογισμού των διακριτών τιμών της στο πεδίο του χρόνου εάν γνωρίζουμε την μετασχηματισμένη της στο πεδίο συχνότητας. Επί πλέον θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα 4.1.35 με την μορφή σειράς.

Ας θεωρήσουμε την περιοδική συνάρτηση

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (4.1.37)$$

Εάν N είναι μία αυθαίρετη σταθερά και $T_1 = T/N$, οι διακριτές τιμές της $y(t)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w_N^{km} \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.38)$$

όπου $\omega_0 T_1 = \omega_0 T/N = 2\pi/N$.

Ο ακέραιος k γράφεται ως ένα άθροισμα $k = n + rN$, $n = 0, \dots, N-1$, $r = \dots, -1, 0, 1, \dots$ και αφού $w_N^N = 1$, $w_N^{km} = w_N^{(n+rN)m} = w_N^{nm}$.

Επίσης, η (4.1.38) γράφεται

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nm} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} \quad (4.1.39)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\bar{c}_N \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$, παίρνουμε

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{nm}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.40)$$

Έτσι παίρνουμε N εξισώσεις που ορίζουν μέσω των συντελεστών $\bar{c}_n$ τις διακριτές τιμές της συνάρτησης $y(t)$.

Τα ανωτέρω ισχύουν και για τη συνάρτηση $\bar{f}(t)$, όπως αυτή ορίζεται από την (4.1.34).

Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις

$$T_1 = T / N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0, \quad \text{έχουμε}$$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.41)$$

Η τελευταία έκφραση μας δίνει N εξισώσεις (για $m=0, \dots, N-1$), που μας δίνουν τις διακριτές τιμές $\bar{F}(n\omega_0)$ της περιοδικής συνάρτησης $\bar{F}(\omega)$, συναρτήσει των διακριτών τιμών $\bar{f}(mT_1)$ της περιοδικής συνάρτησης $\bar{f}(t)$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \sigma$ και $\omega_1 > 2\sigma$, τότε $F(\omega) = \bar{F}(\omega)$ για $|\omega| < \sigma$ και η λύση της 4.1.41 (τιμές $\bar{F}(n\omega_0)$) δίνει τις διακριτές τιμές της $F(\omega)$ δηλαδή $\bar{F}(n\omega_0) = F(n\omega_0)$. Περισσότερα για αυτή την αντιστοιχία θα δούμε παρακάτω.

Η σχέση (4.1.41) είναι της μορφής

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.42)$$

και μπορούμε να δείξουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.43)$$

Τα ζεύγη των συντελεστών που ορίζονται από τις σχέσεις (4.1.42) και (4.1.43) αποτελούν μία διακριτή σειρά ζευγών Fourier (discrete Fourier series pair) τάξης N . και θα συμβολίζονται με

$$a_n \leftrightarrow_N A_m$$

Η σειρά είναι περιοδική, δηλαδή ισχύει

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι για περιοδικά σήματα, η διακριτή σειρά Fourier μας δίνει μέσω των 4.1.35 και 4.1.36, διακριτές τιμές του σήματος στο πεδίο του

χρόνου και των συχνοτήτων. Μία δειγματοληψία με N τιμές επομένως στο ένα από τα δύο πεδία μας δίδει μία αντίστοιχη δειγματοληψία στο άλλο πεδίο, με τον ίδιο αριθμό σημείων.

Δεν χρειάζεται επομένως να καταφύγει κανείς σε ολοκληρώματα για να πάρει κάποιες από τις δύο τιμές. Υπάρχει βέβαια πάντα η απαίτηση επίλυσης ενός συστήματος N εξισώσεων. Οι υπολογισμοί γίνονται γρήγορα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, ωστόσο με ειδική τεχνική (**Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier** – *Fast Fourier Transform* ή *FFT*) είναι δυνατόν αυτοί να επιταχυνθούν σημαντικά.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι δειγματοληπτικές τιμές

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(mT_1 + kT), \quad \bar{F}(n\omega_0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0 + r\omega_1) \quad (4.1.44)$$

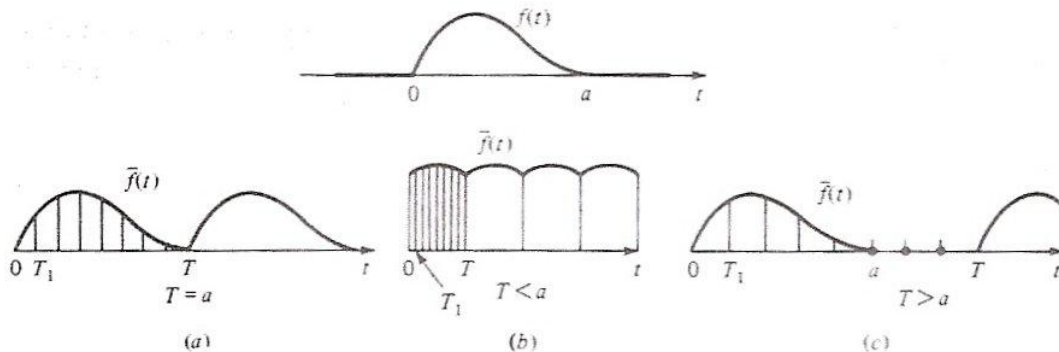
των συναρτήσεων $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$ ορίζουν ένα ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier, ως εξής:

$$\frac{1}{T} \bar{F}(n\omega_0) \leftrightarrow \bar{f}(mT_1)$$

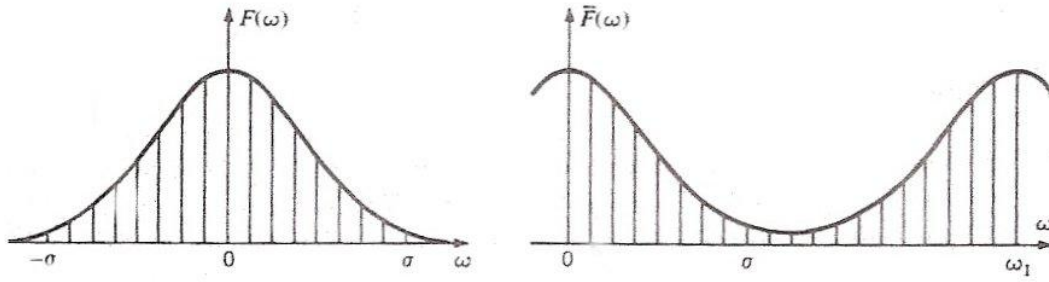
Συνεπώς, από την 4.1.43 παίρνουμε

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn} \quad (4.1.45)$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν έχουμε ένα τυχαίο σήμα στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ώστε να μειωθεί το λάθος που γίνεται όταν οι συντελεστές της $F(\omega)$ προσεγγιστούν κατά τα ανωτέρω με εκείνους της $\bar{F}(\omega)$. Το λάθος αυτό ($F(n\omega_0) - \bar{F}(n\omega_0)$) είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *aliasing error*.



Σχήμα 4.6 Υπολογισμός εναλλακτικού εύρους δειγματοληψίας (από Papoulis)



Σχήμα 4.7 Οι συναρτήσεις $F(\omega)$ και $\bar{F}(\omega)$ (από Papoulis)

Σε πραγματικά προβλήματα, ένα σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια όταν καταγραφεί στο πεδίο του χρόνου. Η «χρήσιμη» διάρκεια του σήματος, δηλαδή αυτή που αναφέρεται σε συγκεκριμένη εκπομπή μπορεί να είναι μικρότερη από την διάρκεια της καταγραφής. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το σήμα αυτό με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier θα πρέπει να θεωρήσουμε την «ενεργό» του διάρκεια, και στη συνέχεια να θεωρήσουμε μία περίοδο επανάληψης της κυματομορφής στο πεδίο του χρόνου, η οποία μπορεί να είναι και μεγαλύτερη από την ενεργό διάρκεια. (Σχήμα 4.6). Ας συμβολίσουμε με $f(t)$ το πραγματικό σήμα, με a την ενεργό διάρκεια και με T την περίοδο του «τεχνητού» περιοδικού σήματος $\bar{f}(t)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα τυχαίο σήμα $f(t)$ το οποίο περιορίζεται στο διάστημα $(0, a)$ και είναι μηδέν έξω από το διάστημα αυτό (Σχήμα 4.6). Στην πράξη αυτό μπορεί να γίνει όταν από ένα καταγεγραμμένο σήμα αφαιρεθούν στοιχεία της καταγραφής πέρα από ένα διάστημα μέσα στο οποίο θεωρείται ότι το σήμα έχει ένα σημαντικό πλάτος. Έτσι παίρνουμε την «ενεργό» διάρκεια. Σημειώνουμε ότι έξω από το διάστημα αυτό εάν έχει καταγραφεί κάτι θεωρείται ότι είναι θόρυβος και γι αυτό αμελείται θεωρούμενος ως 0. Θα πρέπει τώρα να ορίσουμε τις παραμέτρους T και N για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός. Τα βήματα που τυπικά πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να επιτευχθεί βέλτιστη ανάλυση του σήματος και δυνατότητα ακριβούς μετάβασης από το ένα πεδίο στο άλλο και αντίστροφα, είναι τα εξής :

1. Υπολογισμός του βήματος δειγματοληψίας. Επιλέγουμε $T=a$ ενώ N είναι η επιλεγείσα τάξη του μετασχηματισμού. Τότε $f(t)=\bar{f}(t)$ στο διάστημα $(0, T)$ (Σχήμα 4.6). Χρησιμοποιώντας τα δείγματα της $f(t)$ στο διάστημα αυτό, που είναι $f(mT_1)$, $T_1=T/N$, $m=0,1,\dots,N-1$ ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα μας δώσει ακριβώς τα δείγματα της $\bar{F}(n\omega_0)$, $\omega_0=2\pi/T$, $n=0,1,\dots,N-1$. Τα δείγματα $F(n\omega_0)$ της $F(\omega)$ μπορούν να προσεγγιστούν από εκείνα της $\bar{F}(n\omega_0)$ εάν η $F(\omega)$ περιορίζεται ουσιαστικά σε ένα διάστημα $(-\sigma, \sigma)$ και παράλληλα $\sigma < \omega_1/2$, όπου $\omega_1 = N\omega_0$. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δει κανείς από την 4.1.45 ότι θα ισχύει

$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.46)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η $\bar{F}(n\omega_0)$ υπολογίζεται για $n=0, \dots, N-1$. Οι προσεγγίσεις όμως $F(n\omega_0)$ θα πρέπει να εκτείνονται και στο αρνητικό φάσμα των συχνοτήτων. Για τον λόγο αυτό και λόγω συμμετρικότητας χρησιμοποιούνται οι τιμές που έχουν υπολογιστεί για $n > N/2$ για να υπολογιστούν οι τιμές για $n < 0$ ως εξής :

$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ \bar{F}(N\omega_0 + n\omega_0) & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.47)$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός για την $F(n\omega_0)$ είναι $\omega_1 = 2\pi / T_1 = N\omega_0$. Δείτε σχετικά και το σχήμα 4.7.

Στην περίπτωση που το πραγματικό εύρος συχνοτήτων του σήματος είναι μεγαλύτερο από το σ (θετικές τιμές) υπάρχει λάθος προσέγγισης (*Aliasing Error*), ενώ παράλληλα δεν υπολογίζεται όλο το φάσμα συχνοτήτων του σήματος. Προσέξτε ότι το ω_1 προήλθε από τις επιλογές μας : $T_1 = T / N$.

2. Για να μειωθεί το λάθος προσέγγισης της $F(\omega)$ θα πρέπει να αυξηθεί το ω_1 . Δηλαδή να αυξηθεί σημαντικά το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός ώστε κατά το δυνατόν να καλύπτει όλο το εύρος των «ενεργών» συχνοτήτων του σήματος. Για N σταθερό, η αύξηση του ω_1 συνεπάγεται μείωση του T . Αυτό σημαίνει ότι θα θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο που δεν «φτάνει» για να περιγράψει πλήρως την ωφέλιμη χρονοσειρά. Ο μετασχηματισμός μπορεί και πάλι να μας δώσει τις τιμές δειγματοληψίας της $\bar{f}(nT_1)$ που όμως δεν είναι πλέον ίσες με τις τιμές της $f(nT_1)$ (Σχήμα 4.6β). Με άλλα λόγια, τα $\bar{f}(nT_1)$ υπολογίζονται ακριβώς, αλλά όχι τα $f(nT_1)$ και συνεπώς παραμένει λάθος προσέγγισης. Επί πλέον η ανάλυση του σήματος στο πεδίο συχνοτήτων δεν θα είναι η καλύτερη δυνατή αφού για σταθερό N , μεγάλο ω_1 σημαίνει και μεγάλο ω_0 (συχνότητα δειγματοληψίας στο πεδίο των συχνοτήτων).

3. Για να αυξηθεί η ανάλυση (resolution) στο πεδίο των συχνοτήτων θα πρέπει να μειωθεί το ω_0 . Αυτό σημαίνει αύξηση του T και κατά το δυνατόν επιλογή του $T > a$ (Σχήμα 4.6). Τότε οι τιμές των δειγμάτων της $f(nT_1)$ θα είναι ίσες με εκείνες της $\bar{f}(nT_1)$ για n τέτοιο ώστε να ισχύει $nT_1 < a$. Για τις υπόλοιπες τιμές, είναι μηδέν. Ωστόσο, επειδή στην περίπτωση αυτή το ω_1 μειώνεται ($\omega_1 = N\omega_0$), το λάθος προσέγγισης της $F(\omega)$ θα αυξηθεί. Για να παραμείνει σε λογικά επίπεδα θα πρέπει να ισχύει και $\omega_1 > 2\sigma$. Αυτό μας οδηγεί και στο θεώρημα της δειγματοληψίας των Shannon- Nyquist που ορίζει ότι όταν το εύρος συχνοτήτων ενός σήματος έχει μέγιστη συχνότητα f_σ (αντίστοιχη κυκλική συχνότητα σ), η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος θα πρέπει να είναι $T_1 = \frac{1}{2f_\sigma} = \frac{\pi}{\sigma}$ για μια ορθή

αναπαραγωγή του σήματος στο πεδίο του χρόνου. Με άλλα λόγια το σήμα μπορεί να αναπαραχθεί σωστά εάν δειγματοληφθεί με τη συγκεκριμένη συχνότητα τουλάχιστον.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος περιλαμβάνει πολλές παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογιστούν με αντικρουόμενα κριτήρια. Επίσης θα πρέπει να υπάρχει μια κατ' αρχήν εκτίμηση για το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος και για την ενεργό του διάρκεια. Είναι σημαντικό λοιπόν να καθορισθούν οι ανάγκες της επεξεργασίας μας με βάση τα πραγματικά δεδομένα του σήματος (διάρκεια, εύρος συχνοτήτων, ανάλυση) ώστε να επιτευχθεί ο μέγιστος βαθμός ακρίβειας. Περισσότερη συζήτηση για θέματα επεξεργασίας σημάτων ξεφεύγει από τον σκοπό των σημειώσεων και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε πλέον ειδικά βιβλία (π.χ. Papoulis).

4.2 Φίλτρα και θόρυβος.

Για να συζητήσουμε τα φίλτρα και τη λήψη σημάτων σε περιβάλλον θορύβου, χρειάζεται να γίνει μία μικρή εισαγωγή, σε ό,τι αφορά την έννοια του συστήματος. Δεν θα επεκταθούμε όμως σε πολλές λεπτομέρειες καθώς αυτές ξεφεύγουν από το περιεχόμενο του μαθήματος. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν σε ειδικά εγχειρίδια, όπως του Papoulis (Signal Analysis).

4.2.1 Συστήματα

Ένα «σύστημα» χαρακτηρίζεται από έναν κανόνα L που εάν πάρει ως δεδομένη μία συνάρτηση f , την μετασχηματίζει σε μία άλλη g . Γράφουμε επομένως

$$g = L(f) \quad (4.2.1)$$

Ένα σύστημα είναι «διακριτό» εάν ο κανόνας μετασχηματίζει μία ακολουθία f_n σε μία ακολουθία g_n

$$g_n = L(f_n) \quad (4.2.2)$$

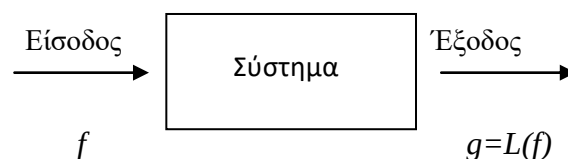
Η ακολουθία f_n ονομάζεται **είσοδος** και η ακολουθία g_n ονομάζεται **έξοδος** του συστήματος.

Εάν επί πλέον η σχέση L είναι γραμμική, δηλαδή εάν ισχύει

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 L(f_1) + a_2 L(f_2) \quad (4.2.3)$$

για τυχαία a_1, a_2, f_1, f_2 , τότε το σύστημα ονομάζεται «γραμμικό».

Ο συμβολισμός του συστήματος έχει τη μορφή



4.2.2 Φίλτρα

Τα φίλτρα είναι **γραμμικά** συστήματα που μετασχηματίζουν ένα σήμα είτε αναλογικό είτε ψηφιακό σε κάποιο άλλο, με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τον κανόνα L .

Η χρήση των φίλτρων είναι προφανής. Στις μετρήσεις ενός ακουστικού σήματος υπεισέρχονται πάντα ανεπιθύμητες συνιστώσες που χαρακτηρίζονται συνήθως ως «θόρυβος». Επιθυμούμε να πάρουμε σήμα στην έξοδο του μετρητικού συστήματος με δεδομένα χαρακτηριστικά και αυτό μπορεί να γίνει με κατάλληλη σχεδίαση του φίλτρου δηλαδή με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης που χαρακτηρίζει τον κανόνα L , ώστε να τονίζονται τα χαρακτηριστικά του επιθυμητού σήματος και να υποβαθμίζονται αντίστοιχα τα χαρακτηριστικά του θορύβου. Μάλιστα, σύμφωνα με τον Papoulis, φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η έξοδος είναι μηδενική έξω από μία συγκεκριμένη περιοχή B του πεδίου των συχνοτήτων. Ο συγκεκριμένος ορισμός τονίζει τη σημασία των φίλτρων για την παραγωγή σημάτων απαλλαγμένων από τις ανεπιθύμητες συχνότητες.

Με δεδομένο ότι τα σήματα είναι συναρτήσεις ή ακολουθίες που δίδονται στο πεδίο του χρόνου ή των συχνοτήτων, ο κανόνας L εκφράζεται και αυτός αναλόγως και μάλιστα οι δύο εκφράσεις αποτελούν ζεύγη μετασχηματισμού Fourier. Συνήθως συμβολίζουμε τον κανόνα L με $H(f)$ στο πεδίο των συχνοτήτων και με $h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την συχνότητα (f) παράλληλα με την κυκλική συχνότητα (ω) ως το όρισμα στο πεδίο συχνοτήτων. Ο λόγος είναι ότι οι περισσότερες αναφορές στο πρόβλημά μας έχουν ως μεταβλητή την συχνότητα. Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να γραφεί και για την περίπτωση της συχνότητας με απλή αλλαγή μεταβλητής από ω σε f

$$h(t) \leftrightarrow H(f) \quad (4.2.4)$$

Οι συναρτήσεις H και h ονομάζονται αντίστοιχα «**συναρτήσεις μεταφοράς**» (*transfer function*) και «**συνάρτηση απόκρισης παλμού**» (*impulse response function*) αντίστοιχα.

Ως είσοδος στο φίλτρο δίδεται ένα σήμα με ζεύγος Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(f) \quad (4.2.5)$$

Επειδή η σύνθεση στο πεδίο των συχνοτήτων είναι άμεση, προτιμάμε να ξεκινάμε την ανάλυσή μας σ' αυτό το πεδίο. Έτσι η έξοδος του φίλτρου θα είναι

$$G(f) = F(f)H(f) \quad (4.2.6)$$

Η χρονική εξάρτηση του σήματος εξόδου προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και είναι

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)H(f)e^{i2\pi ft} df \quad (4.2.7)$$

Το σήμα αυτό μπορεί να προκύψει από τον υπολογισμό της συνέλιξης των f και h στο πεδίο του χρόνου.

$$g(t) = f(t) * h(t) \quad (4.2.8)$$

Αξίζει ακόμη να πούμε ότι η εν σειρά σύνθεση φίλτρων ακολουθεί αντίστοιχους κανόνες. Δηλαδή, εάν δουλεύουμε στο πεδίο των συχνοτήτων, οι συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν τα φίλτρα (αποκρίσεις) πολλαπλασιάζονται, ενώ στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται η συνέλιξη. Έτσι, για δύο φίλτρα αποκρίσεων

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(f) \quad h_2(t) \leftrightarrow H_2(f) \quad (4.2.9)$$

η σύνθεση δίδει

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad H(f) = H_1(f)H_2(f) \quad (4.2.10)$$

Στο σχήμα 4.8 βλέπουμε μερικές χαρακτηριστικές μορφές που παίρνει η συνάρτηση μεταφοράς (μέτρο) ιδανικών φίλτρων στο πεδίο των συχνοτήτων (χρησιμοποιούμε ξανά κυκλική συχνότητα).

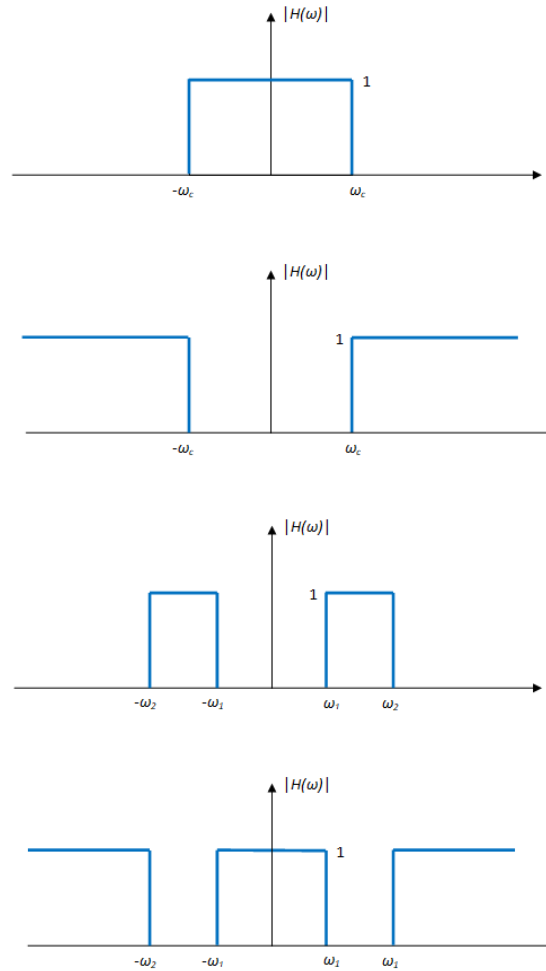
Το πρώτο φίλτρο **χαμηλοπερατό** (*low pass*) αφήνει να περνούν οι χαμηλές συχνότητες ενώ κόβει τις υψηλές. Το δεύτερο **υψηλοπερατό** (*high pass*) αφήνει να περνούν οι υψηλές συχνότητες. Το τρίτο φίλτρο **ζωνοπερατό** (*band pass*) είναι σχεδιασμένο για να περνούν ενδιάμεσες συχνότητες, ενώ το τέταρτο που χαρακτηρίζεται **ζωνοφρακτό** (*band stop*) αποκόπτει ενδιάμεσες συχνότητες. Προσέξτε ότι τα φίλτρα αυτά δεν μεταβάλλουν το πλάτος του σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων, ενώ λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι άρτιες ενώ εμφανίζονται στο σχήμα και οι αρνητικές συχνότητες.

Σε πολλές εφαρμογές το μέγεθος που ενδιαφέρει έχει ενεργειακό περιεχόμενο και με την έννοια αυτή προτιμάται η αναφορά μας στην μέση τετραγωνική έξοδο ενός φίλτρου που ορίζεται από τη σχέση

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (4.2.11)$$

Το μέγεθος αυτό είναι το ίδιο εάν ολοκληρώσουμε το φάσμα του σήματος (μέτρο) στο πεδίο των συχνοτήτων (βλ. Ενεργειακό θεώρημα, σχέση 4.1.12 με την παρατήρηση ότι $\omega = 2\pi f$). Παίρνομε έτσι:

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df \quad (4.2.12)$$



Σχήμα 4.8 Μερικές χαρακτηριστικές κατηγορίες ιδανικών φίλτρων.

Μπορούμε ακόμη να αντικαταστήσουμε το τετράγωνο του μέτρου του σήματος με μία μέση τιμή (εάν το εύρος του σήματος είναι σχετικά μικρό) $\langle |F(f)|^2 \rangle$ και να γράψουμε το ολοκλήρωμα 4.2.12 ως

$$I_{hh} = 2 \langle |F(f)|^2 \rangle \int_0^\infty |H(f)|^2 df \quad (4.2.13)$$

4.2.3 Θόρυβος

Ο θόρυβος είναι μία υπέρθεση τυχαίων σημάτων που διαδίδονται σε ένα ακουστικό μέσον και δεν έχουν σχέση με την επιθυμητή εκπομπή ήχου από κάποια πηγή. Στο θόρυβο πολλές φορές προσμετράμε τον ηλεκτρονικό θόρυβο. Στη θάλασσα ο θόρυβος προέρχεται από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, από τα πλοία που πλέουν στη θάλασσα, από ψάρια, από τη βροχή, από σεισμικά κύματα και πολλές άλλες αιτίες. Η διάρκεια ενός τυχαίου σήματος όπως αυτό του θορύβου είναι μεγάλη (στην πραγματικότητα άπειρη) αλλά θα πρέπει να μπορούμε να εκφράσουμε ενεργειακά το σχετικό μέγεθος. Έτσι, προχωράμε σε μετρήσεις του σήματος

πεπερασμένης διάρκειας T και υπολογίζουμε μέσα τετραγωνικά μεγέθη του δείγματος μέσα σε αυτή τη χρονική διάρκεια. Έτσι, εάν συμβολίσουμε τη μέτρηση (δείγμα) με $n(t)$, η μέση τετραγωνική του τιμή είναι

$$\langle |n(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |n(t)|^2 dt \quad (4.2.14)$$

όπου ο χρόνος T είναι πολύ μεγαλύτερος από την περίοδο της χαμηλότερης σημαντικής συχνότητας που αναμένουμε στο φάσμα του θορύβου. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε ως ελάχιστη συχνότητα τα 20 Hz (όριο ακουστότητας στον αέρα) η διάρκεια του δείγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 1/20 sec που είναι η περίοδος της ελάχιστης αυτής συχνότητας.

Το σήμα του θορύβου $n(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier που τον συμβολίζουμε με $S(f)$. Εάν χρησιμοποιηθεί φίλτρο $H(f)$ για την καταγραφή του θορύβου, στην έξοδό του θα έχουμε φασματικό περιεχόμενο $S(f)H(f)$. Από το ενεργειακό θεώρημα που έχουμε συναντήσει και τις σχέσεις 4.2.11 και 4.2.12, για την έξοδο του φίλτρου $g_n(t)$ θα μπορούσαμε να γράψουμε μία σχέση της μορφής :

$$\langle |g_n(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_n(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |S(f)|^2 |H(f)|^2 df \quad (4.2.15)$$

Συνήθως το μέγεθος $|S(f)|^2$ το συμβολίζουμε με $S_{nn}(f)$ και ονομάζεται **φασματική πυκνότητα** (*spectral density*) του θορύβου. Έχει μονάδες pascals στο τετράγωνο ανά μονάδα συχνότητας (Pa^2/Hz). Αντίστοιχες μονάδες έχει βέβαια και το μέγεθος $|H(f)|^2$ καθώς και το $|S(f)|^2$. Η ανωτέρω σχέση 4.2.15 γράφεται :

$$\langle |g_n(t)|^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} S_{nn}(f) |H(f)|^2 df = \quad (4.2.15\alpha)$$

Πολλές φορές, το αριθμητικό μέγεθος που εμφανίζεται στις αναφορές στα φασματικά επίπεδα θορύβου συμβολίζεται με $P_{nn}(f)$ και αναφέρεται στο διπλάσιο της φασματικής πυκνότητας (αναφορά μόνο σε θετικές συχνότητες) :

$$P_{nn}(f) = 2S_{nn}(f)$$

Οι μετρήσεις του θορύβου αναφέρονται συνήθως και στο μέγεθος **φασματικό επίπεδο** (*spectrum level*) σε dB re p_{ref} / Hz (συνήθως $p_{ref} = 1\mu\text{Pa}^2/\text{Hz}$) με βάση τη σχέση

$$\text{Φασματικό επίπεδο} \equiv 10 \log_{10} \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \text{ dB re } p_{ref} / \text{Hz} \quad (4.2.16)$$

Ολοκληρώνοντας το φασματικό επίπεδο σε όλο το φάσμα του θορύβου (περιοχή συχνοτήτων) παίρνομε το **Επίπεδο Θορύβου** (*Noise Level-NL*) που συναντήσαμε στο κεφάλαιο που αφορούσε την εξίσωση Sonar.

Προσέξτε ότι η ολοκλήρωση γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα, για να προκύψει το επίπεδο θορύβου. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ότι για να υπολογιστεί το επίπεδο θορύβου θα πρέπει πρώτα να ολοκληρωθεί στην ενεργό περιοχή συχνοτήτων η φασματική πυκνότητα. Έτσι, εάν π.χ. είχαμε σταθερό φασματικό επίπεδο N σε ένα εύρος συχνοτήτων B , το Επίπεδο Θορύβου θα ήταν

$$NL = N + 10 \log_{10} B \quad \text{dB re } 1\mu\text{Pa} \quad (4.2.17)$$

Αναλύουμε το ως άνω αποτέλεσμα για να γίνει περισσότερο αντιληπτό : Από τον ορισμό του φασματικού επιπέδου έχουμε :

$$N = 10 \log_{10} \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \quad (4.2.16a)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] = 10^{\frac{N}{10}}$ για $f \in B$. Ολοκληρώνοντας

την φασματική πυκνότητα στην περιοχή συχνοτήτων B θα πάρουμε :

$$B \times \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] = B \times 10^{\frac{N}{10}} \quad (4.2.18)$$

που αντιπροσωπεύει το ενεργειακό περιεχόμενο του θορύβου στην ενεργό περιοχή συχνοτήτων.

Επομένως, το επίπεδο θορύβου θα είναι :

$$NL = 10 \log_{10} \left[B \times \frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \quad \text{dB} = 10 \log_{10} (B \times 10^{\frac{N}{10}}) = N + 10 \log_{10} B$$

Δοθέντος τώρα ενός σήματος που η φασματική του ανάλυση μας δίδει το μέγεθος $F(f)$ (μέτρηση στο πεδίο των συχνοτήτων), ως **Λόγο Σήματος προς Θόρυβο** (*Signal to Noise Ratio*) ορίζουμε το πηλίκο των αντίστοιχων φασματικών μεγεθών :

$$S / N = \frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \quad (4.2.19)$$

και εκφρασμένο σε μονάδες dB

$$S / N \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \right) \quad (4.2.20)$$

4.2.4 Ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος

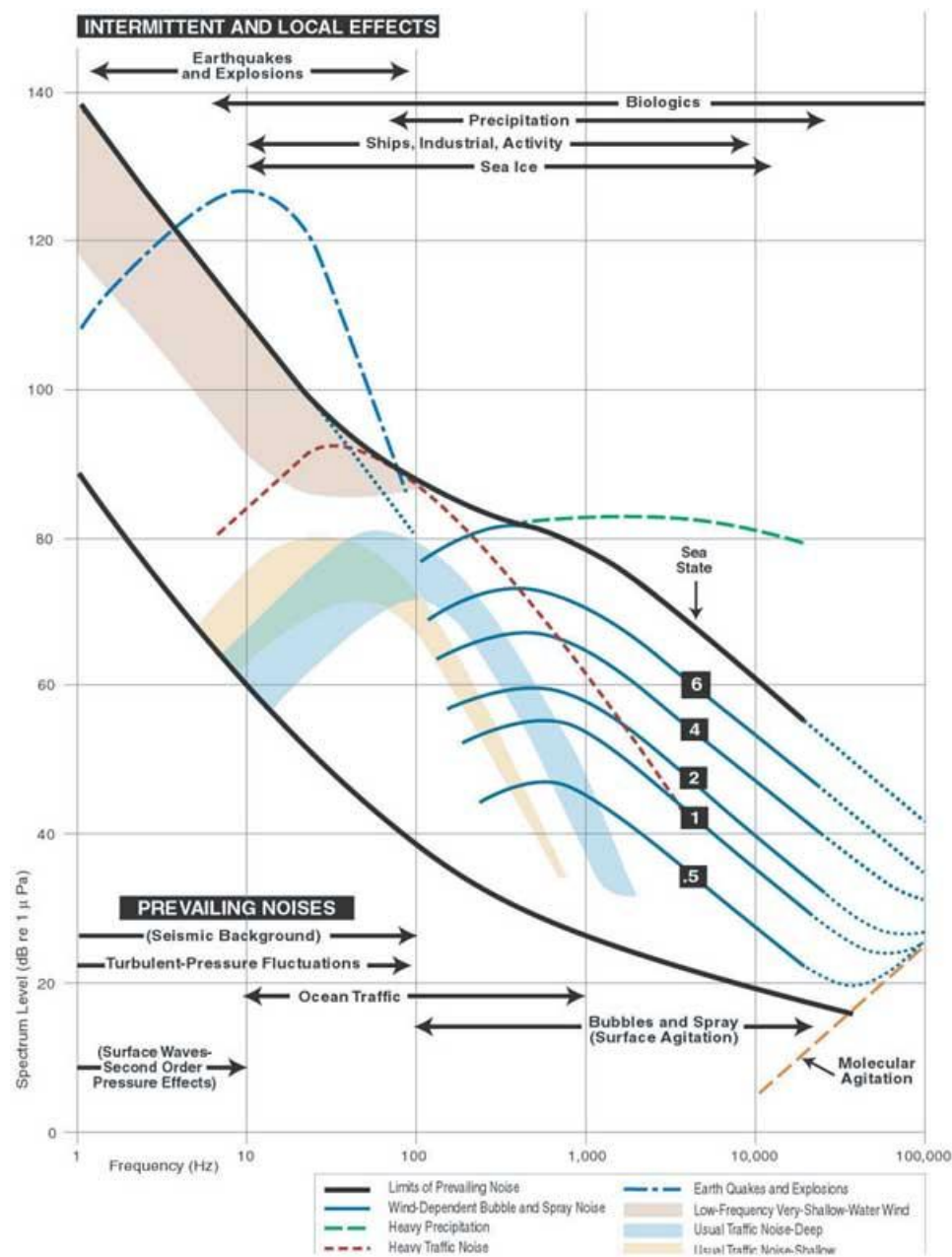
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος (Ambient Noise) οφείλεται σε διάφορους μηχανισμούς που τον παράγουν στη θάλασσα.

Στις χαμηλές συχνότητες η βασική αιτία είναι η σεισμική δραστηριότητα (υποθαλάσσια) που προκαλεί ήχους με μεγάλες περιόδους και φυσικά μικρές συχνότητες. Καθώς ανεβαίνουμε συχνότητα, ο θόρυβος από τη μηχανολογική εγκατάσταση των πλοίων και κυρίως την έλικα κυριαρχεί και είναι η βασική πηγή θορύβου ανάμεσα στα 10 Hz και στα 500 Hz. Ο θόρυβος αυτός χαρακτηρίζεται ως *θόρυβος ναυσιπλοΐας (traffic noise)*. Στη συνέχεια επικρατεί ο θόρυβος από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, και επομένως ο θόρυβος μπορεί να συσχετισθεί με το ύψος κύματος ή με την ταχύτητα του επιφανειακού ανέμου ή με την κατάσταση της θάλασσας που φυσικά είναι αλληλοσχετιζόμενα μεγέθη. Ο θόρυβος αυτός είναι σημαντικός μέχρι και το άνω όριο των ακουστικών συχνοτήτων (20 kHz). Σημαντικές πηγές που συνθέτουν το θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος είναι οι προερχόμενες από βιολογικούς οργανισμούς (θαλάσσια θηλαστικά αλλά και μικρότερα θαλασσινά όπως π.χ. γαρίδες). Το θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος συμπληρώνουν παροδικές πηγές ανθρωπογενούς προέλευσης (π.χ. σεισμικές μετρήσεις, διαδικασίες αγκύρωσης εγκαταστάσεων, διασκοπήσεις βυθού, εφαρμογές που σχετίζονται με πολεμικά ναυτικά κ.λ.π.) και άλλες μικρότερης σημασίας φυσικές πηγές. Πάντως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στη χρήση του όρου «θόρυβος» καθώς στο μυαλό μας έχουμε το θόρυβο ως «ανεπιθύμητη» ακουστική συνιστώσα, ενώ στην πραγματικότητα ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος αποτελεί συστατικό του *θαλάσσιου ηχοτοπίου (marine soundscape)*. Για τις περισσότερες εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας ωστόσο που επιβάλουν λήψη ενός επιθυμητού σήματος χωρίς την παρουσία ετερογενών ακουστικών συνιστωσών, οι ήχοι που συνθέτουν το θαλάσσιο περιβάλλον (φυσικοί ή ανθρωπογενείς) θεωρούνται ως «θόρυβος».

Από μετρήσεις και στατιστική επεξεργασία έχουν προέλθει διαγράμματα που δίδουν το φασματικό επίπεδο του θορύβου του θαλάσσιου περιβάλλοντος συναρτήσει της συχνότητας και έχουν τη μορφή του Σχήματος 4.9. Το σχήμα παρουσιάζει το κλασσικό διάγραμμα του Wenz, που εδώ αναπαράγεται σε προσαρμογή από την δημοσίευση στο Journal of the Acoustical Society of America.

Είναι αυτονόητο ότι η χρήση σημάτων και φίλτρων σε μία εφαρμογή ακουστικής ωκεανογραφίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από το επίπεδο θορύβου και τη φασματική του κατανομή.

Τονίζουμε τέλος ότι ο θόρυβος μπαίνει στην εξίσωση SONAR με μονάδες dB/re p_{ref} εάν το φασματικό του επίπεδο ολοκληρωθεί σε όλη την περιοχή των συχνοτήτων που τον συνθέτουν.



Σχήμα 4.9 Φασματικά επίπεδα θορύβου θαλάσσιου περιβάλλοντος

(Πρωτότυπο: Wenz, GM. 1962 "Acoustic Ambient Noise in the Ocean: Spectra and Sources."
Journal of the Acoustic Society of America 34:1936-1956.

4.3 Συσχέτιση ακουστικών σημάτων

4.3.1 Διακριτά σήματα

Η ανίχνευση ακουστικών σημάτων σε περιβάλλον θορύβου γίνεται με χρήση κατάλληλων τεχνικών μέσω των οποίων «συγκρίνεται» το σήμα που μας ενδιαφέρει και το οποίο κατά κανόνα έχει γνωστή μορφή με μία σειρά καταγραφών που ενδέχεται να περιέχουν το σήμα μας. Η σύγκριση υλοποιείται μαθηματικά μέσω μιας κατάλληλης συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση συσχέτισης, η οποία για ψηφιακή επεξεργασία ορίζεται ως κατωτέρω :

Έστω δύο σήματα $y(t)$ και $x(t)$ τα οποία έχουν καταγραφεί σε ένα δέκτη ως ακολουθίες διακριτών καταγραφών x_n και y_n , $n=0,1, 2, \dots, N-1$. Ορίζουμε τις μέσες τιμές των καταγραφών από τις σχέσεις :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad \text{και} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \quad (4.3.1)$$

Για να απλουστεύσουμε την ανάλυση θα υποθέσουμε ότι οι μέσες τιμές των καταγραφών είναι 0. Εάν δεν ισχύει κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα υπάρχει πάντα η δυνατότητα αφαίρεσης από όλα τα σήματα της μέσης τιμής ώστε να έχουμε ξανά μέση τιμή 0.

Μας ενδιαφέρουν επίσης οι μέσες τετραγωνικές τιμές των σημάτων που είναι

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 \quad (4.3.2)$$

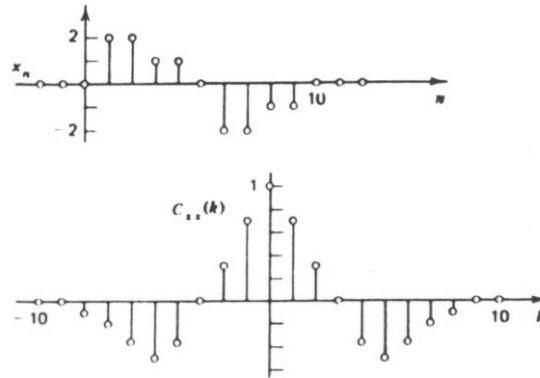
Θα υποθέσουμε ότι η ακολουθία y_n μεταφέρεται k βήματα σχετικά με την x_n και γίνεται y_{n+k} χωρίς να αλλάζουν οι μέσες τιμές.

Ορίζουμε μέσω της επόμενης σχέσης το βαθμό «συσχέτισης» των δύο σημάτων:

$$e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[(C_{xy}(k) \frac{x_n}{\sigma_x} - \frac{y_{n+k}}{\sigma_y}) \right]^2 \quad (4.3.3)$$

Τα μεγέθη σύμφωνα με τον ως άνω ορισμό είναι αδιάστατα. Ο συντελεστής $C_{xy}(k)$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το μέγεθος $e^2(k)$ να γίνει ελάχιστο. Έτσι ο συντελεστής αυτός μπορεί τελικά να αποτελέσει το μέτρο της συσχέτισης των δύο σημάτων μεταξύ τους. Θεωρώντας το μέγεθος $e^2(k)$ ως συνεχή συνάρτηση του $C_{xy}(k)$, παραγωγίζοντας την 4.3.3 ως προς $C_{xy}(k)$ και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με 0 παίρνουμε :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n+k} \quad (4.3.4)$$



Σχήμα 4.10 Το διακριτό σήμα x_n και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του.

Ο συντελεστής $C_{xy}(k)$ είναι με τη σειρά του μία συνάρτηση του k και ονομάζεται «**Συνάρτηση Συσχέτισης**» (*correlation function*). Όπως είναι ορισμένη, έχει πεδίο τιμών ανάμεσα στο 1 και στο -1 . Μηδενική τιμή σημαίνει σήματα που δεν έχουν σχέση μεταξύ τους (ασυσχέτιστα). Εάν τα σήματα είναι ίδια σε μορφή αλλά το ένα παρουσιάζει μία μετάθεση σε σχέση με το άλλο, η τιμή του k για την οποία η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μέγιστη τιμή, μας προσδιορίζει την μετάθεση των δύο σημάτων.

Εάν τα σήματα είναι μιγαδικά, η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μορφή

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_{n+k} \quad (4.3.5)$$

όπου x_n^* συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή.

Ως «**Συνάρτηση συνδιακύμανσης**» (*covariance function*) ορίζουμε την ποσότητα

$$\text{cov}[x, y(k)] \equiv \sigma_x \sigma_y C_{xy}(k) = \langle x^* y(k) \rangle \quad (4.3.6)$$

Εάν τα σήματα x και y είναι ίδια, τότε η συνάρτηση C_{xx} χαρακτηρίζεται «**Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης**» (*Autocorrelation function*).

Ως παράδειγμα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο σχήμα 4.10 που παρουσιάζει ένα ψηφιακό σήμα x_n και την αντίστοιχη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς k .

4.3.2 Ολοκληρωτικές εκφράσεις

Οι ανωτέρω εκφράσεις και έννοιες μπορούν να διατυπωθούν για συνεχή (αναλογικά) σήματα με αντίστοιχο τρόπο. Για ένα σήμα $x(t)$ διάρκειας T του οποίου η δειγματοληψία γίνεται με N δείγματα, η αντιστοιχία των διακριτών καταγραφών του που παρουσιάστηκαν ανωτέρω με τα αναλογικά σήματα είναι

$$x_n = x(n\Delta t) \quad (4.3.7)$$

όπου Δt είναι ο χρόνος ανάμεσα στη λήψη των δειγμάτων (αντίστροφος της συχνότητας δειγματοληψίας (sampling frequency) και $\Delta t = T/N$.

Εάν ο χρόνος λήψης του δείγματος n είναι $t_n = n\Delta t$ τότε προφανώς

$$x_n = x(t_n) \quad (4.3.8)$$

Εάν θεωρήσουμε ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ με αντιστοιχία $y_n = y(t_n)$ και μετακινήσουμε χρονικά την καταγραφή ενός δεύτερου σήματος κατά χρόνο $\tau = k\Delta t$ θα πάρουμε μία ακολουθία δειγμάτων

$$y_{n+k} = y(t_n + \tau) \quad (4.3.9)$$

Έτσι παίρνουμε μια αντιστοιχία διακριτών δειγμάτων με συνεχή σήματα της μορφής :

$$x_n \rightarrow x(t), \quad y_{n+k} \rightarrow y(t + \tau)$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τις 4.3.5 και 4.3.6 η συνάρτηση συνδιακύμανσης γράφεται

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T x^*(t) y(t + \tau) \Delta t \quad (4.3.10)$$

και παίρνοντας το όριο για $\Delta t \rightarrow dt$ έχουμε

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) y(t + \tau) dt = \langle x^*(t) y(t + \tau) \rangle \quad (4.3.11)$$

Αντίστοιχα οι μέσες τετραγωνικές τιμές εκφράζονται από τις επόμενες σχέσεις

$$\sigma_x^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt \quad (4.3.12)$$

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xy}(\tau) = \frac{\text{cov}[x, y(\tau)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.3.13)$$

Σε ό,τι αφορά τα όρια ολοκλήρωσης, αυτά μπορεί να είναι αυθαίρετα, αλλά συμβατά με τα πραγματικά χαρακτηριστικά του σήματος. Συχνά θεωρούμε τα όρια από $-T/2$ έως $T/2$

Εάν σ_x^2 και σ_y^2 είναι διάφορα του μηδενός για $T \rightarrow \infty$ (π.χ. περίπτωση περιοδικών σημάτων) και λαμβάνοντας υπ'όψιν την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε :

$$\sigma_x \sigma_y C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t) y(t+\tau) dt \right) \quad (4.3.14)$$

Για σήματα των οποίων οι μέσες τετραγωνικές τιμές τείνουν στο 0 για $T \rightarrow \infty$, οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{(I_{xx} I_{yy})^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \quad (4.3.15)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{I_{xx}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \quad (4.3.16)$$

όπου

$$I_{xx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.3.17)$$

$$I_{yy} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (4.3.18)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Υπολογίστε τη συνάρτηση συσχέτισης δύο σημάτων που περιγράφονται από τις εκθετικές συναρτήσεις $x = \exp(2i\pi f_1 t)$ και $y = \exp(2i\pi f_2 t)$. Θεωρείστε διαφορετικές τις συχνότητες f_1 και f_2 .

4.3.3 Σήματα και θόρυβος

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι ένα εργαλείο για να μπορεί κανείς να ανιχνεύει σήματα σε περιβάλλον θορύβου, όταν γνωρίζει τα χαρακτηριστικά της εκπεμπόμενης κυματομορφής. Θα δούμε εδώ ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής που αναφέρεται σε σήμα που έχει ληφθεί μετά από ανάκλαση σε κάποια επιφάνεια. Ας

θεωρήσουμε ότι το εκπεμπόμενο σήμα είναι της μορφής $x(t)$ ενώ το σήμα που λαμβάνεται μετά από ανάκλαση και χρόνο T είναι $x(t-T)$. Οτιδήποτε άλλο φτάνει στον δέκτη θεωρείται ανεπιθύμητο και χαρακτηρίζεται θόρυβος. Ο συμβολισμός του θορύβου θα είναι $n(t)$.

Στο δέκτη καταγράφεται το άθροισμα του ανακλώμενου σήματος και του θορύβου

$$a(t) = x(t-T) + n(t) \quad (4.3.19)$$

που για δειγματοληψία σε χρονικά διαστήματα που απέχουν Δt μεταξύ τους γράφεται

$$a_n = x_{n-j} + n_n \quad (4.3.20)$$

όπου $t = n\Delta t$ και $T = j\Delta t$.

Η συνδιακύμανση του x (καθαρό σήμα) και του a (σήμα με θόρυβο) δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_x \sigma_a C_{xa}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* (x_{n-j+k} + n_{n+k}) \quad (4.3.21)$$

με $\sigma_a^2 \approx \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ για $|C_{xn}(k)| \ll 1$, ενώ η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xa}(k) = \frac{\sigma_x}{\sigma_a} C_{xx}(k-j) + \frac{\sigma_n}{\sigma_a} C_{xn}(k) \quad (4.3.22)$$

όπου $C_{xx}(k-j)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή για $k=j$. Όταν $C_{xn}(k)$ είναι μηδέν (σήμα ασυσχέτιστο με το θόρυβο), $C_{xa}(k)$ έχει μέγιστη τιμή για $k=j$ και $T=j\Delta t$. Ωστόσο, ακόμη και αν σήμα και θόρυβος είναι ασυσχέτιστα, μερικά δείγματα του θορύβου δίδουν μη μηδενικές τιμές στη συνάρτηση $C_{xn}(k)$. Αυτό δημιουργεί ταλαντώσεις στις μετρούμενες τιμές της συνάρτησης $C_{xa}(k)$. Όταν οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρότερες από την τιμή σ_x/σ_a , η συνάρτηση συσχέτισης $C_{xa}(k)$ έχει κορυφή στο T και το σήμα αναγνωρίζεται σε περιβάλλον θορύβου.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Σύνθεση αρμονικών πηγών

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχήν αρμονικές πηγές. Αυτό σημαίνει ότι η ακουστικές διαταραχές για κάθε συνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του μέσου (ταχύτητα στοιχειωδών σωματισίων, πίεση, πυκνότητα) μεταβάλλονται σε συγκεκριμένη θέση με τη μορφή συνάρτησης ημιτόνου ή συνημιτόνου. Οι πηγές αυτές χαρακτηρίζονται «**πηγές συνεχούς κύματος**» ή “*Continuous Wave sources*” και συμβολίζονται με CW. Όπως έχουμε δει και στα κεφάλαια του μαθήματος οι ακουστικές διαταραχές για αρμονικές πηγές διδίδονται με τη μορφή κυμάτων τη χωρική και τη χρονική εξάρτηση των οποίων την έχουμε περιγράψει μέσω εκθετικών συναρτήσεων που μπορούν να αποδοθούν με ημιτονοειδείς ή συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, των οποίων το πλάτος μεταβάλλεται με την απόσταση με την απλούστερη μορφή να είναι εκείνη που αφορά στη σφαιρική διάδοση (σημειακή πηγή σε άπειρο χώρο) όπου το μέτωπο κύματος είναι σφαίρα ακτίνας όση και η απόσταση στην οποία μετράται η διαταραχή που βέβαια αυξάνει με την διάδοση του κύματος, με επακόλουθο η ενέργεια να κατανέμεται σε μεγαλύτερο όγκο και να μειώνεται η ένταση και φυσικά το πλάτος ταλάντωσης σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας .

Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι το μήκος κύματος είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κορυφές ή κοιλάδες του ημιτονοειδούς σήματος, παραμένει σταθερό, συμβολίζεται δε με λ . Ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε το κύμα σε δεδομένη θέση να φτάσει σε διαδοχική κορυφή ή κοιλάδα είναι η περίοδος που συμβολίζεται με T .

Οι σχέσεις που διέπουν τα μεγέθη συχνότητα f , μήκος κύματος λ , περίοδος T και ταχύτητα διάδοσης c είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} \quad (\text{A1})$$

Υπενθυμίζουμε επίσης τις παρακάτω σχέσεις για την κυκλική συχνότητα ω και το μέτρο του αριθμού κύματος k :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A2})$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A3})$$

Οι μονάδες των βασικών κυματικών μεγεθών είναι, για τη συχνότητα f [s^{-1}] (Hz), για την κυκλική συχνότητα ω [rad/s], και εάν το μήκος κύματος εκφράζεται σε μέτρα [m], και η ταχύτητα σε [m/s], ο αριθμός κύματος εκφράζεται σε [m^{-1}].

Για την ανάπτυξη του παρόντος παραρτήματος θα υιοθετήσουμε ορισμένες παραδοχές για να μελετήσουμε ποιοτικά το φαινόμενο της σύνθεσης πηγών, ενώ παραπέμπουμε σε εξειδικευμένα βιβλία και άρθρα για την αναλυτική αναφορά σε πιο σύνθετες περιπτώσεις.

Οι παραδοχές μας είναι οι εξής :

- Η βασική μας πηγή είναι σημειακή παντοκατευθυντική. Εκπέμπει σφαιρικά κύματα ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις
- Για να υπολογιστεί η σύνθεση των πηγών, θα θεωρήσουμε ότι η απόσταση υπολογισμού του ακουστικού πεδίου είναι πολύ μεγαλύτερη της απόστασης ανάμεσα στις σημειακές πηγές.
- Θα αναφερθούμε στην ακουστική πίεση ως το μέγεθος αναφοράς.
- Θα υιοθετήσουμε χωρίς άρση της γενικότητας την χρονική εξάρτηση του κύματος από το $e^{i\omega t}$.

Για σφαιρική διάδοση του κύματος, και με βάση την ανωτέρω υπόθεση για τη χρονική εξάρτηση η λύση που θα πάρουμε είναι της μορφής :

$$p = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{A.4})$$

ενώ, υιοθετώντας λύση στη μορφή τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λύση της μορφής

$$p = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (\text{A.5})$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια το σύμβολο R για την απόσταση.

Θυμίζουμε επίσης ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

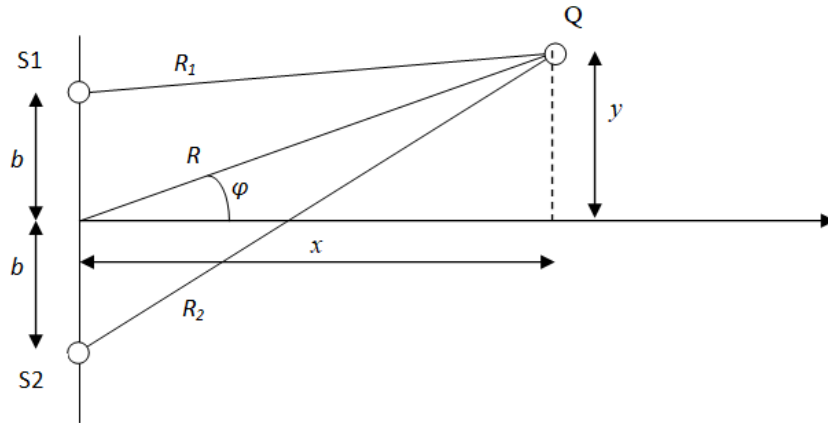
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad (\text{A.6})$$

Θα δώσουμε στη συνέχεια μια απλοποιημένη θεώρηση του προβλήματος της σύνθεσης ακουστικών πηγών, εξετάζοντας το πρόβλημα μόνο στις περιπτώσεις που οι προς σύνθεση πηγές συνεισφέρουν με ίσο πλάτος στο σημείο ενός δέκτη. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται με βάση την υπόθεση για μικρή απόσταση ανάμεσα στις πηγές σε σχέση με τη θέση παρατήρησης.

A.1 Σύνθεση δύο πηγών

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με χρήση πραγματικών και μιγαδικών συναρτήσεων.

Κατ' αρχήν θεωρείστε το σχήμα A1 που παρουσιάζει την γεωμετρία της σύνθεσης δύο πηγών. Το ενδιαφέρον εντοπίζεται στον υπολογισμό της απόστασης του σημείου παρατήρησης από κάθε μία από της πηγές. Η γεωμετρία του προβλήματος χαρακτηρίζεται από την απόσταση R από την αρχή των αξόνων και την γωνία φ που ορίζεται από τον άξονα των x και την ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο παρατήρησης Q . Θα υπενθυμίσουμε την υπόθεση ότι η απόσταση του σημείου λήψης από την αρχή των αξόνων είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των πηγών μεταξύ τους.



Σχήμα Α1 Γεωμετρία για τη σύνθεση δύο ηχητικών πηγών

Με αυτά τα δεδομένα παίρνουμε :

$$R_1^2 = (y - b)^2 + x^2 \quad (\text{A.1.1})$$

$$R_1^2 = (R \sin \varphi - b)^2 + R^2 \cos^2 \varphi = R^2 - 2Rb \sin \varphi + b^2 \quad (\text{A.1.2})$$

$$R_1 = (R^2 - 2Rb \sin \varphi + b^2)^{1/2} \quad (\text{A.1.3})$$

Η σχέση αυτή γράφεται :

$$R_1 = R \left(1 - \frac{2b \sin \varphi}{R} + \frac{b^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.4})$$

Με βάση την υπόθεση που κάναμε παραπάνω για παρατηρήσεις σε μεγάλη απόσταση μπορούμε να δεχθούμε ότι $b/R \ll 1$

Χρησιμοποιώντας την διωνυμική ανάπτυξη

$$(1 + q)^{1/2} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{16} + \dots \quad (\text{A.1.5})$$

όπου q είναι ένας μικρός αριθμός, και θεωρώντας ότι q αντιπροσωπεύει την παράσταση $(b^2 / R^2 - 2b \sin \varphi / R)$ η σχέση (A.1.4) γίνεται

$$R_1 = R \left[1 - \frac{b}{R} \sin \varphi + \frac{b^2}{2R^2} (1 - \sin^2 \varphi) + \dots \right] \quad (\text{A.1.6})$$

Μπορούμε τώρα να αγνοήσουμε όρους στους οποίους εμφανίζεται ο λόγος $\frac{y_1}{R}$ με δυνάμεις υψηλότερες του 2, και να πάρουμε τελικά

$$R_1 \approx R - b \sin \varphi \quad (\text{A.1.7})$$

Η δεύτερη πηγή S2 με τις ίδιες υποθέσεις θα βρίσκεται σε απόσταση

$$R_2 \approx R + b \sin \varphi \quad (\text{A.1.8})$$

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι οι πηγές εκπέμπουν σε φάση¹² και ότι $2b = d$

Το σήμα που θα ληφθεί στο σημείο λήψης θα είναι το άθροισμα των δύο σημάτων :

$$p_{tot} = \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR_1)] + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - kR_2)] \quad (\text{A.1.9})$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των αποστάσεων από τις σχέσεις A1.7 και A1.8 στο όρισμα των εκθετικών συναρτήσεων παίρνουμε :

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - k(R - b \sin \varphi))] + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - k(R + b \sin \varphi))] = \\ &= \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR)] \exp(ikb \sin \varphi) + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - kR)] \exp(-ikb \sin \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Με βάση την αρχική μας υπόθεση για σημείο λήψης σε μεγάλη απόσταση από την πηγή, θα δεχθούμε ότι τα πλάτη της λύσης της ακουστικής εξίσωσης είναι ίδια ($R_1 = R_2 = R$), μια και η διαφορά τους επηρεάζει κυρίως τη διαφορά φάσης, και να πάρουμε την έκφραση :

$$p_{tot} = \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] (\exp(ikb \sin \varphi) + \exp(-ikb \sin \varphi)) \quad (\text{A.1.11})$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις A.6 καταλήγουμε στην

$$p_{tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.12})$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση αυτή μας δίνει τη συνολική πίεση συναρτήσει της γωνίας φ για δεδομένη συχνότητα και απόσταση των πηγών μεταξύ τους. Εάν $kb \sin \varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, το μέτρο της πίεσης παίρνει για δεδομένο R τη μέγιστη τιμή του. Αυτό αντιστοιχεί σε $k \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right) = 0, \pi, \dots, n\pi$ ή $k(R_2 - R_1) = 0, \dots, 2n\pi$.

Αντίστοιχα, για $k(R_2 - R_1) = \pi, \dots, (n+1)\pi, \dots$ το πλάτος παίρνει την ελάχιστη τιμή.

¹² Όταν οι πηγές εκπέμπουν με διαφορά φάσης 180° το ζευγάρι χαρακτηρίζεται ως *δίπολο* (*dipole*)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πλάτος του σήματος που προέρχεται ως σύνθεση από δύο σημειακές αρμονικές πηγές, εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος και την απόσταση ανάμεσα στις πηγές.

Χρησιμοποιώντας την έννοια του μήκους κύματος, θα παρατηρήσουμε ότι δύο λήψεις βρίσκονται σε φάση εάν η διαφορά των αποστάσεων του δέκτη από την πηγή είναι πολλαπλάσια του μήκους κύματος (ή έχουν διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π). Αντίθετα εάν η διαφορά των αποστάσεων τους είναι $(2n+1)\lambda/2$, $n=0,1,\dots$ οι πηγές είναι εκτός φάσης (διαφορά φάσης $\pi, 3\pi, \dots$).

Στι ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας την έννοια της μέσης τετραγωνικής πίεσης. Θεωρώντας τα δύο σήματα από τις πηγές που αναφέραμε προηγουμένως, και με την υπόθεση για λήψη ίδιου πλάτους, ξαναγράφουμε την Α.1.9 ως

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R} \{ \exp[i(\omega t - kR_1)] + \exp[i(\omega t - kR_2)] \} \\ &= \frac{A}{R} \exp(i\omega t) [\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)] \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

Παίρνοντας το γινόμενο $p_{tot} p_{tot}^*$ όπου * σημαίνει μιγαδικός συζυγής και παρατηρώντας ότι το γινόμενο $\exp(i\omega t)\exp(-i\omega t)$ είναι μονάδα, παίρνομε τη μέση τετραγωνική πίεση στη μορφή

$$\begin{aligned} |p_{tot}|^2 &= \left(\frac{A}{R} \right)^2 [\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)][\exp(ikR_1) + \exp(ikR_2)] \\ &= \left(\frac{A}{R} \right)^2 \{ 2 + \exp[ik(R_1 - R_2)] + \exp[-ik(R_1 - R_2)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

και τελικά

$$|p_{tot}|^2 = 2 \left(\frac{A}{R} \right)^2 [1 + \cos k(R_1 - R_2)] \quad (\text{A.1.15})$$

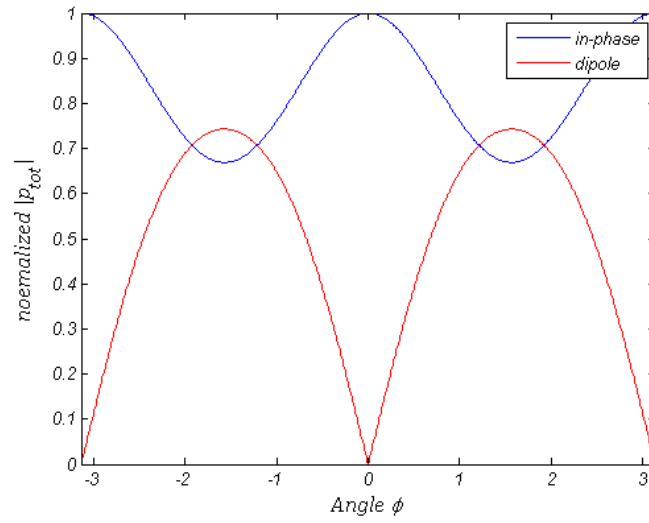
Παρατηρούμε έτσι μια ισοδύναμη ποιοτικά έκφραση της Α.1.12 μέσω της οποίας η μεταβολή της λήψης συναρτάται με τη διαφορά των αποστάσεων από την πηγή και η μέγιστη λήψη εμφανίζεται όταν $k(R_1 - R_2) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ η ελάχιστη όταν έχουμε $\pi, 3\pi, \dots$

Οι αποστάσεις R_1 και R_2 υπολογίζονται από τις Α.1.7 και Α.1.8

Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε για την περίπτωση του διπόλου. Η σχέση Α.1.12 στην περίπτωση αυτή παίρνει τη μορφή (άσκηση) :

$$p_{d,tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \sin(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.16})$$

και οι συνθήκες για μέγιστο ή ελάχιστο μέτρο της πίεσης (εδώ το ελάχιστο είναι 0) αντιστρέφονται σε σχέση με πηγές που εκπέμπουν με ίδια φάση.



Σχήμα A2 Κανονικοποιημένο μέτρο της πίεσης λήψης από δύο πηγές που βρίσκονται σε απόσταση 0,4 μέτρων και για σήμα συχνότητας 1000 Hz, Η γωνία εκφράζεται σε rad.

Στο σχήμα A2 βλέπουμε μία απεικόνιση του διαγράμματος μεταβολής του μέτρου της πίεσης για την περίπτωση πηγών που εκπέμπουν σε φάση (μπλε γραμμή) ή αποτελούν δίπολο (κόκκινη γραμμή), συναρτήσει της γωνίας ϕ από $-\pi$ έως π για κανονικοποιημένο πλάτος της πίεσης. Τα δεδομένα στα οποία βασίστηκε το διάγραμμα είναι $b=0,2 \mu$, $f=1000$ Hz, $c=1500$ m/sec.

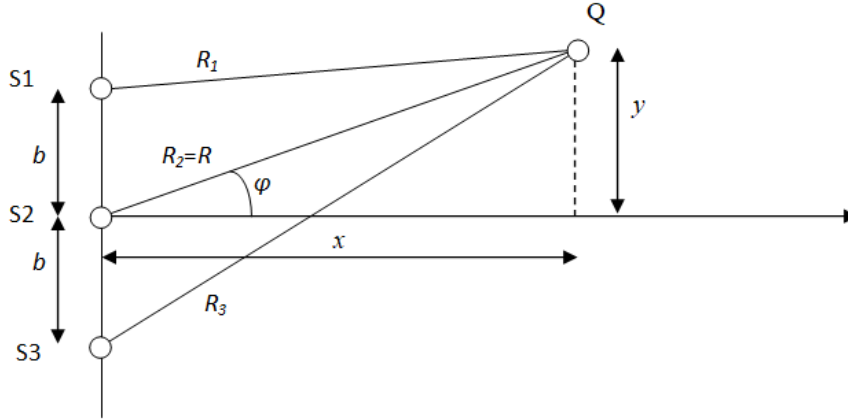
A.2 Σύνθεση τριών πηγών.

Θα εξετάσουμε με τη μορφή άσκησης την περίπτωση της σύνθεσης τριών πηγών που απέχουν απόσταση b μεταξύ τους στην ίδια ευθεία και για τις οποίες θεωρούμε άξονα συντεταγμένων να περνά από την μεσαία πηγή. Οι πηγές εκπέμπουν σε φάση. Οι αντίστοιχες αποστάσεις είναι

$$\begin{aligned} R_1 &\approx R - b \sin \phi \\ R_2 &= R \\ R_3 &\approx R + b \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την θεώρηση μέσω εκθετικών συναρτήσεων παίρνουμε

$$p_{\text{tot}} = \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR + kbsi\phi)] + \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] + \frac{A}{R_3} \exp[i(\omega t - kR - kb \sin \phi)] \quad (\text{A.2.2})$$



Σχήμα A3. Γεωμετρία για τη σύνθεση τριών πηγών

Βγάζοντας κοινό παράγοντα, τον εκθετικό όρο $\exp[i(\omega t - kR)]$ που χαρακτηρίζει το κύμα σε απόσταση R από την πηγή, και θεωρώντας όπως και πριν ότι τα σήματα από τις πηγές λαμβάνονται από το δέκτη με ίδιο πλάτος, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] [1 + \exp(ikb \sin \varphi) + \exp(-ikb \sin \varphi)] \\ &= \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] [1 + 2 \cos(kb \sin \varphi)] \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Η σχέση αυτή είναι αντίστοιχη με την A.1.12 που την υπενθυμίζουμε

$$p_{tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.12})$$

Γράφοντας

$$p_{tot} \equiv C \exp[i(\omega t - kR)] \quad (\text{A.2.4})$$

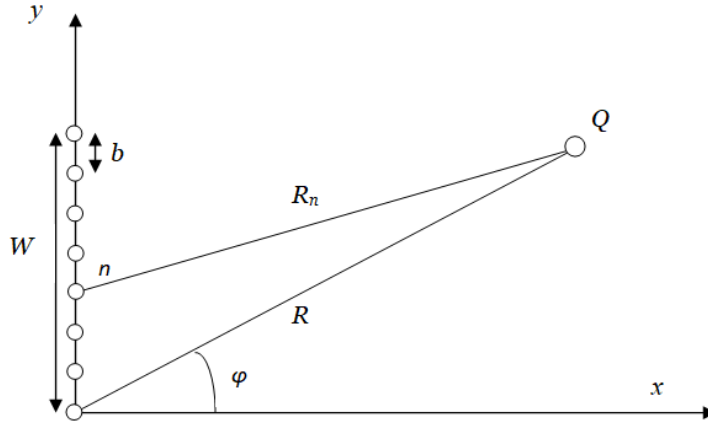
παίρνομε για την περίπτωση των τριών πηγών

$$C_3 = \frac{A}{R} [1 + 2 \cos(kb \sin \varphi)] \quad (\text{A.2.5})$$

και για την περίπτωση των δύο

$$C_2 = \frac{A}{R} 2 \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.2.6})$$

Ο συντελεστής C επιδρά στο πλάτος της διαταραχής και εξαρτάται από την γωνία παρατήρησης τη συχνότητα και την απόσταση των πηγών.



Σχήμα Α3. Γεωμετρία για τη σύνθεση πολλαπλών διακριτών πηγών

Α.3 Πολλαπλές πηγές

Θα θεωρήσουμε πολλές πηγές τοποθετημένες στην ίδια ευθεία σε ισαποστάσεις στον άξονα των y . Εάν η πρώτη απέχει απόσταση W ως προς την τελευταία και ο αριθμός τους είναι N , η ισαπόσταση των πηγών είναι

$$b = \frac{W}{N-1} \quad (\text{A.3.1})$$

Μία πηγή με δίκτη n θα απέχει από το δέκτη απόσταση R_n .

Έτσι, η διαταραχή από την n οστή πηγή σε απόσταση R σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι

$$p_n = \frac{A}{R_n} \exp[i(\omega t - k(R - nb \sin \varphi))] = \frac{A}{R_n} \exp[i(\omega t - kR + \frac{nkW \sin \varphi}{N-1})] \quad (\text{A.3.2})$$

Θεωρώντας και πάλι ότι ο δέκτης βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη σειρά των πηγών και ότι το μήκος $W \ll R$ δεχόμαστε ότι στο πλάτος της πίεσης $R_n = R$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Βγάζοντας στη συνέχεια κοινό παράγοντα τον $(\omega t - kR)$ από όλες τις επί μέρους διαταραχές (πίεσεις στην προκειμένη περίπτωση) παίρνουμε

$$p_{tot} = \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{inkW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.3})$$

Θέτουμε

$$C_w = \frac{A}{R} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{inkW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.4})$$

Η έκφραση αυτή έχει τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r} \quad (\text{A.3.5})$$

Στην περίπτωση μας $\exp(iny) = [\exp(iy)]^n$ και

$$r = \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.6})$$

$$C_w = \frac{A}{R} \left\{ \frac{1 - \exp\left(\frac{iNkW \sin \varphi}{N-1}\right)}{1 - \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{N-1}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.7})$$

Αλλάζοντας λίγο τη μορφή του εκθετικού χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$1 - e^{ix} = -e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = -2ie^{ix/2} \sin \frac{x}{2} \quad (\text{A.3.8})$$

Παίρνουμε

$$C_w = N \frac{A}{R} \left\{ \frac{\exp\left(iNk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)}{\exp\left(ik(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)} \right\} \frac{\sin\left(Nk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)}{N \sin\left(k(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)} \quad (\text{A.3.9})$$

Η έκφραση ανάμεσα στις αγκύλες έχει απόλυτη τιμή 1 και ορίζει μία διαφορά φάσης. Για μεγάλα N παίρνουμε προσεγγιστικά

$$C_w = N \frac{A}{R} \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{2}\right) \frac{\sin\left(Nk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)}{N \sin\left(k(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right)} \quad (\text{A.3.10})$$

Καθως το μέγεθος $(kW \sin \varphi)/2$ ορίζει μία διαφορά φάσης, η συνολική φάση του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη παίρνει τη μορφή $i(\omega t - kR + (kW \sin \varphi)/2)$.

Ο τελευταίος όρος είναι γνωστός ως *συντελεστής κατευθυντότητας*¹³ ή απόκριση κατευθυντότητας (directional response) και γράφεται ως

$$D = \frac{\sin\left(\frac{N}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \varphi\right)}{N \sin\left(\frac{1}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \varphi\right)} \quad (\text{A.3.11})$$

¹³ Προσοχή : Ο συντελεστής αυτός δεν είναι η «κατευθυντότητα» που ορίσαμε στο κεφάλαιο για την εξίσωση SONAR αλλά έχει την ίδια ποιοτική σημασία.

Για N μεγάλο, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική έκφραση του ημιτόνου $\sin(\theta) \approx \theta$ για μικρό όρισμα και καταλήγουμε στη σχέση

$$D = \frac{\sin \frac{kW \sin \phi}{2}}{\frac{kW \sin \phi}{2}} \quad (\text{A.3.12})$$

Η τελευταία αυτή συνάρτηση είναι της μορφής $(\sin x)/x$ για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad (\text{A.3.13})$$

Η περίπτωση που συζητήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο αφορά σε εφαρμογές που δημιουργούνται συστοιχίες πηγών τοποθετούμενες η μία κοντά στην άλλη για να επιτευχθούν τα επιθυμητά χαρακτηριστικά κατευθυντότητας (δείτε αναφορές στο κεφάλαιο για την εξίσωση SONAR).

A.4 Πηγές κατανεμημένες συνεχώς

Εάν θεωρήσουμε ότι οι πηγές μας βρίσκονται μεν στην ίδια ευθεία αλλά κατανέμονται συνεχώς σε μήκος W , μπορούμε να δείξουμε ότι ο συντελεστής κατευθυντότητας είναι ίδιος με αυτόν που βρήκαμε στην προηγούμενη περίπτωση των διακριτά κατανεμημένων πηγών. Για την περίπτωση αυτή θα χρειαστεί να θεωρήσουμε την ένταση της πηγής που εκπέμπεται από ένα στοιχειώδες μήκος dy . Θα κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε στοιχειώδες μήκος dy συνεισφέρει dy/W στο πλάτος της ακουστικής πίεσης που εκπέμπεται. Με τον τρόπο αυτό «κανονικοποιούμε» το πλάτος εκπομπής. Επομένως η συνεισφορά στο δέκτη από τη στοιχειώδη πηγή που βρίσκεται σε απόσταση y από την αρχή των αξόνων ($R(y)$ από το δέκτη) θα είναι :

$$dp_y = \frac{A}{R} \frac{dy}{W} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] \quad (\text{A.4.1})$$

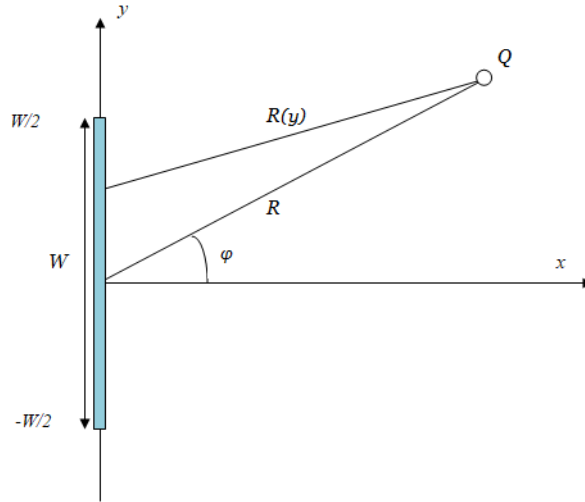
Προσέξτε ότι κάναμε την επί πλέον παραδοχή ότι η πηγή βρίσκεται πολύ μακριά από τον δέκτη με συνέπεια στον παρανομαστή του πλάτους της πίεσης να έχουμε πάντα R ενώ η απόσταση $R(y)$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά ως

$$R(y) = R - y \sin \phi \quad (\text{A.4.2})$$

με το y να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Ολοκληρώνοντας την έκφραση αυτή από $-W/2$ έως $W/2$ παίρνουμε

$$p_{\text{tot}} = \frac{A}{RW} \int_{-W/2}^{W/2} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] dy \quad (\text{A.4.3})$$



Σχήμα A5 Γεωμετρία για τον υπολογισμό τη σύνθεσης πηγών κατανεμημένων συνεχώς

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον εκθετικό όρο $\frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)]$ παίρνομε για το συντελεστή κατευθυντότητας τη σχέση

$$D = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \exp(iky \sin \varphi) dy \quad (\text{A.4.4})$$

$$D = \frac{1}{W} \frac{\exp(iky \sin \varphi)}{ik \sin \varphi} \Big|_{-W/2}^{W/2} \quad (\text{A.4.5})$$

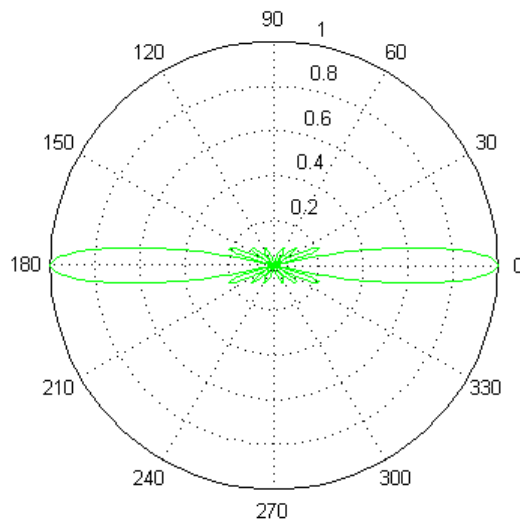
$$D = \frac{\exp\left(\frac{i kW \sin \varphi}{2}\right) - \exp\left(\frac{-i kW \sin \varphi}{2}\right)}{i kW \sin \varphi} \quad (\text{A.4.6})$$

που τελικά γράφεται ως

$$D = \frac{\sin \frac{k W \sin \phi}{2}}{\frac{k W \sin \phi}{2}} \quad (\text{A.4.7})$$

Βλέπομε ότι ο συντελεστής είναι ίδιος με εκείνον που υπολογίσαμε στην περίπτωση των διακριτά κατανεμημένων πηγών.

Πολλές φορές, η απεικόνιση του συντελεστή κατευθυντότητας γίνεται σε πολικό διάγραμμα συντεταγμένων που απεικονίζει μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τη γωνία.



Σχήμα Α6. Ένα τυπικό πολικό διάγραμμα εκπομπής πηγής που μοντελοποιείται από συνεχή κατανομή σημειακών πηγών μήκους $4\lambda=6$ m. Η συχνότητα είναι 1000 Hz και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου 1500 m/sec.

Σχετικό είναι το σχήμα Α6 που αφορά το συντελεστή κατευθυντότητας συνεχώς κατανομημένων πηγών στον άξονα των y , συμμετρικά ως προς τον άξονα των x . Έχει υπολογιστεί για μήκος πηγής 4λ όπου λ είναι το μήκος κύματος. Με συχνότητα 1000 Hz και ταχύτητα διάδοσης του ήχου 1500 m/sec, το μήκος της συστοιχίας είναι 6 m. Οι τιμές του διαγράμματος είναι κανονικοποιημένες ως προς την μέγιστη τιμή του D. Προσέξτε επίσης ότι η συστοιχία εκπέμπει με συμμετρικό τρόπο ως προς τη γωνία, δηλαδή με αναφορά στο σχήμα Α5, η ένταση του ακουστικού πεδίου στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τα αρνητικά x είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη του συμπληρωματικού ημιεπιπέδου.

Υπενθυμίζεται ότι η ανωτέρω ανάπτυξη αφορά απόκριση πηγής σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το σημείο εκπομπής.

Μελέτη της κατευθυντότητας πιο σύνθετων πηγών (π.χ. πηγές κατανομημένες σε επίπεδο και όχι σε ευθεία) ξεφεύγει από το σκοπό του μαθήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Στοιχεία από την μηχανική των σωμάτων. Μέτρα ελαστικότητας

Τα ομογενή και ισотροπικά υλικά χαρακτηρίζονται γενικά από δύο σταθερές οι οποίες υποδηλώνουν τις ελαστικές τους ιδιότητες, δηλαδή τον βαθμό που «αντιστέκονται» σε εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Γενικά ένα μέτρο ελαστικότητας ορίζεται από μια γενική σχέση της μορφής :

$$E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{B.1})$$

όπου σ είναι η τάση που αναπτύσσεται σε ένα σώμα και ε είναι η παραμόρφωση που επάγεται. Είναι προφανές ότι ανάλογα με το είδος του σώματος και την τάση που αναπτύσσεται τα μέτρα ελαστικότητας μπορούν να οριστούν με εναλλακτικούς τρόπους.

Στην μηχανική έχουν εμφανιστεί πολλά μέτρα ελαστικότητας ανάλογα με τον ορισμό τους, ωστόσο ένα ζευγάρι κάθε φορά ανεξάρτητων μέτρων είναι ικανό να περιγράψει το υλικό. Στα πλαίσια της Ακουστικής Ωκεανογραφίας θα υιοθετήσουμε γενικά τα μέτρα που αναφέρονται και ως σταθερές Lamé και συμβολίζονται με λ και μ . Από αυτά το λ είναι γνωστό ως πρώτη παράμετρος του Lamé ενώ το μ ως μέτρο διάτμησης. Ωστόσο θα δούμε και άλλα μέτρα που είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη και την κατανόηση του μαθήματος.

B.1 Μέτρο διόγκωσης (Bulk Modulus)

Το μέτρο διόγκωσης σε ένα υλικό ορίζεται από τη σχέση :

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} \quad (\text{B.1.1})$$

όπου p είναι η πίεση που ασκείται σε ένα όγκο V του υλικού. Το αντίστροφο του μέτρου διόγκωσης είναι γνωστό και ως συμπιεστότητα (compressibility) του υλικού. Εκφράζει τον βαθμό «αντίστασης» του υλικού στην αύξηση του όγκου του, όταν αυξάνει η πίεση που ασκείται σε αυτό ομοιόμορφα. Το αρνητικό πρόσημο δίδει θετική τιμή στο μέτρο διόγκωσης αφού η αύξηση της πίεσης συνεπάγεται μείωση του όγκου του υλικού.

Στα ρευστά μέσα, το μέτρο διόγκωσης συνδέεται με την ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσω της σχέσης

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{B.1.2})$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υλικού. Προφανώς ως πυκνότητα του υλικού αινούμε την πυκνότητα αναφοράς ρ_0 σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Κεφαλαίου 2.

Σημειώνουμε ότι η ανωτέρω έκφραση της ταχύτητας είναι συμβατή με το θερμοδυναμικό της ορισμό της που είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Πράγματι η σχέση B.1.1 με χρήση της πυκνότητας του ρευστού ρ θεωρώντας σταθερή μάζα m και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι θετική μεταβολή του όγκου ισοδυναμεί με αρνητική μεταβολή της πυκνότητας, παίρνουμε

$$K = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \text{B.1.3}$$

που είναι ένας εναλλακτικός ορισμός του μέτρου διόγκωσης.

Η αντιστοίχιση της έκφρασης αυτής με τον θερμοδυναμικό ορισμό της ταχύτητας επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Το μέτρο διόγκωσης έχει μονάδες πίεσης (π.χ. Pa). Τυπική τιμή στο νερό είναι 2.2×10^9 Pa (μεταβαλλόμενη ανάλογα με τις συνθήκες και ιδιαίτερα την θερμοκρασία).

Δεδομένης της αδυναμίας διάδοσης διατμητικών κυμάτων σε ρευστά και αέρια, το μέτρο διόγκωσης χαρακτηρίζει πλήρως το ρευστό ή αέριο υλικό.

B.2 Μέτρο ελαστικότητας (Shear Modulus)

Ως μέτρο ελαστικότητας ορίζουμε τον λόγο της διατμητικής τάσης προς την διατμητική παραμόρφωση σύμφωνα και με την σχέση B.1.. Είναι προφανές ότι το μέτρο αυτό δεν έχει νόημα σε σώματα που δεν υποστηρίζουν διάδοση διατμητικών κυμάτων (σώματα με ασθενή ακαμψία) όπως είναι το νερό ή ο αέρας. Σε εν γένει ιστροπικά ελαστικά σώματα αποτελούν την μία από τις δύο παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το σώμα και συμβολίζεται με G ή με μ . Σε ανισότροπα σώματα το μέτρο ελαστικότητας παίρνει την μορφή τανυστή. Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε ισότροπα μέσα.

Ανάλογα με την περίπτωση των ρευστών, η ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων, συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας μέσω της σχέσης

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{(B.2.1)}$$

B.3 Σταθερές Lamé

Οι σταθερές Lamé ορίζονται ως λ και μ , αναφέρονται σε ελαστικά υλικά που υπόκεινται σε συντονισμένη δράση δυνάμεων και συνεπώς τόσο σε ογκομετρικές όσο και σε διατμητικές παραμορφώσεις. Από το Νόμο του Hooke η σχέση τάσης παραμόρφωσης σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\sigma = 2\mu e + \lambda \text{tr}(e)\mathbf{I} \quad \text{(B.3.1)}$$

όπου $\text{tr}(e)$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα που ορίζεται από τον τανυστή των παραμορφώσεων και $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Η σταθερά μ είναι το μέτρο ελαστικότητας ($\mu \equiv G$) ενώ η σταθερά λ συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διόγκωσης μέσω της σχέσης :

$$K = \lambda + (2/3)\mu \quad (\text{B.3.2})$$

Η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε ένα ελαστικό μέσο, συνδέεται με τις δύο σταθερές μέσω της σχέσης

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{B.3.3})$$

Είναι προφανές ότι όταν δεν υπάρχει διατμητική τάση σε ένα σώμα, $\mu = 0$ και το μέτρο διόγκωσης αντιστοιχεί στην σταθερά λ .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Στοιχεία από την σύσταση του πυθμένα των θαλασσών.

Γ.1 Σύσταση θαλασσινών ιζημάτων και χαρακτηριστικές παράμετροι.

Ο πυθμένας της θάλασσας για τις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, περιγράφεται συνήθως αποτελούμενος από δύο ομάδες υλικών. Μία ομάδα υλικών με ασθενή ακαμψία που χαρακτηρίζονται ως ιζήματα (sediments) και μία ομάδα υλικών που υπόκεινται των ιζημάτων και έχουν δομή στερεών. Μορφολογικά, τα θαλασσινά ιζήματα χαρακτηρίζονται από συγκεντρώσεις σωματιδίων με ποσότητες νερού ανάμεσα στο συνδετικό πλέγμα τους (water saturated). Η προέλευσή τους μπορεί να είναι στεριανή από παρασυρμένες ποσότητες υλικών είτε θαλασσινή από χημικά ή βιολογικά κατάλοιπα.

Το βασικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τα θαλασσινά ιζήματα είναι το *πορώδες* (porosity) που ορίζεται από τη σχέση :

$$n = \frac{v_v}{v_v + v_m} \quad (\Gamma.1.1)$$

Όπου v_v είναι ο όγκος των κενών που υπάρχουν σε ένα όγκο ιζήματος συνολικού όγκου $v_v + v_m$ όπου v_m είναι ο όγκος των στερεών υλικών. Το πορώδες μειώνεται με το βάθος εισχώρησης στο ίζημα, καθώς υπό την επίδραση της βαρύτητας το πλέγμα των ιζημάτων τείνει να γίνει ποιο συμπαγές. Άλλες φυσικές παράμετροι που χαρακτηρίζουν τα θαλασσινά ιζήματα είναι το μέγεθος του κόκκου και φυσικά η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων (ακουστικών) και των διατμητικών κυμάτων.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα βασικά μεγέθη των θαλασσινών ιζημάτων είναι βασικά εμπειρικές και προέρχονται από ανάλυση μεγάλου αριθμού δειγμάτων, αν και υπάρχουν πλέον θεωρίες για την ιζηματογένεση που δίδουν την δυνατότητα επαγωγής και σύνδεσης των βασικών μεγεθών των ιζημάτων.

Μια εμπειρική σχέση που συνδέει την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε m/sec με το πορώδες είναι

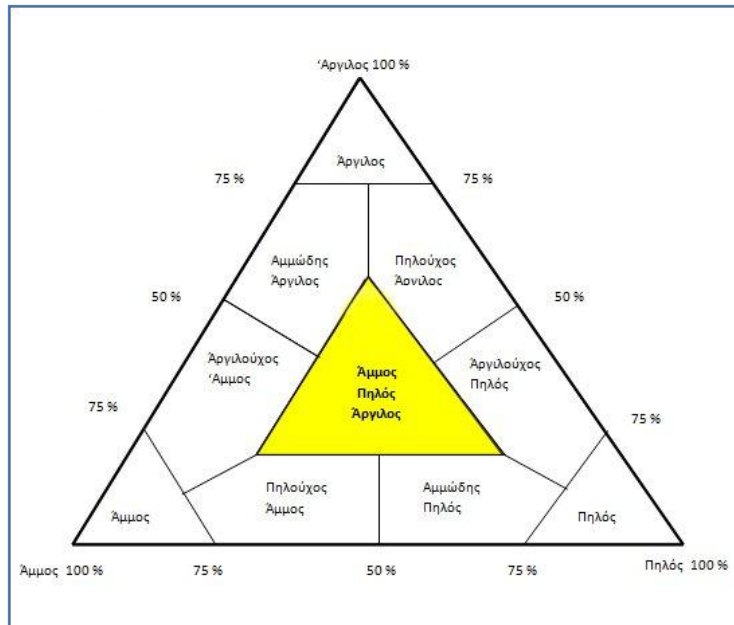
$$c_p = 2540 - 24.53n + 0.1461n^2 \quad (\Gamma.1.2)$$

και προέρχεται από τον Bachman (1985).

Με βάση την παρατήρηση για την μείωση του πορώδους με την αύξηση του βάθους, η παραπάνω σχέση υποδηλώνει και μια αύξηση της ταχύτητας διάδοσης των διαμήκων κυμάτων με το βάθος. Από ανάλυση μεγάλου αριθμού δειγμάτων από αμμώδη θαλασσινά ιζήματα ο Hamilton (1979) δίδει μία σχετική εμπειρική σχέση :

$$c_p = 1806D^{0.015} \quad (\Gamma.1.3)$$

όπου D είναι το βάθος στο ίζημα σε m.



Σχήμα Γ1. Χάρτης σύστασης ιζημάτων (Χαρακτηριστικό τρίγωνο)

Εμπειρικές σχέσεις που συνδέουν την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων με την πυκνότητα έχουν επίσης αναφερθεί. Μία από αυτές προερχόμενη επίσης από τον Bachman είναι

$$c_p = 2390 - 1.358\rho + 5.246 \times 10^{-4} \rho^2 \quad (\Gamma.1.4)$$

όπου η πυκνότητα δίδεται σε kg/m^3

Στα θαλασσινά ιζήματα εμπεριέχονται συνήθως τρεις οικογένειες υλικών : άμμος (sand) άργιλος (clay) και πηλός (silt). Ανάλογα με την ποσοστιαία σύσταση των ιζημάτων σε κάθε είδος υλικού τα ιζήματα χαρακτηρίζονται ως αμμώδη, αργιλούχα ή πηλούχα. Στο σχήμα Γ.1 εμφανίζεται ένα χαρακτηριστικό τρίγωνο που περιγράφει ένα θαλασσινό ίζημα με βάση την ποσοστιαία του σύσταση.

Σε ό,τι αφορά την ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων, λόγω της χαλαρής ακαμψίας των θαλασσινών ιζημάτων που συνεπάγεται και μικρό μέτρο ελαστικότητας, αυτή είναι μικρή. Μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις που επιζητείται ο υπολογισμός της διάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις και για υψηλές συχνότητες, τα θαλασσινά ιζήματα θεωρούνται ρευστά. Ωστόσο η ακριβής μοντελοποίηση της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα επιβάλλει να ληφθούν υπ' όψιν και οι ελαστικές ιδιότητες των ιζημάτων.

Ο πίνακας Γ.1 δίδει συνοπτικά μέσες τιμές παραμέτρων των θαλασσινών ιζημάτων με βάση την σύνθεσή τους. Οι τιμές του πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν απώλειες πυθμένα ή ανακλάσεις από τα στρώματα του πυθμένα όταν δίδεται η περιγραφή ή το πορώδες του ιζήματος.

Είδος Ιζημάτος	Πορώδες	Σύσταση %			Πυκνότητα (kg/m ³)	Ταχύτητες (m/sec)		α_p (dB/m·kHz)
		Άμμος	Πηλός	Άργιλος		C_p	C_s	
Χονδρή άμμος	36	100	0	0	2030	1850	250	0,47
Μέση άμμος	40	100	0	0	1980	1750	250	0,5
Λεπτή άμμος	43,6	88	6	6	1970	1740	200	0,51
Πηλούχος άμμος	53	65	21	14	1830	1677	450	0,69
Αμμώδης πηλός	66	29	56	15	1650	1550	370	0,3-0,76
Πηλός	68	7	80	13	1600	1600	270	0,24-0,68
Άμμος άργιλος πηλός	70	33	41	26	1500	1578	400	0,11
Αργιλούχο ς πηλός	78	5	60	35	1420	1530	300	0,08
Πηλούχος άργιλος	80	3	36	61	1400	1520	240	0,07
Άργιλος	86	1	20	79	1280	1490	180	0,06

Πίνακας Γ.1 Μέσες τιμές παραμέτρων θαλασσινών ιζημάτων

Γ.2 Στρωματοποίηση θαλασσινών ιζημάτων.

Η μοντελοποίηση του θαλασσινού βυθού για τις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, γίνεται με πολλούς τρόπους ανάλογα με τις απαιτήσεις ακρίβειας που υπάρχουν και τις συγκεκριμένες εφαρμογές.

Η απλούστερη περίπτωση είναι εκείνη σύμφωνα με την οποία ο πυθμένας θεωρείται ομογενής και ημιάπειρος σε έκταση. Αυτό σημαίνει ότι μετά την διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα δεν υπάρχει ως προς το βάθος άλλο όριο ή διεπιφάνεια. Τα επιφανειακά ιζήματα στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζουν ολόκληρο το βυθό.

Όταν όμως είναι γνωστή η στρωμάτωση του πυθμένα, η μοντελοποίηση μπορεί να γίνει με επάλληλα στρώματα διαφορετικής σύστασης που χωρίζονται μεταξύ τους με οριζόντιες επιφάνειες (horizontally stratified medium). Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές το τελευταίο στρώμα θεωρείται ημιάπειρο σε έκταση. Από μορφολογικής πλευράς, το τελευταίο στρώμα του πυθμένα συνήθως αποτελείται από σκληρά υλικά που χαρακτηρίζονται από αρκετή ακαμψία αλλά και μεγάλες ταχύτητες διαμήκων και διατμητικών κυμάτων. Αυτή είναι η περίπτωση σε βαθιές κυρίως θάλασσες που τα μαλακά ιζήματα έχουν μικρό συνήθως πάχος.

Όταν οι διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στα ιζήματα δεν είναι επίπεδες, ή εάν παρατηρούνται ανυψώσεις σκληρών υλικών στον πυθμένα, η μοντελοποίηση πρέπει να περιλάβει και αυτή τη γεωμετρία. Τα προβλήματα γενικά δυσκολεύουν σε αυτή την περίπτωση.

Τέλος να επισημάνουμε ότι σε ρηχές θάλασσες παρατηρούνται αυξημένες ποσότητες άμμου στα ιζήματα αφού αργιλώδη υλικά λόγω του μικρού κόκκου τους είναι δύσκολο να εναποτεθούν σε περιοχές με μεγάλη κινητικότητα νερού, όπως είναι οι ρηχές θάλασσες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. Πρόσθετες παρατηρήσεις στη λύση της ακουστικής εξίσωσης

Δ.1 Η λύση της ακουστικής εξίσωσης με τριγωνομετρικές συναντήσεις

Είναι γνωστό από τη θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων ότι μια εναλλακτική έκφραση της λύσης των εξισώσεων 2.4.6 και 2.4.12 που οδηγούν στις συνιστώσες της λύσης της ακουστικής εξίσωσης στο πεδίο του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα, δίδεται μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι για τη γενική λύση της εξίσωσης 2.4.6 που μας δίνει τη χρονική εξάρτηση της λύσης μπορούμε να πάρουμε

$$T = D \cos(\omega t) + E \sin(\omega t) \quad (\Delta.1.1)$$

και για εκείνες των 2.4.12 που μας δίνουν την εξάρτηση από το χώρο :

$$p_x(x) = D_1 \cos(k_x x) + E_1 \sin(k_x x) \quad (\Delta.1.2\alpha)$$

$$p_y(y) = D_2 \cos(k_y y) + E_2 \sin(k_y y) \quad (\Delta.1.2\beta)$$

$$p_z(z) = D_3 \cos(k_z z) + E_3 \sin(k_z z) \quad (\Delta.1.2\gamma)$$

Η αντιστοίχιση των συντελεστών των λύσεων αυτών με εκείνους που εμφανίζονται στις εξισώσεις 2.4.7 και 2.4.14 αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Στα πλαίσια των σημειώσεων του βιβλίου υιοθετούμε την έκφραση των λύσεων με εκθετικές συναρτήσεις, αλλά σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να είναι προτιμότερη η χρήση των λύσεων με τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπενθυμίζουμε ότι η πίεση είναι μιγαδικό μέγεθος, κάτι που σημαίνει ότι οι συντελεστές των εξισώσεων του παραρτήματος είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί. Η τιμή τους θα προκύψει από εφαρμογή των οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Στο επόμενο εδάφιο δίνουμε μια φαινομενολογική περιγραφή των λύσεων της ακουστικής εξίσωσης με αναφορά στα κλασσικά μεγέθη που είναι η συχνότητα, η περίοδος και το μήκος κύματος.

Δ.2 Απεικόνιση της λύσης της ακουστικής εξίσωσης.

Θα θεωρήσουμε τη λύση της ακουστικής εξίσωσης σε μια διάσταση και μάλιστα με όδευση προς τα αυξανόμενα x .

Η έκφραση της λύσης είναι τότε από τη 2.4.15

$$p_1(x, t) = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\Delta.2.1)$$

Η πραγματική πίεση (θα τη συμβολίσουμε εδώ με $\tilde{p}_1(x)$) είναι το πραγματικό μέρος της $p_1(x)$ δηλαδή

$$\tilde{p}_1(x, t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t) \quad (\Delta.2.2)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε πως απεικονίζονται οι μεταβολές της πίεσης στο μονοδιάστατο αυτό χωρίο συναρτήσει του χρόνου και της απόστασης.

Στο σχήμα Δ1 βλέπουμε τη μεταβολή της πίεσης του συμπιεστού μέσου στο οποίο διαδίδεται ο ήχος σε δύο διαφορετικές **δεδομένες θέσης** στο πεδίο διάδοσης. Το πλάτος της πίεσης έχει ληφθεί αυθαίρετα ίσο με τη μονάδα αφού ένα πραγματικό πλάτος θα προκύψει από εφαρμογή των αρχικών συνθηκών. Τα μεγέθη που εμφανίζονται στο σχήμα έχουν υπολογιστεί για συχνότητα $f=1000$ Hz και ταχύτητα διάδοσης του ήχου $c=1500$ m/sec. Οι δύο θέσεις είναι 4 και 2 μέτρα μακριά από την αρχή του άξονα των x και μπορούμε να αναγνωρίσουμε στο σχήμα την περίοδο του κύματος που είναι $T=10^{-3}$ sec ($=1/f$) ως την απόσταση ανάμεσα σε δύο συνεχόμενες κορυφές της κυματομορφής.

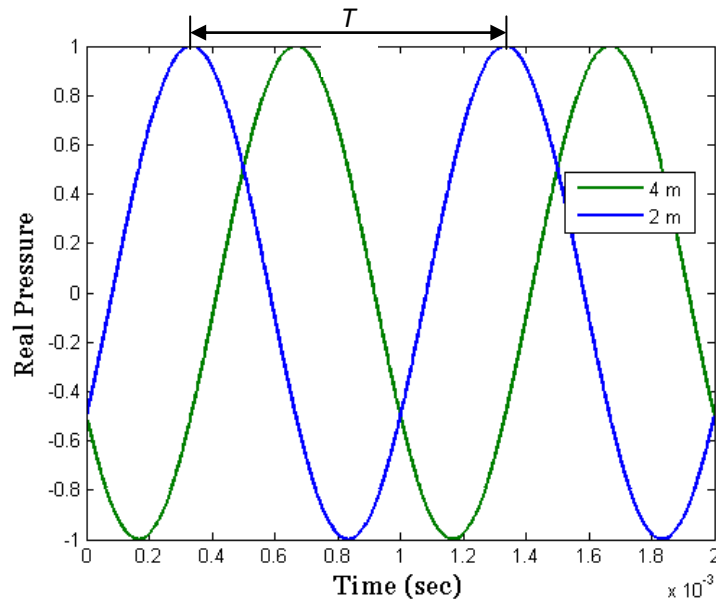
Στο σχήμα Δ2 βλέπουμε τη μεταβολή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης για χρόνο $t=1$ sec. Παρουσιάζονται δύο καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2\pi$. Η δεύτερη καμπύλη προκύπτει όταν θεωρήσουμε χρονική εξάρτηση του κύματος της μορφής

$$T(t) = e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} \quad (\Delta.2.3)$$

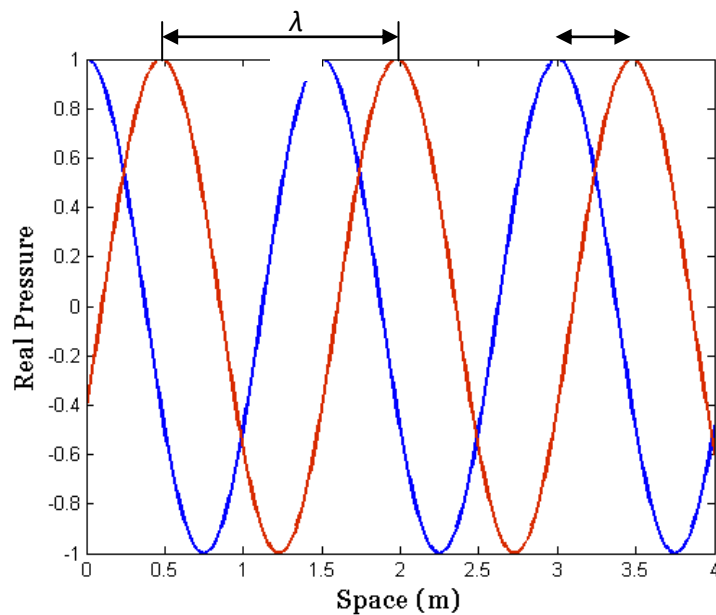
Η ανωτέρω έκφραση μας δίνει έκφραση για την πραγματική πίεση :

$$\tilde{p}_1(x, t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t - \Delta\varphi) \quad (\Delta.2.4)$$

Στο σχήμα Δ2 αναγνωρίζουμε και το μήκος κύματος που είναι $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500}{1000} = 1,5$ m. ενώ έχει σημειωθεί και η διαφορά φάσης των δύο κυματισμών.



Σχήμα Δ1. Μεταβολή της ακουστικής πίεσης σύμφωνα με την Δ.2.2 σε δύο δεδομένες θέσεις στο χώρο $x_1 = 2m$, $x_2 = 4m$.



Σχήμα Δ2. Μεταβολή της ακουστικής πίεσης σύμφωνα με την Δ.2.4 για $\Delta\varphi = 0$ (μπλε γραμμή) και $\Delta\varphi = 2$ (κόκκινη γραμμή).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε. Η ακουστική εξίσωση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Εάν διατυπώσουμε τον τελεστή ∇^2 στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, η ακουστική εξίσωση για την ακουστική πίεση γράφεται

$$\frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial \theta}] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{E.1.1})$$

όπου $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων που παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Είναι προβλήματα που αναφέρονται σε ένα άπειρο χωρίο με σημειακή αρμονική πηγή. Η λύση που θα δούμε στη συνέχεια είναι μία καλή προσέγγιση για τη λύση της ακουστικής εξίσωσης πολύ κοντά στην πηγή.

Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν η ακουστική εξίσωση για την πίεση που εξαρτάται πλέον μόνο από το r μεταπίπτει στην

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{E.1.2})$$

όπου $p = p(r, t)$.

Για αρμονικά αποκλίνοντα κύματα με την ίδια χρονική εξάρτηση που είδαμε μέχρι τώρα, η λύση της ως άνω ακουστικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp[i(kr - \omega t)] \quad (\text{E.1.3})$$

που αντιπροσωπεύει αποκλίνοντα από την πηγή αρμονικά κύματα και εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιεί την ακουστική εξίσωση. Αξίζει εδώ να προσέξουμε την εξάρτηση του πλάτους της πίεσης από την απόσταση. Το πλάτος του κύματος μειώνεται γραμμικά με την απόσταση και το γεγονός αυτό αποτελεί πρακτικά και τη μορφολογική διαφορά της ανωτέρω έκφρασης από τη λύση για επίπεδα κύματα. Ο συντελεστής A υπολογίζεται από τα δεδομένα της ακουστικής πηγής.

Η σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου και στην πίεση δίδεται από την έκφραση

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{E.1.4})$$

όπου u είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την ακτίνα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Υπενθυμίζεται ότι και η ταχύτητα θα πρέπει να έχει την ίδια χρονική

εξάρτηση και μια και υπακούει σε εντελώς ίδια εξίσωση και στον ίδιο νόμο μεταβολής του πλάτους της συναρτήσεως του r .

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, (kr μεγάλο) μπορεί να αποδειχθεί ότι η πίεση είναι πρακτικά σε φάση με την ταχύτητα, και μπορούμε να γράψουμε (γιατί;)

$$p(r,t) \approx (\rho c)u(r,t) \quad (\text{E.1.5})$$

Βιβλιογραφία

Αναφέρεται μόνο η βασική βιβλιογραφία στην οποία στηρίζονται οι σημειώσεις. Η βιβλιογραφία της περιοχής είναι πολύ μεγάλη.

- C.S. Clay and H. Medwin: *Acoustical Oceanography: Principles and Applications*, John Wiley 1977. – Το βιβλίο αποτελεί την βάση για τη δομή του μαθήματος.
- H. Medwin and C.S. Clay: *Fundamentals of Acoustical Oceanography*. Academic Press 1998. - Το βιβλίο αποτελεί μια ανανεωμένη και εμπλουτισμένη έκδοση του πρώτου έργου των ίδιων συγγραφέων στο ίδιο αντικείμενο.
- W.S. Burdic: *Underwater Acoustic System Analysis*. Prentice Hall, 1984.
- C.A. Boyles: *Acoustic Waveguides. Applications to Oceanic Sciences*. John Wiley 1984.
- L. Brekhovskikh and Yu. Lysanov: *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer Verlag 1982.
- I. Tolstoy and C.S. Clay: *Ocean Acoustics, Theory and Experiment in Underwater Sound*, American Institute of Physics, 1987.
- L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.O. Copens and J.V. Sanders: *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons 1982.
- A. Papoulis: *Signal Analysis* Mc Graw Hill, 1977.
- F. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt: *Computational Ocean Acoustics*. A.I.P. Press, 2000.
- W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press: *Elastic Waves in Layered Media*. Mc Graw Hill, 1957.

Επίσης

- Μ. Ταρουδάκη : *Μαθηματική Μοντελοποίηση Κυματικής Διάδοσης στη Θάλασσα*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2008.