

Διευκρινήσεις σχετικά με την αναμενόμενη λύση των θεμάτων του διαγωνίσματος
Σεπτεμβρίου στο μάθημα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Πρώτη Άσκηση.

1. Η πρώτη άσκηση απαιτούσε χρήση των δεδομένων για την διατύπωση της Λαγκρανζιανής. Δεν ήταν αποδεκτή η απλή χρήση του γενικού τύπου των σημειώσεων ως πλήρης απάντηση. Έπρεπε να γίνει αντικατάσταση των μεγεθών που υπεισέρχονται στον τύπο με χρήση των δεδομένων. Ωστόσο δείτε και το επόμενο σχόλιο.
2. Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν μετά από λίγες πράξεις με χρήση του θεωρήματος E-L. Ήταν σημαντικό να γίνει προσεκτική σειρά υπολογισμών για να προκύψει το σωστό αποτέλεσμα. Όσοι χρησιμοποίησαν τη σωστή αντικατάσταση των δεδομένων της άσκησης στο γενικό τύπο της Λαγκρανζιανής στο ερώτημα αυτό, θεωρήθηκε ότι απάντησαν σωστά και στο πρώτο ερώτημα. Σημαντικό ήταν να προκύψει το σωστό αποτέλεσμα.

Οι εξισώσεις και για τις δύο ομάδες του διαγωνίσματος κατέληγαν στο σύστημα:

$$m\ddot{y} = qE_y + q\dot{z}B$$

$$m\ddot{z} = qE_z - q\dot{y}B$$

3. Η αντικατάσταση ήταν εύκολο να γίνει.
4. Χρειαζόμαστε την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα του σωματίου.

Δεύτερη Άσκηση

Δυστυχώς εδώ είχαμε τα περισσότερα προβλήματα παρά τις επισημάνσεις που έκανα τόσο στην ανάλυση της Μεγάλης Εργαστηριακής Άσκησης όσο και στην ανάλυση των θεμάτων Ιουλίου. Η εφαρμογή του σωστού μοντέλου είναι το βασικό σημείο για την ορθή επίλυση της άσκησης και έχουν γίνει πολλές επισημάνσεις για τη διαφορά συνεχούς και διακριτού μοντέλου.

Ομάδα 1.

1. Ζητούσα να διατυπωθεί ένα διακριτό μοντέλο και από τη διατύπωση του προβλήματος φαινόταν ότι αφού έχει συγκεκριμένη χωρητικότητα το σύστημα, θα έπρεπε να είναι το διακριτό λογιστικό μοντέλο. Το μοντέλο θα μπορούσε να διατυπωθεί με βάση το αντίστοιχο συνεχές, αλλά με χρήση του τύπου 5.16 του βιβλίου (θα προσέξατε ότι έχει ένα λάθος στον δείκτη του πρώτου μέρους της εξίσωσης που έχει διορθωθεί στις παραδόσεις). Η

προσθήκη στον τύπο 5.16 αφορά την αλιεία που έχει ρυθμό μείωσης πληθυσμού E . Επομένως το διακριτό μοντέλο είναι :

$$P_{t+1} = P_t \left[1 + r \left(1 - \frac{P_t}{K} \right) \right] - EP_t$$

Όσοι χρησιμοποίησαν το συνεχές μοντέλο (τύπος 5.14) έκαναν λάθος.

Οι παράμετροι ελέγχου το μοντέλου είναι αυτές που δίνει η εκφώνηση.

2. Το δεύτερο σημείο ισορροπίας προκύπτει από τη σχέση $\Delta P = 0$, $P_{t+1} = P_t$

$$P_t \neq 0 \text{ οπότε έχουμε } P_{h2} = K \left(1 - \frac{E}{r} \right).$$

3. Η απόδοση της συγκομιδής ελέγχεται όπως και στο συνεχές μοντέλο από το λόγο E/r .
4. Ο υπολογισμός απαιτούσε στοιχειώδεις πράξεις.

Ομάδα 2

1. Το συνεχές μοντέλο που ζητούσε η άσκηση δίδεται από τον τύπο 5.14. Οι παράμετροι δίδονται στην εκφώνηση.
2. Προσοχή ! Στο βιβλίο δίδεται η μέγιστη σταθερή απόδοση και μάλιστα ζητείται να αποδειχτεί ο τύπος. Στην εκφώνηση σας έδινα όλα τα στοιχεία για αποδείξετε τον τύπο που ήταν το ζητούμενο. Η απόδοση υπολογίζεται από τον τύπο EN με βάση την εκφώνηση και θα πρέπει να αποδειχτεί ότι για τη ΣΤΑΘΕΡΗ τιμή του πληθυσμού $N_h E$ το E πρέπει να είναι $r/2$. Ο τύπος που δίνει το $N_h E$ είναι $EK \left(1 - \frac{E}{r} \right)$ και η απόδειξη είναι εύκολη αφού υπολογιστεί το E που δίνει μέγιστη την ως άνω έκφραση.
3. Το αντίστοιχο διακριτό μοντέλο είναι αυτό που ζητείται και από την ομάδα 1 και είναι μια προσαρμογή της σχέσης 5.16 (διορθωμένης) με την προσθήκη του ρυθμού αλίευσης.

Τρίτη Άσκηση.

Πρόκειται για την άσκηση 2.5 του βιβλίου που υπονοεί κίνηση σε δύο διαστάσεις. Η μόνη διαφορά είναι στο ζητούμενο που αντί να ζητάμε «εξισώσεις» κίνησης, ζητάμε «εξίσωση» κίνησης. Εάν θεωρήσουμε τη θέση του σωματιδίου ως διανυσματικό μέγεθος οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες. Επειδή όμως κάποιοι φοιτητές μπορεί να μπερδεύτηκαν θεωρώ ότι είναι σωστές οι απαντήσεις είτε αναφέρονται είτε σε μία ή είτε σε δύο διαστάσεις ως προς την κίνηση του σώματος.

Η λύση σε μία διάσταση είναι εντελώς αντίστοιχη με εκείνη του ελατηρίου και θεωρείται πλήρης εφ' όσον έχει εισαχθεί το μήκος της ράβδου l . Επίσης πρέπει να

γίνει η παραδοχή για αβαρή ράβδο εκτός και εάν εισαχθεί στο πρόβλημα και το βάρος της ράβδου που το καθιστά πιο δύσκολο. Επίσης θεωρούμε ότι η ισορροπία του συστήματος βρίσκεται όταν το μήκος της ράβδου είναι l .

Δίδεται στη συνέχεια η λύση σε μία διάσταση με την παραδοχή για αβαρή ράβδο και με αναφορά στο σχήμα που δίδεται πιο κάτω.

Δύναμη $F_x = mg - \kappa x$

Δυναμική ενέργεια $V = -mgx + \frac{1}{2} \kappa x^2 + C$

Εξίσωση κίνησης με χρήση E-L $m\ddot{x} = mg - \kappa x$

Με εισαγωγή του μήκους της ράβδου l θέτοντας $x = l + x'$ παίρνουμε $m\ddot{x}' = -\kappa x'$ αφού $mg = \kappa l$. Εδώ x' είναι η απόκλιση από τη θέση ισορροπίας.

Για λήψη του πλήρους βαθμού της άσκησης έπρεπε να γίνουν οι απαιτούμενες παραδοχές και να διευκρινιστεί η θέση ισορροπίας.

