

Εισαγωγή

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.

- Βρείτε το ύψος του Πύργου της Πίζας χωρίς να ανεβείτε σε αυτόν



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.

- Βρείτε το πλάτος ενός ποταμού χωρίς να τον διαβείτε



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.

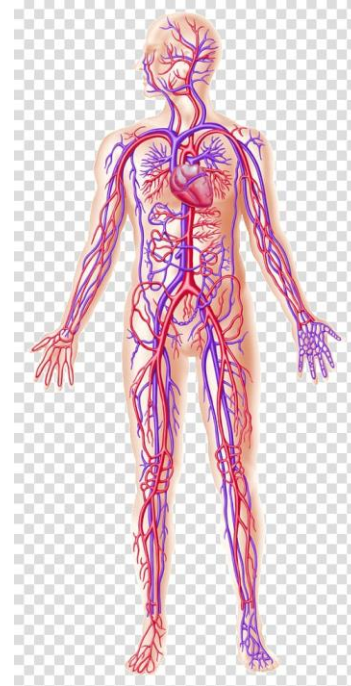
- Βρείτε τη θερμοκρασία στο κέντρο του ήλιου



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.

- Βρείτε την ποσότητα του αίματος στο σώμα ενός ανθρώπου φυσικά χωρίς να το αδειάσετε

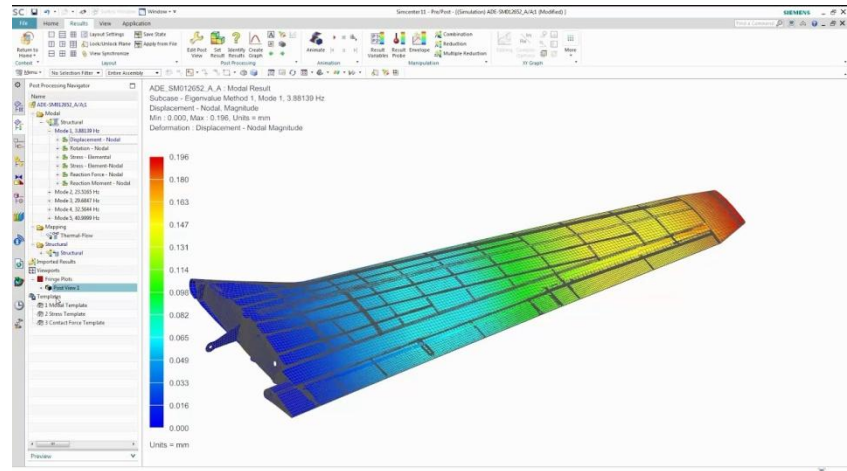
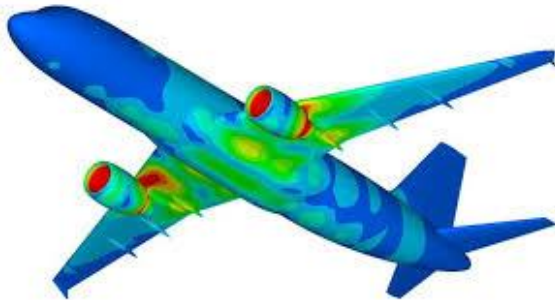


Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Εκτιμείστε τον πληθυσμό της Ελλάδας το 2030.
- Βρείτε την επίδραση στην οικονομία της χώρας εάν μειωθεί η συνολική φορολογία κατά 30 %.
- Βρείτε μια εκτίμηση του συνολικού ποσού που θα πρέπει να πληρώσει μια ασφαλιστική εταιρεία στους πελάτες της στη διάρκεια του επόμενου έτους.

Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Βρείτε τη μέγιστη δύναμη που αναπτύσσεται στην πτέρυγα ενός αεροσκάφους που πετά με συγκεκριμένη ταχύτητα σε ορισμένο ύψος



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Βρείτε τη μέγιστη ροπή που μπορεί να επενεργήσει σε σκάφος που πλέει σε συγκεκριμένο μέγιστο ύψος κύματος χωρίς να το ανατρέψει.



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Βρείτε τη μέγιστη δύναμη που αναπτύσσεται στη δομή ενός κτηρίου σε περίπτωση σεισμού ορισμένης έντασης.



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Βρείτε την ηλικία του πατέρα και του γιού εάν είναι γνωστό ότι τώρα η ηλικία του πατέρα είναι τέσσερεις φορές την ηλικία του γιού ενώ έπειτα από πέντε χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τρεις φορές την ηλικία του γιού.

Ηλικία πατέρα : x

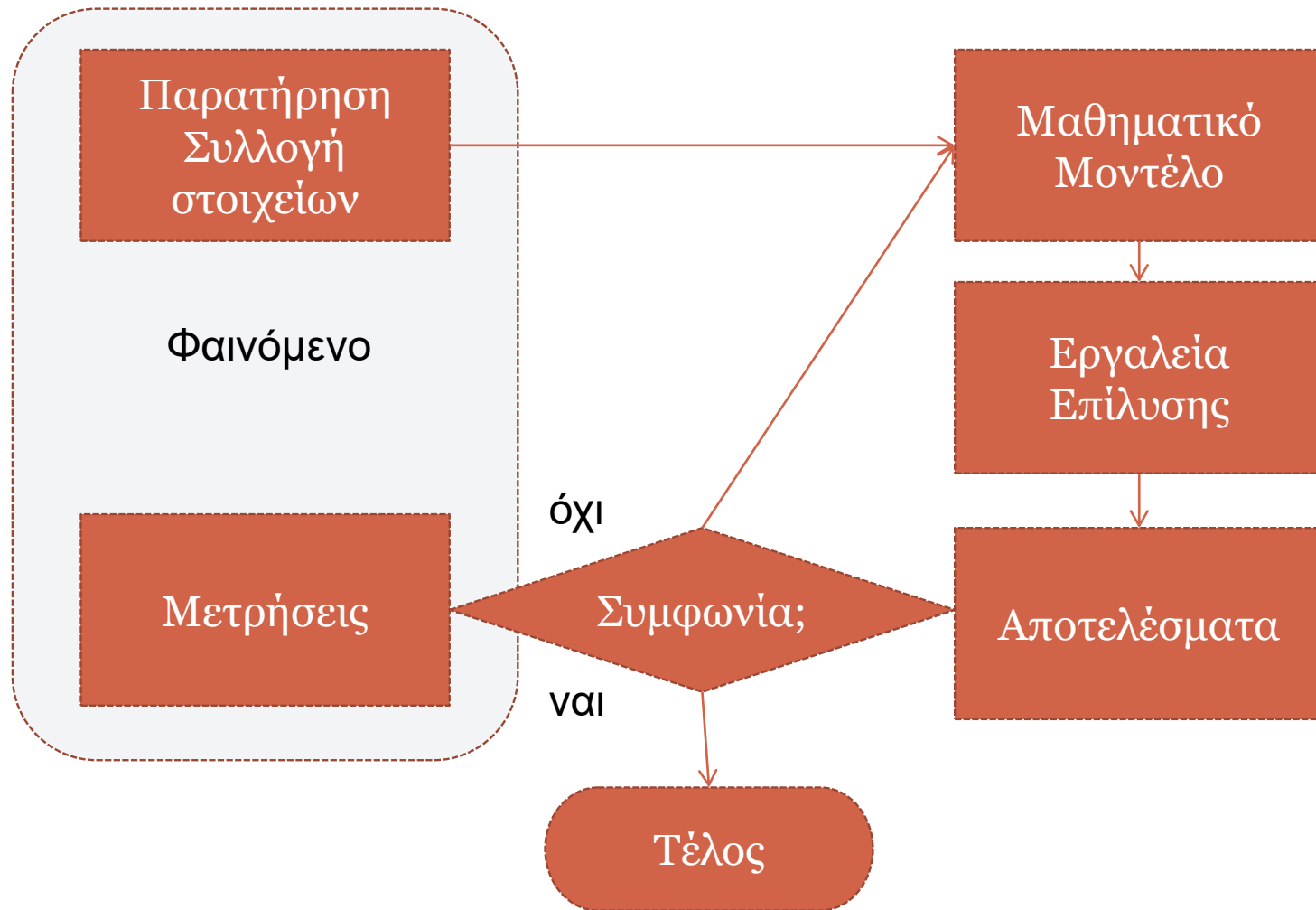
Ηλικία γιού : y

$$x = 4y,$$

$$x + 5 = 3(y + 5)$$

$$x = 40, y = 10$$

Διαδικασία Μαθηματικής Μοντελοποίησης



Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Η χρήση και η ανάπτυξη νέων, μαθηματικών εργαλείων που απαιτούνται για τη επίλυση ενός μοντέλου.
- Η πρόβλεψη / προσομοίωση (prediction/simulation) συμπεριφορών και ιδιοτήτων πολύπλοκων συστημάτων μέσω των μαθηματικών μοντέλων.
- Ο έλεγχος των υποθέσεων ενός μοντέλου και η αντίστοιχη βελτίωσή του.

Παράμετροι / Μεταβλητές των Μοντέλων

Χαρακτηριστικές παράμετροι σε ένα τυπικό μαθηματικό μοντέλο, μπορεί να είναι:

- Οι θέσεις σωματιδίων σε μικροσκοπικό επίπεδο, ή φυσικών σωμάτων σε μακροσκοπικό (**μοντέλα Φυσικών επιστημών**).
- Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου βιολογικού είδους (**σε Βιολογικά μοντέλα**).
- Οικονομικές μεταβλητές, όπως κόστος παραγωγής ή κέρδος (**σε Οικονομικά μοντέλα**).
- Οι ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελείται, και η γεωμετρία κατασκευής ενός αντικειμένου η ενός συστήματος (**σε Μοντέλα μηχανικού**)

Παράμετροι / Μεταβλητές των Μοντέλων

Χαρακτηριστικές παράμετροι σε ένα τυπικό μαθηματικό μοντέλο, μπορεί να είναι:

- Μεταβλητές που σχετίζονται με ανθρώπινες δραστηριότητες, παράδειγμα ποιότητα της ζωής σε μια μεγαλούπολη (σε μοντέλα Ανθρωπιστικών σπουδών).

Προσέξτε ότι στις περισσότερες από τις παραπάνω περιπτώσεις, οι μεταβλητές εξαρτώνται από το χρόνο και αυτό που ενδιαφέρει κυρίως είναι η πρόβλεψη της χρονικής τους εξάρτησης.

Μαθηματικά Μοντέλα

- Μοντέλα συνεχών διαφορικών εξισώσεων, ή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους
- Ντετερμινιστικά / Στοχαστικά μοντέλα: ανάλογα με ύπαρξη ή μη τυχαιότητας στο μοντέλο.
- Διακριτά / Συνεχή μοντέλα ανάλογα με το είδος των μεταβλητών που ορίζονται.

Μαθηματικά Μοντέλα

- Γραμμικά / Μη γραμμικά μοντέλα, ανάλογα με το αν οι μαθηματικές σχέσεις είναι γραμμικές ή όχι.
- Χρόνο-εξαρτώμενα / Χρόνο-ανεξάρτητα ανάλογα με το αν οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται με το χρόνο.
- Μηχανιστικά / Περιγραφικά, ανάλογα με το αν προκύπτουν από βασικούς νόμους ή είναι περισσότερο μια ποιοτική περιγραφή του υπό μελέτη συστήματος

Μαθηματικά Εργαλεία

- Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών εξισώσεων.
- Μέθοδοι επίλυσης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως χωρισμός μεταβλητών κλπ.
- Μέθοδοι επίλυσης στοχαστικών εξισώσεων.

Μαθηματικά Εργαλεία

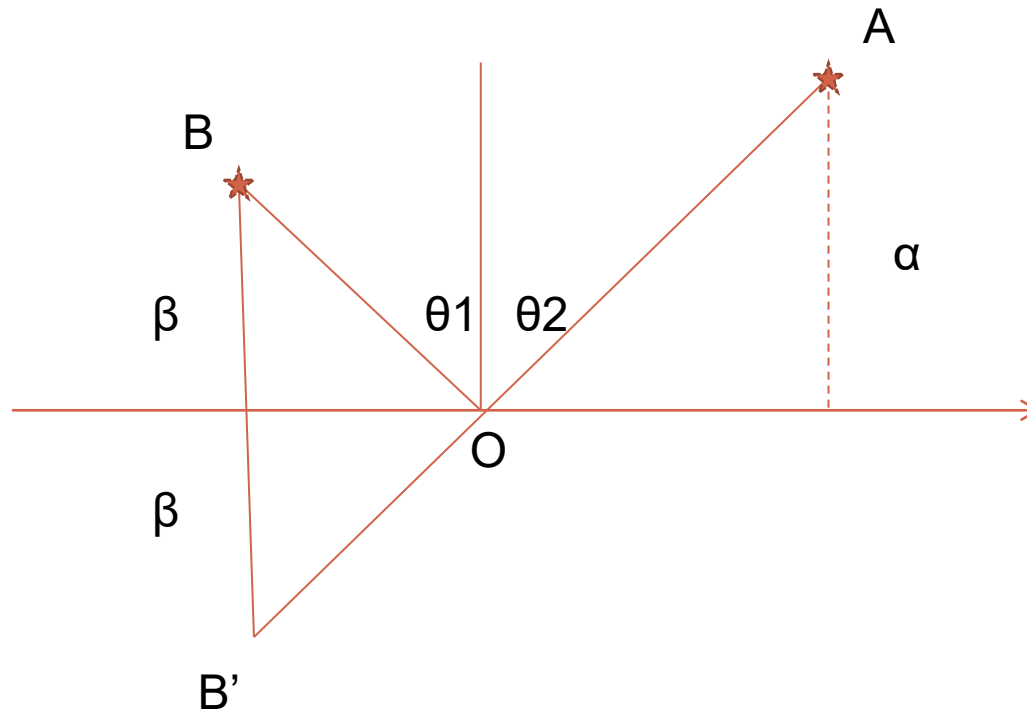
- Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ΣΔΕ, όπως Newton–Raphson, Runge–Kutta κλπ.
- Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ΜΔΕ, όπως πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία, φασματικά στοιχεία, κλπ.
- Μέθοδοι προσομοίωσης, όπως Μοριακή Δυναμική (Molecular Dynamics) και μέθοδοι Monte Carlo.

Περιεχόμενα Μαθήματος

Εισαγωγή	Παραδείγματα
Αναλυτική Μηχανική	Νόμοι του Newton
	Εξισώσεις Euler-Lagrange και Hamilton
Μοντελοποίηση μέσω Διαφορικών Εξισώσεων	Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων πρώτης τάξης
	Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης
Δυναμική Φορτίων-Δινών	Φορτία
	Δίνες
Μαθηματική Βιολογία	
Λοιπά Θέματα	

Μαθηματική Μοντελοποίηση - Σταύρος Κομινέας, Ευάγγελος Χαρμανδάρης
www.kalipos.gr

Απλά παραδείγματα



Αρχή Fermat

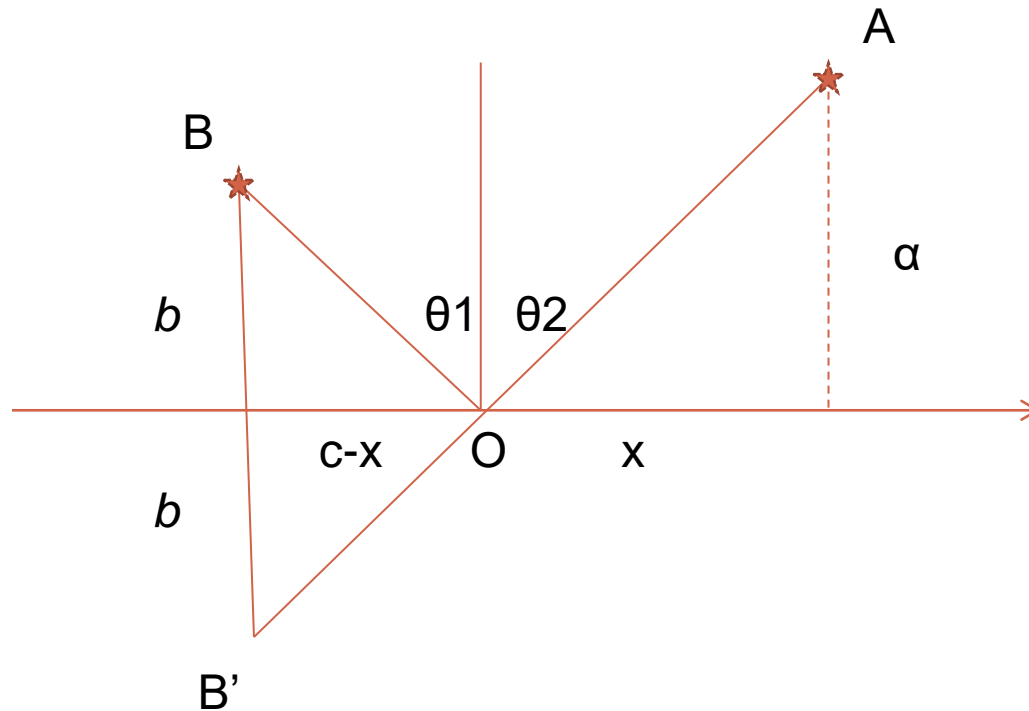
Το φως ταξιδεύει από ένα σημείο σε ένα άλλο με τρόπο που να διανύσει την απόσταση στον ελάχιστο χρόνο

B' συμμετρικό του B .

$AO+OB$ ελάχιστο όταν $AO+OB'$ ελάχιστο

AB' ευθεία επομένως γωνία $\theta_1 = \text{γωνία } \theta_2$

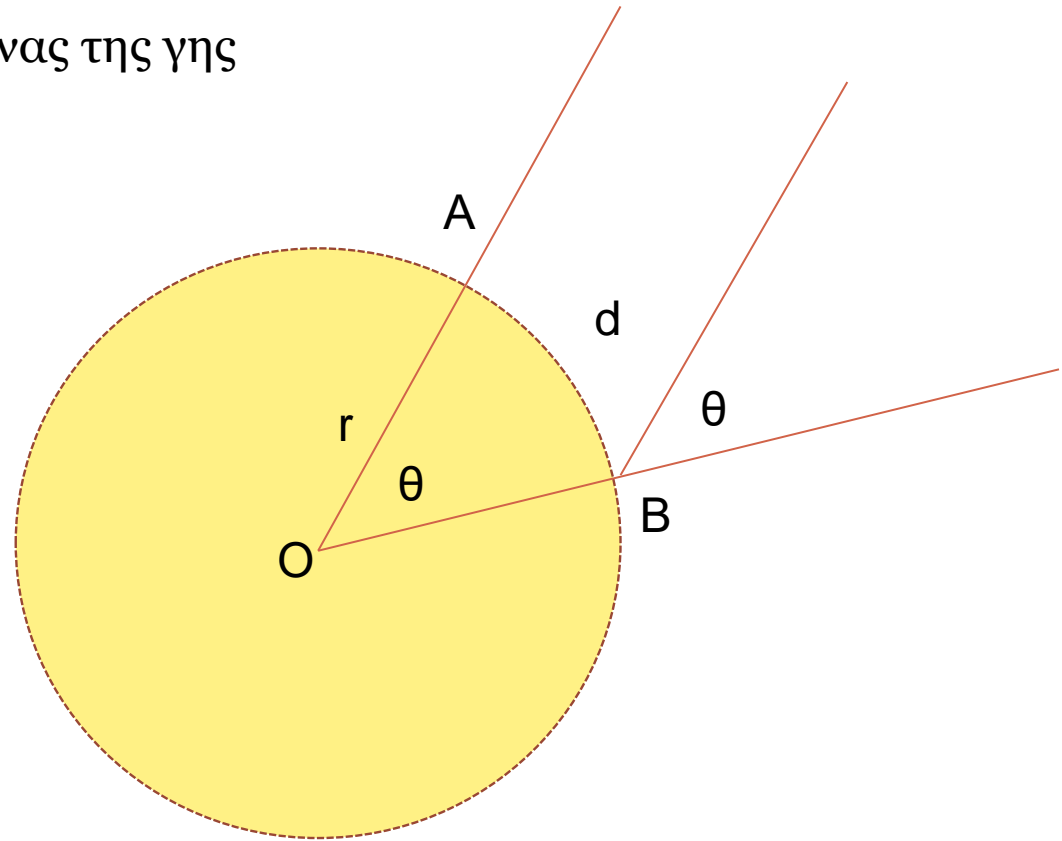
Απλά παραδείγματα



$$m = AO + OB = (a^2 + x^2)^{1/2} + [b^2 + (c-x)^2]^{1/2}$$

Άσκηση

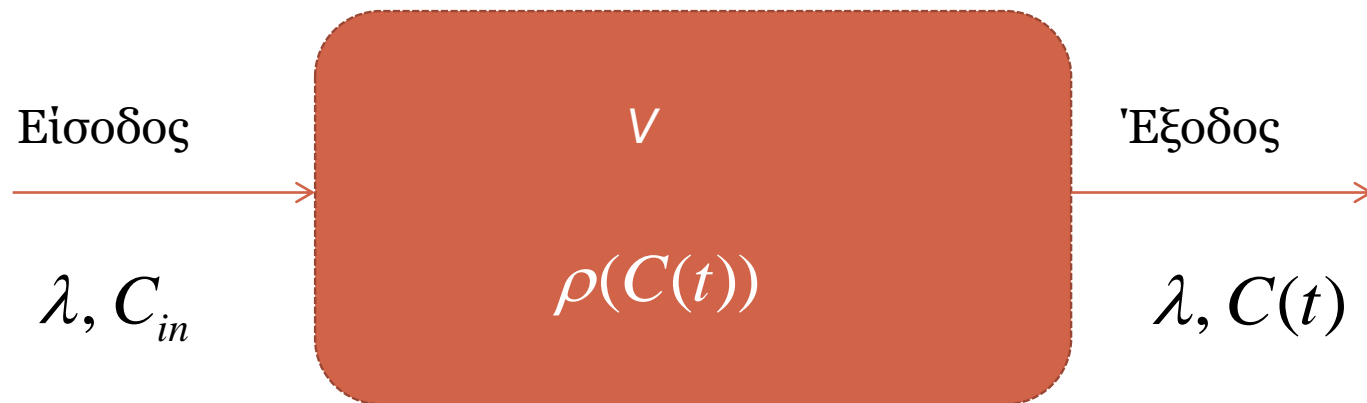
Υπολογισμός της ακτίνας της γης



$$\frac{d}{2\pi a} = \frac{\theta}{360}$$

$$\alpha = \frac{360d}{2\pi\theta}$$

Χημική Αντίδραση



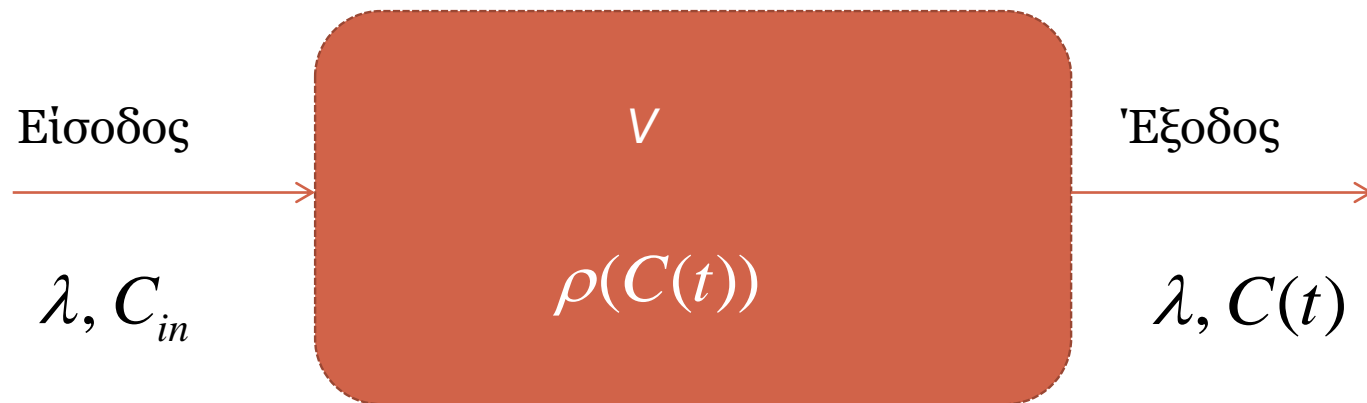
V , όγκος αντιδραστήρα

λ , παροχή αντιδρώντων (όγκος στη μονάδα του χρόνου)

C συγκεντρώσεις ουσιών (μάζα ανά μονάδα όγκου)

ρ συγκέντρωση ουσίας ανά μονάδα χρόνου που καταναλώνεται

Χημική Αντίδραση



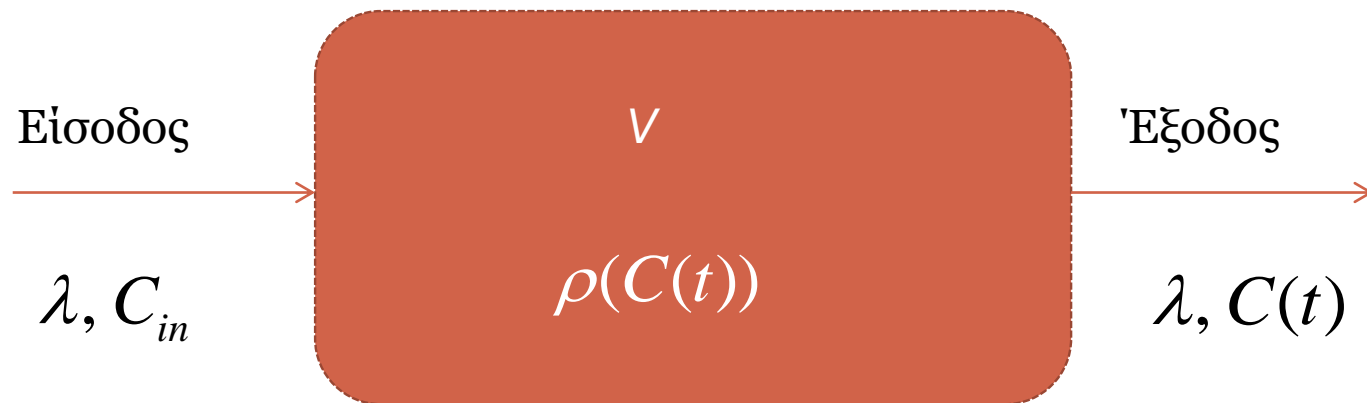
Υποθέσεις

Μία μόνο ουσία

Θερμοκρασία στον αντιδραστήρα σταθερή και η συγκέντρωση του αντιδρώντος C εξαρτάται μόνο από το χρόνο

Σταθερή παροχή λ

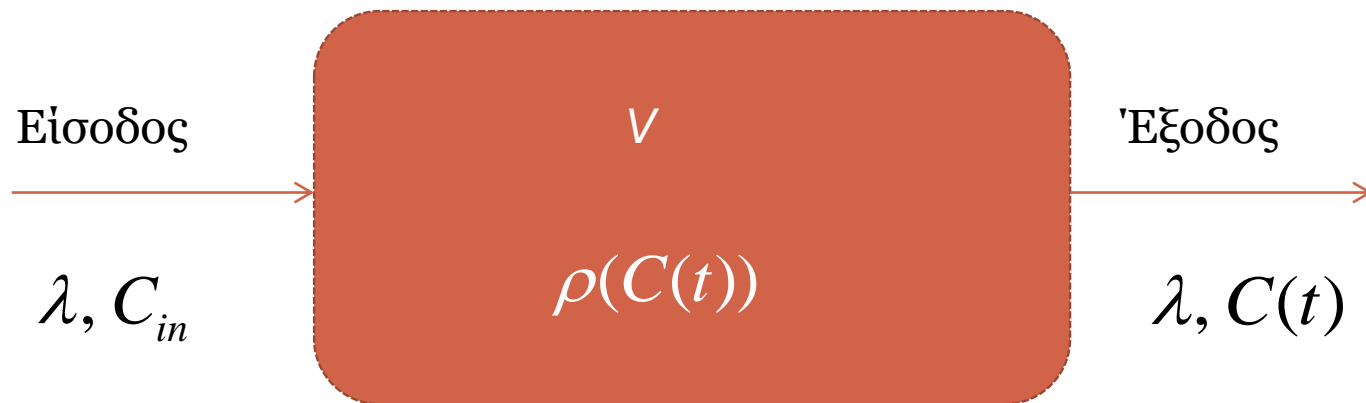
Χημική Αντίδραση



Απλοποιήσεις

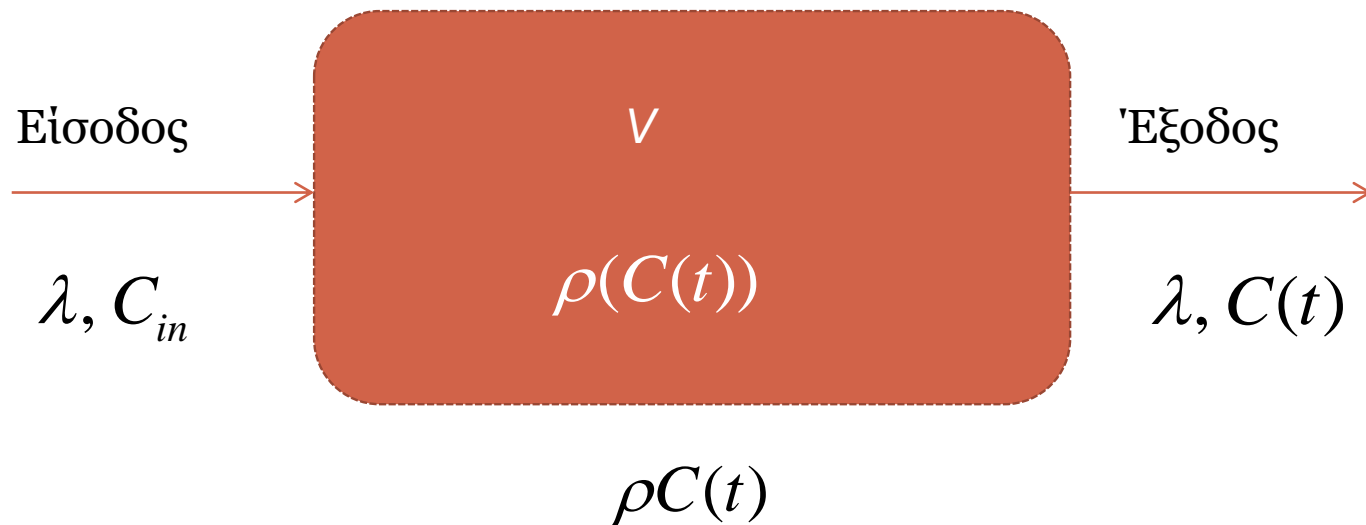
$$V=1$$

Χημική Αντίδραση



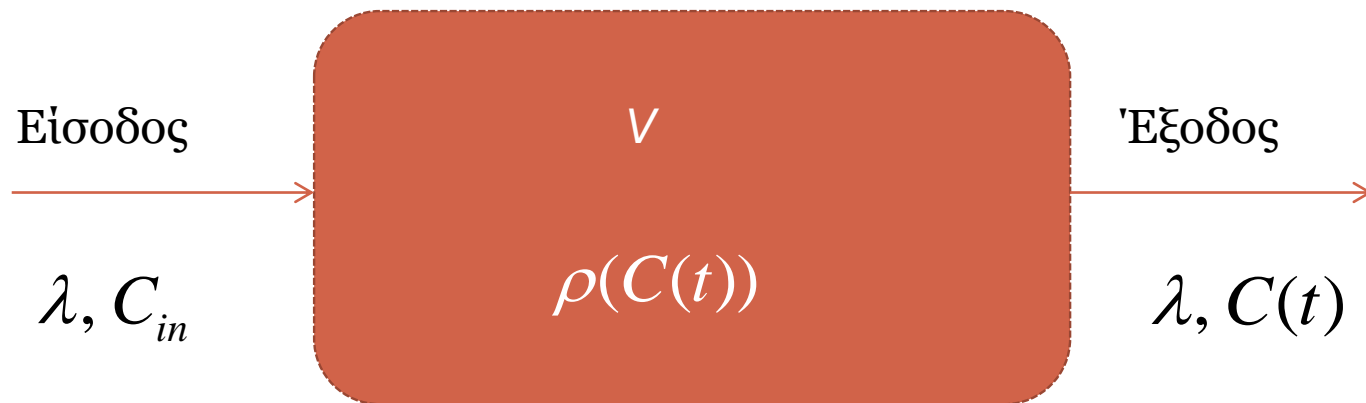
Μαθηματικό Μοντέλο : $\frac{d}{dt} C(t) = F(t, C)$

Χημική Αντίδραση



Μάζα ουσίας ανά μονάδα χρόνου που καταναλώνεται στον αντιδραστήρα

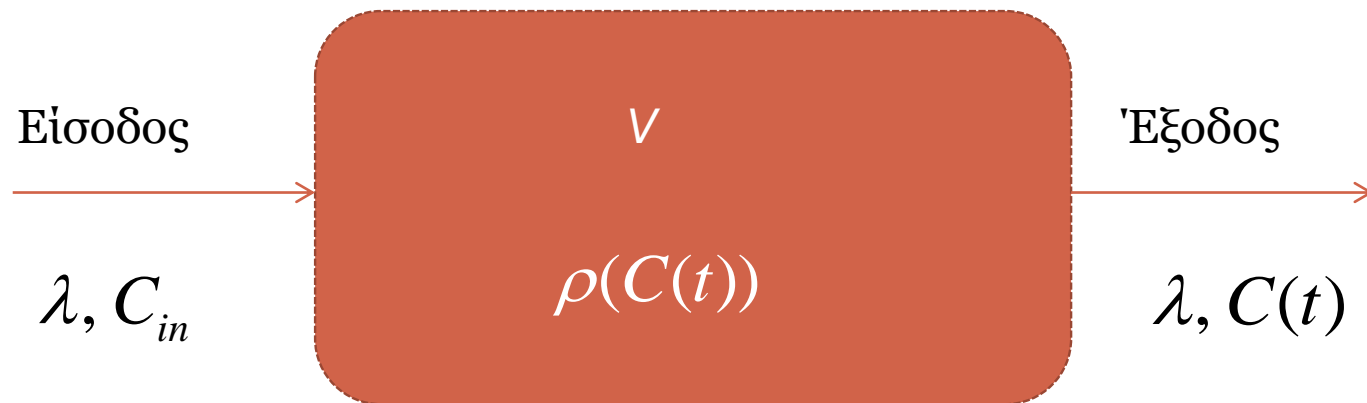
Χημική Αντίδραση



$$\frac{d}{dt} C(t) = \lambda C_{in} - \lambda C(t) - \rho(C(t))$$

Ισοζύγιο μάζας, όταν η μάζα των αντιδρώντων μεταβάλλεται με το χρόνο

Χημική Αντίδραση

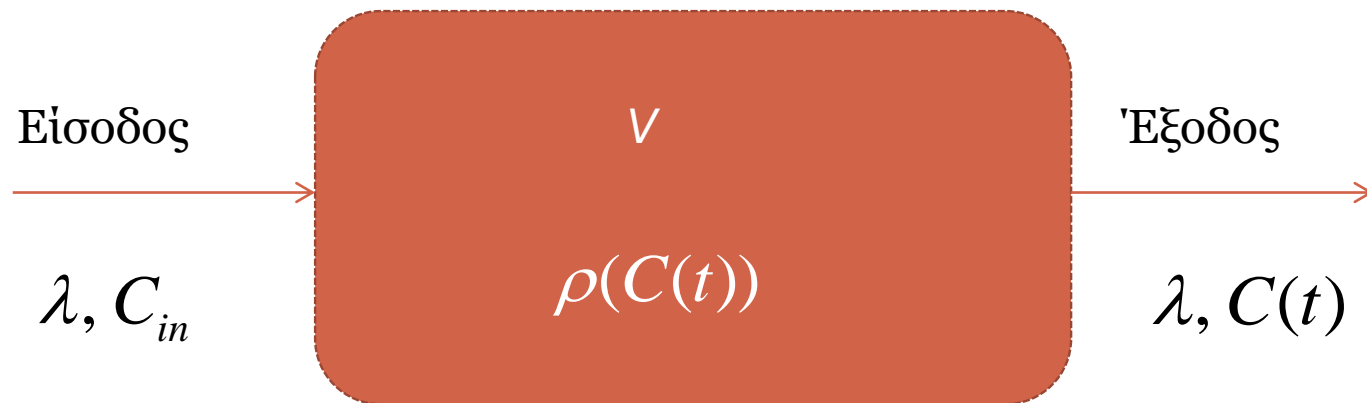


$$\frac{d}{dt} C(t) = \lambda C_{in} - \lambda C(t) - \rho(C(t))$$

Χρειαζόμαστε σχέση που συνδέει $C(t)$ και ρ

Για χημική αντίδραση 1^{ης} τάξης $\rho(C(t)) = kC(t)$ $k \rightarrow \text{time}^{-1}$

Χημική Αντίδραση

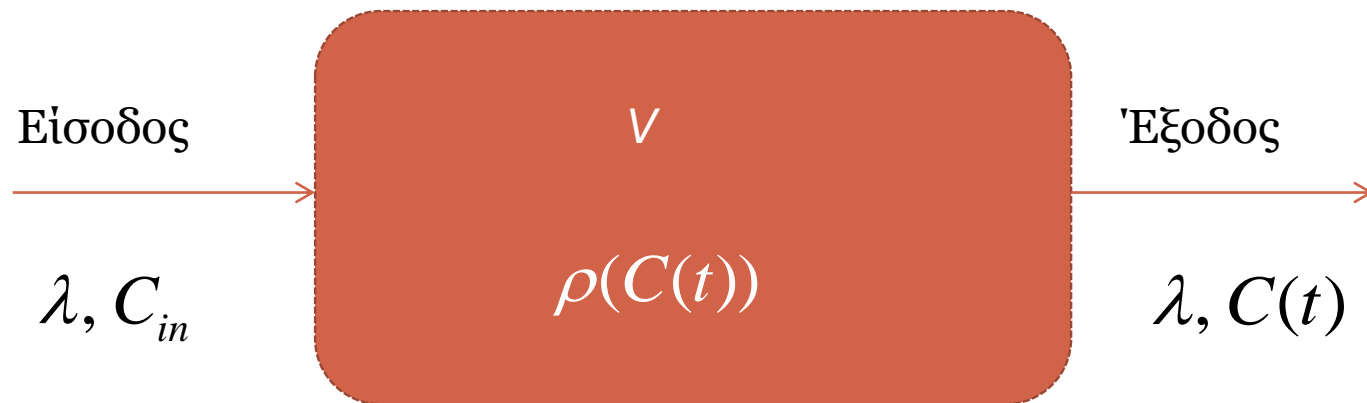


$$\frac{d}{dt} C(t) = \lambda C_{in} - \lambda C(t) - k(C(t))$$

Για δεδομένη αρχική συγκέντρωση $C(t = 0) = C_0$

Πρόβλημα αρχικών τιμών.

Χημική Αντίδραση



$$\frac{d}{dt} C(t) = \lambda C_{in} - \lambda C(t) - k(C(t))$$

Για δεδομένη αρχική συγκέντρωση $C(t = 0) = C_0$

Πρόβλημα αρχικών τιμών.

Χημική Αντίδραση

$$\frac{d}{dt} C(t) = \lambda C_{in} - \lambda C(t) - k(C(t))$$

Αδιαστατοποίηση του προβλήματος

$$T = \frac{1}{k}$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{C_{in}}, \quad \tau = \frac{t}{T} = kt, \quad \beta = \frac{k}{\lambda}$$

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{C}(\tau) = \frac{1}{\beta} (1 - \tilde{C}(\tau)) - \tilde{C}(\tau)$$