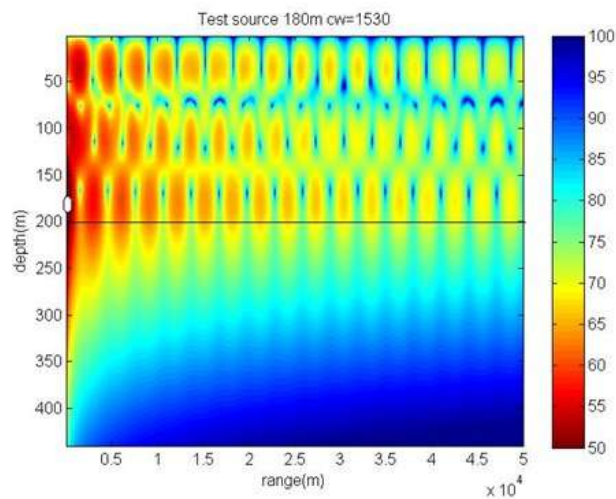




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ
ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΤΗ
ΘΑΛΑΣΣΑ**



Μιχάλης Ταρουδάκης

Καθηγητής

Ηράκλειο 2019

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.....	2
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	5
1. ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ.....	7
1.1 Εισαγωγή	7
1.2 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης.....	8
1.2.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου	8
1.2.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης	10
1.2.3 Η λύση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.....	12
1.2.4 Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της	14
1.2.5 Έκφραση της λύσης στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων	16
1.3 Το πρόβλημα Sturm-Liouville	17
1.3.1 Γενικοί ορισμοί.....	17
1.3.2 Θεμελιώδες θεώρημα στο πρόβλημα Sturm-Liouville	17
1.3.3 Πληρότητα ομάδας ιδιοσυναρτήσεων	19
1.3.4 Το συνεχές φάσμα.....	21
1.3.5 Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα (Dirac)	22
2. ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN	24
2.1 Ορισμός.....	24
2.2 Ανάπτυγμα της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.....	26
2.3 Η συνάρτηση Green για μια γενική διέγερση.	28
2.4 Οι συναρτήσεις δέλτα στο κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.....	28
2.4.1 Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.....	29
2.4.2 Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.....	31
3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΝΟΡΑ	32
3.1 Γενική γεωμετρία-οριακές συνθήκες	32
3.2 Ο απλός κυματοδηγός – Πρόβλημα Π1.....	33
3.2.1 Χωρισμός μεταβλητών.....	34
3.2.2 Οι συναρτήσεις Green του προβλήματος	35
3.2.3 Η λύση του προβλήματος	36
3.2.4 Υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2	38
3.2.5 Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.....	43
3.2.6 Κανονικές-Μη κανονικές ιδιοτιμές.....	46
3.3 Ο κυματοδηγός PEKERIS - Πρόβλημα Π2.....	49
3.3.1 Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων	52
3.3.2 Αναπαράσταση της λύσης	56
3.3.3 Φυσική ερμηνεία της λύσης της ακουστικής εξίσωσης στο περιβάλλον PEKERIS.....	58
3.4 Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του z ταχύτητα διάδοσης ήχου. Πρόβλημα Π3	62
3.4.1 Ένα σχήμα διαφορών για την λύση της εξίσωσης βάθους με μεταβαλλόμενο συναρτήσει του z, αριθμό κύματος.	63
3.4.2 Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών.....	67
3.4.3 Κανονικοποίηση	69
3.5 Η απώλεια διάδοσης	70

4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	74
4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	74
4.1 Γενική περίπτωση	74
4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία.....	77
5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ	83
5.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.	83
5.1.1. <i>Ο Μετασχηματισμός Fourier.</i>	84
5.1.2 <i>Συνέλιξη</i>	86
5.1.3 <i>Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier.....</i>	87
6. ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΑΣ.....	89
6.1 Φασική ταχύτητα.....	89
6.2 Ταχύτητα ομάδας.....	89
6.2.1 <i>Υπολογισμός της ταχύτητας ομάδας</i>	91
7. ΦΥΣΙΚΗ ΕΞΑΣΘΕΝΗΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ	92
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι : ΘΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ CAUCHY	95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	97

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το μάθημα αναφέρεται στο πρόβλημα του υπολογισμού του ηχητικού πεδίου στο θαλάσσιο περιβάλλον που προέρχεται από μία σημειακή αρμονική πηγή. Το θαλάσσιο περιβάλλον μοντελοποιείται ως κυματοδηγός με σύνορα που γεωμετρικά αντιστοιχούν στην επιφάνεια και στον πυθμένα της θάλασσας. Ο πυθμένας μοντελοποιείται ως ρευστό ακουστικό μέσο με πεπερασμένο ή ημιάπειρο πάχος.

Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος περιλαμβάνει τη διατύπωση και στη συνέχεια επίλυση προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες. Από τις σχετικές μεθόδους επίλυσης θα υιοθετήσουμε και θα αναφερθούμε στο τεύχος αυτό μόνο στην μέθοδο της ανάπτυξης της προς υπολογισμό συνάρτησης (ακουστικής πίεσης) σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων. Οι ιδιοσυναρτήσεις εν προκειμένω ορίζονται με βάση ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών σε μία διάσταση, τύπου Sturm-Liouville. Η σχετική θεωρία είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία, ως "Θεωρία Κανονικών Ιδιομορφών" (Normal-Mode theory).

Στα πλαίσια του μαθήματος γίνεται μία ανασκόπηση της θεωρίας των προβλημάτων Sturm-Liouville, ενώ παρατίθενται θέματα συναρτήσεων Green καθώς και ειδικών συναρτήσεων που είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων επίλυσης των προβλημάτων που θα συζητηθούν. Αναφέρονται επίσης τα θεωρήματα αναπαράστασης επί τη βάσει των οποίων είναι δυνατή η έκφραση της ακουστικής πίεσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Ως εφαρμογή της σχετικής θεωρίας εξετάζονται συγκεκριμένα προβλήματα ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα και σχολιάζεται η φυσική σημασία των μεγεθών που υπεισέρχονται στην μαθηματική μελέτη των προβλημάτων. Τα περιβάλλοντα στα οποία αναφέρονται τα ως άνω προβλήματα παρουσιάζουν αξονική συμμετρία, ενώ οι μεταβολές των φυσικών παραμέτρων που υπεισέρχονται ως συντελεστές στο αντίστοιχο πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται, μπορεί να μεταβάλλονται με το βάθος και την απόσταση από την ηχητική πηγή.

Εφαρμογές των μοντέλων που παρουσιάζονται στο μάθημα συναντά κανείς σε κάθε πρόβλημα που σχετίζεται με την χρήση του ήχου στη θάλασσα. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται σε θαλάσσιες επικοινωνίες, σε θέματα ακουστικής αναγνώρισης της σύστασης του θαλάσσιου ύδατος και του πυθμένα, παρακολούθησης των μεταβολών στο θαλάσσιο περιβάλλον καθώς και σε εφαρμογές της θαλάσσιας επιστήμης και τεχνολογίας που σχετίζονται με τον εντοπισμό και την αναγνώριση αντικειμένων στο νερό και τον πυθμένα.

Στην παρούσα τελευταία έκδοση έχουν γίνει αρκετές διορθώσεις σε σχέση με προηγούμενες εκδόσεις των σημειώσεων και προσθήκες κεφαλαίων που αναφέρονται στη διάδοση ευρυζωνίων ακουστικών κυμάτων, στο μετασχηματισμό Fourier καθώς και στη φυσική εξασθένηση του ήχου. Επίσης σε παράρτημα δίδονται στοιχεία από τη μιγαδική ανάλυση σε σχέση με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του

Cauchy που έχει χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης. Παρ' όλα αυτά ενδεχομένως να υπάρχουν αρκετά λάθη ακόμη που δεν έχουν διορθωθεί για τα οποία ζητώ την κατανόηση των αναγνωστών αλλά και την βοήθειά τους για την διόρθωσή τους.

Μάιος 2019

Μιχάλης Ταρουδάκης

1. ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.1 Εισαγωγή

Τα ακουστικά κύματα είναι διαταραχή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που διαδίδεται στο εν λόγω μέσον. Η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυμάτων προϋποθέτει τη διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η πίεση p , η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\vec{u}$ και η πυκνότητα ρ . Τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου :

$$p = p(\vec{x}, t), u = \vec{u}(\vec{x}, t), \rho = \rho(\vec{x}, t),$$

όπου με $\vec{x}$ συμβολίζουμε τις χωρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου στο θαλάσσιο περιβάλλον, θα αντιμετωπίσουμε μόνο ρευστά ακουστικά μέσα, στα οποία τα ακουστικά κύματα είναι διαμήκη. Η περίπτωση της διάδοσης του ήχου σε ένα περιβάλλον στο οποίο συνυπάρχουν και ακουστικά μέσα με αρκετή ακαμψία ώστε να διαδίδουν και διατμητικά κύματα δεν θα μας απασχολήσει εδώ. Προσέξτε ότι η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι διανυσματικό μέγεθος.

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατ' αρχήν στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια θα περιοριστούμε για λόγους απλότητας στις δύο διαστάσεις όπου και θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις. Το πρόβλημα διέπεται από την ακουστική εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που με την σειρά τους περιγράφουν μαθηματικά τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Οι τρεις εξισώσεις που υπεισέρχονται στην ανάλυση είναι

- Η εξίσωση της συνέχειας
- Η εξίσωση του Euler και
- Η καταστατική εξίσωση

Η ακουστική διέγερση έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή των τιμών ισορροπίας των βασικών μεγεθών που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}, t) + p_1(\vec{x}, t),$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \vec{u}_1(\vec{x}, t),$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x}, t) + \rho_1(\vec{x}, t).$$

Εδώ οι μεταβολές συμβολίζονται με τον δείκτη 1 και οι τιμές ισορροπίας με τον δείκτη 0. Οι μεταβολές αυτές είναι μικρές σε σχέση με τις τιμές ισορροπίας είναι όμως αρκετές για να διεγείρουν τα όργανα που είναι ευαίσθητα σ' αυτές και να μας δώσουν το αίσθημα του ήχου. Μελετώντας λοιπόν την διάδοση του ήχου μελετούμε στην πραγματικότητα την διάδοση των διαταραχών αυτών.

Διατηρώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τις μεταβολές των ανωτέρω μεγεθών, η σύζευξη των τριών εξισώσεων μας οδηγεί εύκολα (βλ. π.χ. Boyles 1994 και σημειώσεις του μαθήματος Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία) στην

«γραμμικοποιημένη» ακουστική εξίσωση που εκφράζεται συνήθως για την πίεση διαταραχής (ακουστική πίεση) που είναι το μέγεθος που ενδιαφέρει τις εφαρμογές της ακουστικής:

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}, \quad (1.1.1)$$

όπου ο όρος c^2 αντιστοιχεί στον λόγο $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}$, εκφράζει το τετράγωνο της ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής (θερμοδυναμικός ορισμός της ταχύτητας) και είναι και αυτός στη γενική περίπτωση συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου $c(\vec{x}, t)$. Σχολιασμό της διαδικασίας διατύπωσης της παραπάνω εξίσωσης μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρει στην βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος των σημειώσεων και στις σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία».

1.2 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης

1.2.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου

Μια τεχνική επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών. Με βάση τη μέθοδο αυτή μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα συνήθων διαφορικών εξισώσεων κάθε μια από τις οποίες ορίζεται για μια συνάρτηση που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (συναρτήσεις που μεταβάλλονται ανεξάρτητα ή μία από την άλλη). Ο χωρισμός μεταβλητών δεν είναι βέβαια δυνατός σε κάθε περίπτωση. Ειδικά για την κυματική εξίσωση, ο χωρισμός είναι δυνατός σε 11 συστήματα συντεταγμένων (βλ. Morse and Feshbach) και μόνον εάν οι διεπιφάνειες του προβλήματος (σύνορα που χωρίζουν μέσα διαφορετικής σύνθεσης), συμπίπτουν με μία επιφάνεια συντεταγμένων των ως άνω 11 συστημάτων. Επιπλέον ο όρος $\frac{1}{c^2}$ της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι είτε άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, ή να είναι ο ίδιος συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι ανωτέρω όροι πληρούνται και θα οδηγηθούμε σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα μας δώσουν τη λύση απλών σχετικά προβλημάτων που αναφέρονται στη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχήν να απομονώσουμε την χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε ότι η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t). \quad (1.2.1)$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό p για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης (αντί για $\bar{p}$) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ολική πίεση του μέσου. Επίσης για λόγους ευκολίας θα παραλείπομε τα ορίσματα των συναρτήσεων όταν αυτά είναι προφανή. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c θα θεωρηθεί εδώ ως συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών

$c = c(\vec{x})$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 1.2.1 στην ακουστική εξίσωση 1.1.1 και να πάρουμε:

$$T \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} p \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad (1.2.2)$$

ή

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (1.2.3)$$

Μια και ο αριστερός όρος της 1.2.3 είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών και ο δεξιός όρος συνάρτηση μόνο του χρόνου, για να ισχύει πάντοτε η εξίσωση, θα πρέπει κάθε όρος να ισούται με μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2, \quad (1.2.4)$$

όπου το αρνητικό σημείο αλλά και η ίδια η μορφή της σταθεράς ω^2 έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθηματικοί χειρισμοί αφ' ενός αλλά και η φυσική ερμηνεία αφ' ετέρου. Έτσι, στην 1.2.4 αναγνωρίζει κανείς στην σταθερά ω την κυκλική συχνότητα του κύματος ($\omega = 2\pi f$, όπου f είναι η συχνότητα σε Hz).

Από την 1.2.4 παίρνουμε δύο εξισώσεις :

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1.2.5)$$

και

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0. \quad (1.2.6)$$

Από τις εξισώσεις αυτές η πρώτη είναι γνωστή ως **εξίσωση Helmholtz** ενώ η λύση της δεύτερης δίνει την χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης

Η 1.2.6 έχει δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις :

$$T(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \quad (1.2.7)$$

με A, B σταθερές.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της λύσης θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά A είναι 1, και θα δεχθούμε από τις δύο πιθανές λύσεις εκείνη που αντιστοιχεί σε αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη της εκθετικής συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι θα μελετήσουμε πηγές οι οποίες εκπέμπουν ενέργεια στο περιβάλλον με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$. Καταλήγουμε δηλαδή σε λύσεις της μορφής

$$T(t) = e^{-i\omega t}. \quad (1.2.8)$$

Κατόπιν αυτών, η λύση μας για την πίεση διαταραχής γράφεται

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t}. \quad (1.2.9)$$

1.2.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης

Ο λόγος που αναφερόμαστε στην ειδική μορφή της λύσης για τη συνάρτηση p είναι ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε έκφραση για επίπεδα κύματα που θα αποτελέσουν το πρώτο ειδικό αντικείμενο της μελέτης μας. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα αναφερόμαστε είναι το καρτεσιανό, για το οποίο ο τελεστής ∇^2 παίρνει τη μορφή $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Θεωρώντας ακόμη ότι

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (1.2.10)$$

όπου κάθε ένας από τους προσθετέους k_i^2 , $i = x, y, z$ εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (την αντίστοιχη στο συμβολισμό που υιοθετήθηκε), θα κάνουμε χωρισμό των μεταβλητών και θα ζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z). \quad (1.2.11)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση Helmholtz και χρησιμοποιώντας την 1.2.10, παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{\partial^2 p_y}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{p_z} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \quad (1.2.12)$$

Παρατηρούμε ότι στο ανωτέρω άθροισμα έχουμε εξ προσθετέους οι οποίοι ανά δύο είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Ζητάμε τα ζεύγη των όρων αυτών να έχουν άθροισμα 0 (σταθερά χωρισμού), οπότε καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0, \quad (1.2.13\alpha)$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0, \quad (1.2.13\beta)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0. \quad (1.2.13\gamma)$$

Προσέξτε την αλλαγή στο συμβολισμό της παραγώγου που πλέον είναι συνήθης και όχι μερική παράγωγος με δεδομένο ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις p_i , $i = x, y, z$ εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή.

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας οριακές συνθήκες στο πρόβλημα. Επομένως δεν μιλάμε ακόμη για λύση ενός προβλήματος αλλά λύσεις μιας εξίσωσης, κάνοντας ακόμη την υπόθεση ότι δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς την εφαρμογή του χωρισμού των μεταβλητών. Κατόπιν αυτών, προχωράμε

στη διατύπωση αναλυτικών λύσεων για τις εξισώσεις 1.2.13(α-γ) στην ειδική περίπτωση που οι συνιστώσες k_i ($i = x, y, z$) $\neq 0$ είναι σταθερές¹ και παίρνουμε:

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}, \quad (1.2.14\alpha)$$

$$p_y(x) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y}, \quad (1.2.14\beta)$$

$$p_z(x) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z}. \quad (1.2.14\gamma)$$

όπου οι συντελεστές θα υπολογιστούν εφ' όσον έχει οριστεί πλήρως το πρόβλημα και σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

Εάν υποθέσουμε ότι η ακουστική πίεση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή, έχουμε διάδοση προς μία μόνο διεύθυνση. Θεωρώντας x την διεύθυνση αυτή, η ακουστική πίεση γράφεται

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{-i\omega t} = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)}. \quad (1.2.15)$$

Από τους δύο τελευταίους όρους, ο πρώτος αντιπροσωπεύει κύμα οδεύον προς τα αυξανόμενα (θετικά) x και ο δεύτερος, κύμα οδεύον προς τα μειούμενα (αρνητικά) x .

Για τις ανάγκες της θεωρίας μας θα πρέπει να ορίσουμε τα **επίπεδα κύματα**. Ένα κύμα λέγεται επίπεδο, εάν η επιφάνεια σταθερής φάσης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι επίπεδο. Παρατηρώντας την λύση της ακουστικής εξίσωσης όπως δίδεται από την 1.2.15, βλέπουμε ότι για t σταθερό, η φάση του κύματος είναι σταθερή όταν x είναι σταθερό. Η επιφάνεια σταθερής φάσης επομένως είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στον άξονα των x σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα. Συνεπώς η λύση 1.2.15 αντιπροσωπεύει επίπεδο κύμα.

Θεωρώντας το πρόβλημά μας στις τρεις διαστάσεις και κρατώντας τον πρώτο από τους δύο όρους της λύσης μας για κάθε μία από τις συναρτήσεις p_x, p_y, p_z , βλέπουμε ότι η ακουστική πίεση παίρνει τη μορφή

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (1.2.16)$$

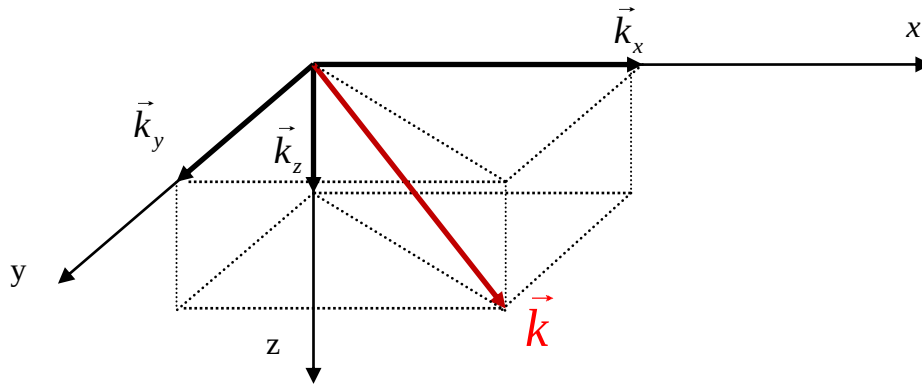
και σε διανυσματική μορφή ως προς τον εκθέτη του e ,

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (1.2.17)$$

όπου $D = A_1 B_1 C_1$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αριθμός κύματος k μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες k_x, k_y, k_z κατά τους αντίστοιχους άξονες.

¹ Η περίπτωση συντελεστών που μεταβάλλονται με την αντίστοιχη μεταβλητή θα μας απασχολήσει αργότερα σε μία ειδική περίπτωση.



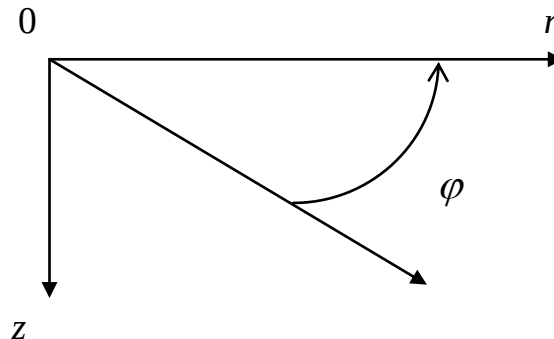
Σχήμα 1.1 Ο αριθμός κύματος και οι συνιστώσες του.

Η θεώρηση αυτή είναι συμβατή με την εξίσωση 1.2.10 που μας δίνει μία έκφραση του τετραγώνου του μέτρου του αριθμού κύματος. Στο σχήμα 1.1 βλέπουμε την γεωμετρική απεικόνιση του αριθμού κύματος με τις αντίστοιχες συνιστώσες. Παρατηρούμε τέλος ότι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι επίπεδα κάθετα στο διάνυσμα $\vec{k}$. Επομένως από την 1.2.17 παίρνουμε και πάλι λύση για επίπεδα κύματα.

1.2.3 Η λύση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Σε πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα η βασική υπόθεση ως προς την ακουστική διέγερση είναι ότι η ακουστική πηγή είναι σημειακή αρμονική. Σε συνδυασμό με τη γεωμετρία του ακουστικού χώρου (επίπεδες διαχωριστικές επιφάνειες) το σύστημα συντεταγμένων που βοηθά στην επίλυση των σχετικών προβλημάτων φαίνεται ότι είναι το κυλινδρικό. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του τελεστή Laplace στο κυλινδρικό σύστημα (Σχ. 1.2) παίρνουμε την εξίσωση του Helmholtz στη μορφή :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0. \quad (1.2.18)$$



Σχήμα 1.2 Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις ανάμεσα στις καρτεσιανές και τις κυλινδρικές συντεταγμένες θεωρώντας κοινό άξονα των z είναι : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$

Εφαρμόζοντας χωρισμό μεταβλητών, γράφουμε την p ως:

$$p(r, z, \varphi) = F(r, \varphi)u(z) \quad (1.2.19)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση Helmholtz παίρνουμε:

$$\frac{1}{rF} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 F} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (1.2.20)$$

Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι το k^2 γράφεται ως : $k^2 = k_z^2(z) + q^2(r, \varphi)$, οπότε παίρνουμε το σύστημα :

$$\frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dz^2} + k_z^2 = 0 , \quad (1.2.21)$$

$$\frac{1}{rF} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 F} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + q^2 = 0 . \quad (1.2.22)$$

Η Συνήθης Διαφορική Εξίσωση 1.2.21 κατά τα γνωστά έχει ως γενική λύση για k_z σταθερό:

$$u(z) = D_1 e^{ik_z z} + D_2 e^{-ik_z z} . \quad (1.2.23)$$

Στη συνέχεια κάνουμε χωρισμό μεταβλητών στην F και θεωρώντας το q ανεξάρτητο από το φ παίρνουμε :

$$F(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) . \quad (1.2.24)$$

Αντικαθιστώντας στην 1.2.22 έχουμε :

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -q^2 , \quad (1.2.25)$$

ή

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + q^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} . \quad (1.2.26)$$

Κάθε όρος της 1.2.26 θα πρέπει να είναι σταθερά ($= m^2$) για να έχουμε ισχύ για κάθε $r (\neq 0)$ και φ . Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi , \quad (1.2.27)$$

και

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left(q^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 . \quad (1.2.28)$$

Η γενική λύση της 1.2.27 είναι:

$$\Phi = E_1 e^{im\varphi} + E_2 e^{-im\varphi}. \quad (1.2.29)$$

Απομένει να μελετήσουμε την εξίσωση 1.2.28.

Εάν το q είναι σταθερά, η εξίσωση 1.2.28 είναι μία εξίσωση Bessel m τάξης. Για την θεωρία των εξισώσεων Bessel υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία. Εμείς εδώ θα αρκεστούμε στην παράθεση ορισμένων ιδιοτήτων τους που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

1.2.4 Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της

Η διαφορική εξίσωση :

$$[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2)]f(x) = 0, \quad (1.2.30)$$

όπου ν πραγματικός αριθμός, είναι μία εξίσωση Bessel ν τάξης .

Η εξίσωση αυτή καθώς είναι δευτέρου βαθμού έχει δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις. Στην περίπτωση της εξίσωσης Bessel, οι δύο αυτές λύσεις εκφράζονται με δύο βασικούς εναλλακτικούς τρόπους. Σύμφωνα με τον πρώτο από αυτούς, οι λύσεις της εξίσωσης Bessel εκφράζονται ως συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_\nu(x)$, και συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους ή συναρτήσεις Neumann $N_\nu(x)$, Σύμφωνα με τον δεύτερο, λύσεις της εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις Bessel τρίτου είδους ή συναρτήσεις Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$ και $H_\nu^{(2)}(x)$. Οι συναρτήσεις πρώτου και τρίτου είδους συνδέονται μεταξύ τους, αλλά κάθε ζευγάρι αποτελείται από ανεξάρτητες μεταξύ τους συναρτήσεις.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αναπτύξει κανείς μία συνάρτηση Bessel και δεν είναι του παρόντος να αναλυθούν όλες οι περιπτώσεις. Ως παράδειγμα και μόνο αναφέρουμε την έκφραση των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους τάξης ν με τη μορφή σειράς για ν όχι ακέραιο ως :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad (1.2.31)$$

όπου $\Gamma(x)$ είναι συναρτήσεις Γάμα που αποτελούν άλλο είδος ειδικών συναρτήσεων (Βλ. Gradshteyn & Ryzhik).

Οι συναρτήσεις Hankel προκύπτουν από τις συναρτήσεις Bessel και Neumann μέσω των σχέσεων:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (1.2.32)$$

και

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \quad (1.2.33)$$

Οι συναρτήσεις Hankel είναι αναλυτικές συναρτήσεις για $x > 0$, αλλά παρουσιάζουν ιδιομορφία για $x = 0$.

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ορισμένες ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel για μικρά ή μεγάλα ορίσματα:

$$\text{για } x \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \nu \geq 0 \\ N_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + \gamma], & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.2.34)$$

όπου

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt$$

$$\text{για } x \gg \left\{ \begin{array}{l} J_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ N_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ H_\nu^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\{i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\} \\ H_\nu^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\{-i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\} \end{array} \right. \quad (1.2.35)$$

Στις τελευταίες αυτές εκφράσεις μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι συναρτήσεις Bessel και Neumann² αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα ενώ οι συναρτήσεις Hankel σε αποκλίνοντα ή συγκλίνοντα κύματα για τη σύμβαση που έχουμε επιλέξει ως προς την χρονική εξάρτηση της λύσης μας ($e^{-i\omega t}$)

Μερικές αναδρομικές σχέσεις που αναφέρονται σε μία συνάρτηση Bessel οποιουδήποτε είδους $f_\nu(x)$ είναι:

$$f_{\nu-1}(x) + f_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} f_\nu(x), \quad (1.2.36)$$

$$f_{\nu-1}(x) - f_{\nu+1}(x) = 2 \frac{df_\nu(x)}{dx}, \quad (1.2.37)$$

$$\frac{\nu}{x} f_\nu(x) - f_{\nu+1}(x) = \frac{df_\nu(x)}{dx}, \quad (1.2.38)$$

$$f_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} f_\nu(x) = \frac{df_\nu(x)}{dx}. \quad (1.2.39)$$

² Οι συναρτήσεις Neumann ονομάστηκαν έτσι προς τιμήν του Γερμανού μαθηματικού C. Neumann (1832-1925) που μελέτησε τις ιδιότητές τους. Στην βιβλιογραφία συμβολίζονται επίσης με το σύμβολο $Y_\nu(x)$

1.2.5 Έκφραση της λύσης στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα η 1.2.28 για q σταθερό, είναι μία εξίσωση Bessel m τάξης ως προς qr .

Επομένως η λύση της είναι μία από τις εκφράσεις:

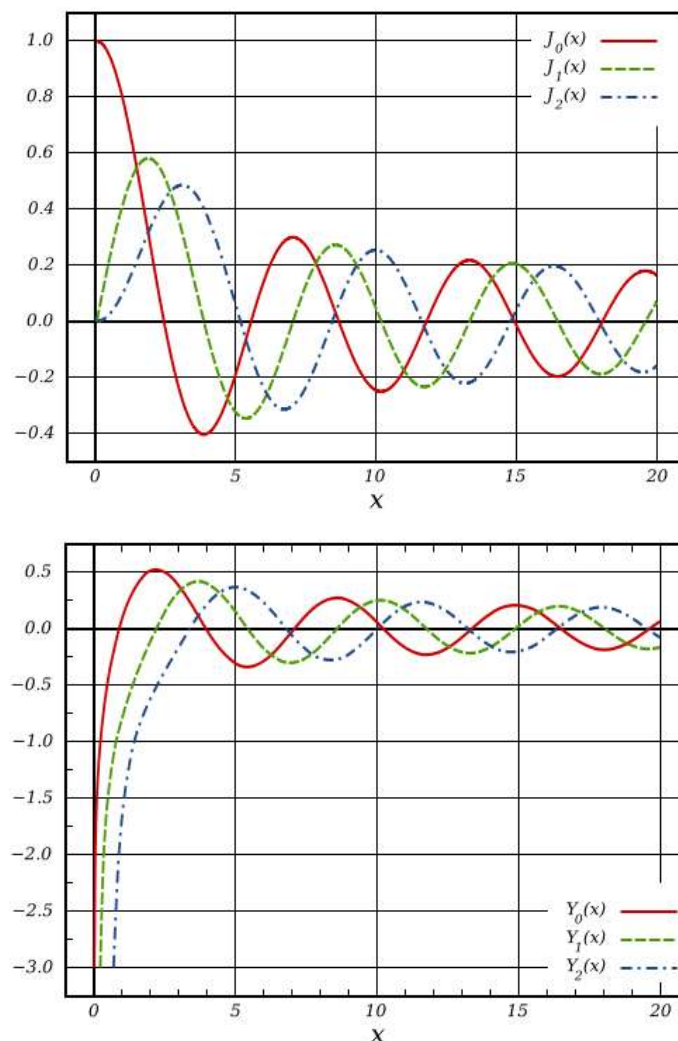
$$R(r) = E_3 J_m(qr) + E_4 N_m(qr) \quad (1.2.40)$$

ή

$$R(r) = E_5 H_m^{(1)}(qr) + E_6 H_m^{(2)}(qr) \quad (1.2.41)$$

Σε επόμενα εδάφια θα αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στην κατάλληλη επιλογή μας.

Σημείωση: Οι συναρτήσεις Bessel ανήκουν στην κατηγορία των "σχεδόν" περιοδικών συναρτήσεων. (βλ. Σχ. 1.3)



Σχήμα 1.3 Γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessel και Neumann των τριών πρώτων τάξεων

1.3 Το πρόβλημα Sturm-Liouville

1.3.1 Γενικοί ορισμοί

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που συναντήσαμε μέχρι τώρα, αποτελούν ειδικές μορφές της εξίσωσης

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\psi}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\psi = 0, \quad (1.3.1)$$

για μία συνάρτηση $\psi(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $[a, b]$, με τις εξής ιδιότητες:

- $p(x), q(x), r(x)$ πραγματικές και συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$,
- $p(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$,
- $p(x)$ και $r(x) > 0$ στο $[a, b]$,

Το πρόβλημα δύο σημείων που ορίζεται από την εξίσωση 1.3.1 και τις οριακές συνθήκες

$$A_1 \frac{d\psi}{dx}(a) - A_2 \psi(a) = 0, \quad (1.3.2\alpha)$$

$$B_1 \frac{d\psi}{dx}(b) + B_2 \psi(b) = 0, \quad (1.3.2\beta)$$

με A_1, A_2, B_1, B_2 πραγματικούς αριθμούς, ονομάζεται πρόβλημα **Sturm-Liouville** (S-L). Οι συντελεστές A_1, A_2, B_1, B_2 θεωρούνται ανεξάρτητοι του λ και δεν μπορεί τα A_1, A_2 και B_1, B_2 να είναι ως ζεύγη ταυτόχρονα 0.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε ορισμένες από τις ιδιότητες του προβλήματος αφού σημειώσουμε ότι το πρόβλημα S-L είναι πρόβλημα **ιδιοτιμών**. Οι ιδιοτιμές είναι οι επιτρεπτές τιμές του λ κάτω από τις οριακές συνθήκες 1.3.2α και 1.3.2β. Σε κάθε επιτρεπτή τιμή του λ , λ_m αντιστοιχεί μία **ιδιοσυνάρτηση** $\psi_m(x)$.

1.3.2 Θεμελιώδες θεώρημα στο πρόβλημα Sturm-Liouville

ΘΕΩΡΗΜΑ Θεωρούμε το πρόβλημα S-L, όπως ορίστηκε ανωτέρω. Τότε υπάρχει μία άπειρη ομάδα πραγματικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ τέτοια ώστε $\lambda \rightarrow \infty$ για $m \rightarrow \infty$ που ικανοποιεί το εν λόγω πρόβλημα. Εάν οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, \dots$, η ιδιοσυνάρτηση ψ_m έχει ακριβώς $m-1$ μηδενισμούς στο διάστημα $a < x < b$. Επιπλέον, εάν $q(x) \leq 0$ στο $[a, b]$ και οι συντελεστές A_1, A_2 και B_1, B_2 είναι όλοι μη αρνητικοί, τότε $\lambda_m > 0$ για όλα τα m .

Για βαθύτερη ανάλυση στο πρόβλημα S-L παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σε σχετική βιβλιογραφία συνήθων διαφορικών εξισώσεων (βλ π.χ. Zauderer). Θα δώσουμε όμως στη συνέχεια την διατύπωση και την απόδειξη δύο θεωρημάτων που αφορούν σε ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοτιμών του προβλήματος S-L.

- Θ1. *Οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, \dots$ του προβλήματος Sturm-Liouville είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την $r(x)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_m, ψ_n που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές m και n τάξης αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις γράφονται:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m r(x)] \psi_m = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n r(x)] \psi_n = 0. \quad (1.3.4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1.3.3 με ψ_n και την 1.3.4 με ψ_m και αφαιρούμε τις εξισώσεις κατά μέλη. Το αποτέλεσμα είναι:

$$(\lambda_m - \lambda_n) r(x) \psi_m \psi_n + \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - p(x) \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right\} = 0. \quad (1.3.5)$$

Ολοκληρώνουμε από a έως b και παίρνουμε :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) \psi_m \psi_n dx + p(b) \left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right]_b - p(a) \left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right]_a = 0 \quad (1.3.6)$$

Μια και οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_m, ψ_n υπόκεινται στις οριακές συνθήκες 1.3.2, ο δεύτερος και τρίτος όρος της 1.3.6 μηδενίζονται. Έτσι, για $\lambda_m \neq \lambda_n$ θα πρέπει να ισχύει :

$$\int_a^b r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0, \quad (1.3.7)$$

που είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας.

Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορεί, χωρίς άρση της γενικότητας της λύσης, να θεωρηθούν επί πλέον ορθοκανονικές. Έτσι δεχόμαστε συνήθως τη συνθήκη

$$\int_a^b r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (1.3.8)$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών του προβλήματος ονομάζεται **φάσμα (spectrum)** και κάτω από τις συνθήκες που ορίσαμε για το πρόβλημα S-L, είναι διακριτό. Οι συνθήκες αυτές ορίζουν ένα **κανονικό** (regular) S-L πρόβλημα. Είναι πάντως δυνατόν να οριστεί ένα **μη κανονικό** (singular) πρόβλημα S-L που θα περιλαμβάνει και συνεχές φάσμα όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αυτό μπορεί να γίνει εάν για παράδειγμα θεωρήσουμε μιγαδικούς συντελεστές ή άπειρο σύνολο (a ή $b \rightarrow \infty$).

- **Θ2 Οι ιδιοτιμές του κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville είναι πραγματικές**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι οι ιδιοτιμές του κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville είναι μιγαδικές. Τότε και οι ιδιοσυναρτήσεις θα είναι μιγαδικές $\psi_m(x) = u_m(x) + i v_m(x)$ όπου u_m και v_m πραγματικές συναρτήσεις. Ανατρέχοντας στην εξίσωση 1.3.1 μπορούμε να δούμε ότι εάν λ_m είναι ιδιοτιμή, τότε και η συζυγής της λ_m^* είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση την ψ_m^* . Οι εξισώσεις S-L για την ψ_m και την συζυγή της ψ_m^* γράφονται ως:

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\psi_m}{dx} \right] + [q + \lambda_m r] \psi_m = 0, \quad (1.3.9)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\psi_m^*}{dx} \right] + [q + \lambda_m^* r] \psi_m^* = 0. \quad (1.3.10)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με ψ_m^* και την δεύτερη με ψ_m αφαιρώντας κατά μέλη, ολοκληρώνοντας από a έως b και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε:

$$(\lambda_m - \lambda_m^*) \int_a^b r(x) \psi_m \psi_m^* dx = 0. \quad (1.3.11)$$

Αλλά $\psi_m \psi_m^* = u^2 + v^2 > 0$. Αφού για το κανονικό πρόβλημα S-L έχουμε $r(x) > 0$, και $\lambda_m \neq \lambda_m^*$, καταλήγουμε σε άτοπο. Το άτοπο έχει την αφορμή του στην υπόθεση για μιγαδικές ιδιοτιμές. Επομένως οι ιδιοτιμές λ πρέπει να είναι πραγματικές.

Θα συνεχίσουμε τώρα με μερικές ιδιότητες που σχετίζονται με τις ιδιοσυναρτήσεις και τη δυνατότητα αναπαράστασης της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους μέσω σειράς ιδιοσυναρτήσεων.

1.3.3 Πληρότητα ομάδας ιδιοσυναρτήσεων

- Σύγκλιση στο μέσον (in the mean)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x):[a,b]$ και μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων του κανονικού προβλήματος S-L $\{\psi_m\}$. Σχηματίζουμε την πεπερασμένη σειρά

$$\sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) \quad (1.3.12)$$

και παίρνουμε την ποσότητα

$$I_M = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) \right]^2 dx . \quad (1.3.13)$$

Είναι προφανές ότι το I_M είναι ένα μέτρο του πόσο καλά η πεπερασμένη σειρά προσεγγίζει την $f(x)$. Εάν I_M τείνει στο 0 για $M \rightarrow \infty$, τότε η σειρά 1.3.12 συγκλίνει στο μέσον στην $f(x)$ (converges in the mean). Με άλλα λόγια:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_0(\varepsilon) : \forall M > M_0 \Rightarrow I_M < \varepsilon$$

Κάτω από τις συνθήκες αυτές, γράφουμε :

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) . \quad (1.3.14)$$

(*l.i.m* σημαίνει limit in the mean)

Η σύγκλιση αυτή ονομάζεται και μέση τετραγωνική σύγκλιση. Η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων ψ_m με τα παραπάνω χαρακτηριστικά ονομάζεται “**πλήρης**”.

Η ομάδα $\{\psi_m(x), m=1, 2, \dots\}$ του κανονικού προβλήματος S-L είναι μία πλήρης ομάδα τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$.

Ως συνέπεια του ανωτέρω διατυπώνουμε τα εξής θεωρήματα αναπαράστασης:

➤ 1^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Εάν μία συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, η αναπαράσταση της μέσω της σειράς 1.3.12, όπου ψ_m είναι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος S-L, συγκλίνει εις το μέσον στην $f(x)$. Οι συντελεστές της 1.3.12 είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$:

$$c_m = \int_a^b r(x) f(x) \psi_m(x) dx . \quad (1.3.15)$$

Η σύγκλιση αυτή δεν είναι η ισχυρότερη που μπορεί να επιτύχει κανείς. Είναι όμως ικανή στις περισσότερες περιπτώσεις να μας δώσει ικανοποιητικές εκφράσεις μιας συνάρτησης. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος S-L πάντως μπορούν να μας δώσουν δύο ακόμη θεωρήματα αναπαράστασης που θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια και τα οποία μας δίδουν ισχυρότερη σύγκλιση των αναπαραστάσεων.

➤ 2^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Έστω $\mathfrak{S}$ μία ομάδα συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ που διαθέτουν τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[a,b]$. Έστω $\{\psi_m\}$ η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων ενός κανονικού προβλήματος S-L στο διάστημα αυτό. Εάν οι συναρτήσεις $f(x)$ ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L, τότε κάθε συνάρτηση $f(x) \in \mathfrak{S}$ μπορεί να αναπτυχθεί σε μία σειρά που συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[a,b]$:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m(x), \quad (1.3.16)$$

όπου a_m είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$. Η σειρά ονομάζεται «Σειρά Fourier» της $f(x)$.

➤ 3^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Έστω ότι η $f(x) \in \mathfrak{S}$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L και είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο:

1. $f(x)$ όπου $x \in [a,b]$ και x δεν είναι σημείο ασυνέχειας της $f(x)$.
2. $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ όταν x σημείο ασυνέχειας της $f(x)$.

Εδώ $f(x^+)$, $f(x^-)$ είναι τα προς τα δεξιά και αριστερά όρια της $f(x)$ στο σημείο ασυνέχειας x .

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε ότι οι συντελεστές a_m της 1.3.16 είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$. Ομοίως αποδείξτε ότι οι συντελεστές c_m της 1.3.14 είναι επίσης οι συντελεστές Fourier της $f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Σχολιάστε τις διαφορές ανάμεσα στα θεωρήματα αναπαράστασης.

1.3.4 Το συνεχές φάσμα

Μέχρι τώρα η αναφορά μας στα θεωρήματα αναπαράστασης ή πληρότητας μιας ομάδας ιδιοσυναρτήσεων είχε τη βάση της στο κανονικό πρόβλημα Sturm Liouville, όπως αυτό ορίστηκε στην αρχή. Μάλιστα ο τελεστής

$$L \equiv \frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\}, \quad (1.3.17)$$

ονομάζεται κανονικός (proper) τελεστής ενώ η εξίσωση του προβλήματος S-L μπορεί να γραφεί ως

$$L\psi + \lambda\psi = 0. \quad (1.3.18)$$

Εάν δεν ισχύει κάποια από τις ιδιότητες του τελεστή L , όπως για παράδειγμα όταν κάποια από τις p, q, r δεν είναι ορισμένες σε όλο το διάστημα $[a, b]$ σύμφωνα με τις ιδιότητες του προβλήματος ή όταν κάποιο από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ τείνει στο άπειρο, ο τελεστής L καλείται **ιδιόμορφος** (singular). Ένας ιδιόμορφος τελεστής L δεν μπορεί να ορίσει μία πλήρη ομάδα ιδιοσυναρτήσεων και μία τυχαία συνάρτηση δεν μπορεί να αναπτυχθεί ως άπειρη σειρά ιδιοσυναρτήσεων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μία αντίστοιχη αναπαράσταση για την τυχαία συνάρτηση $f(x)$ που αναπτύσσεται πλέον ως:

$$f(x) = \sum_{m=1}^M a_m \psi_m(x) + \int_S b(\lambda) \phi(x, \lambda) d\lambda, \quad (1.3.19)$$

όπου $\phi(x, \lambda)$ είναι συναρτήσεις οριζόμενες συνεχώς πάνω στο διάστημα S του λ και ονομάζονται *μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις* (improper eigenfunctions) σε αντίθεση με τις *κανονικές* (proper) ιδιοσυναρτήσεις που απαρτίζουν το διακριτό φάσμα $\{\psi_m\}$. Το διάστημα S είναι επομένως ένα υποσύνολο μη διακριτών τιμών της λ και ονομάζεται συνεχές φάσμα του τελεστή L .

Οι κανονικές ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες και κατά τα γνωστά ορθοκανονικοποιούνται μέσω της σχέσης

$$\int_I r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}, \quad (1.3.20)$$

όπου I είναι το διάστημα ορισμού της ψ_m . Αντίστοιχα για τις μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις ισχύει

$$\int_I r(x) \phi(x, \lambda') \phi(x, \lambda) dx = \delta(\lambda' - \lambda), \quad (1.3.21)$$

όπου $\delta(\lambda' - \lambda)$ είναι η συνάρτηση Dirac (δέλτα).

1.3.5 Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα (Dirac)

Η συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$ εξ ορισμού είναι μηδέν για κάθε τιμή του ορίσματος x εκτός από την αρχή όπου έχει άπειρη τιμή, και ισχύει :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.3.22)$$

Εάν τα όρια ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένα, ισχύει :

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & x_0 \in [x_1, x_2] \\ 0 & x_0 \notin [x_1, x_2] \end{cases} \quad (1.3.22a)$$

Μπορεί ναδειχτεί ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ισχύει :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad , \quad (1.3.23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad . \quad (1.3.24)$$

Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα που θα χρειαστούμε στη συνέχεια παρατίθενται κατωτέρω:

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad , \quad (1.3.25)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad , \quad (1.3.26)$$

$$\delta(ax) = (1/a)\delta(x) \quad , \quad (1.3.27)$$

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{df/dx} \delta(x-x_0) \quad , \quad f(x_0) = 0 \quad , \quad (1.3.28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x'')\delta(x''-x')dx'' = \delta(x-x') \quad , \quad (1.3.29)$$

$$\frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{1}{x} \delta(x) \quad . \quad (1.3.30)$$

2. ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN

2.1 Ορισμός

Σε πρόβλημα κυματικής διάδοσης, πολλές φορές θα πρέπει να θεωρήσουμε στο πεδίο ορισμού και την πηγή της κυματικής διέγερσης. Η μοντελοποίηση της ακουστικής πηγής γίνεται συνήθως με σύνθεση στοιχειωδών πηγών οι οποίες θεωρούνται σημειακές και αρμονικές, αναπαρίστανται δε μέσω συναρτήσεων δέλτα. Η ύπαρξη της πηγής λαμβάνεται υπ' όψιν με την εισαγωγή μη ομογενούς όρου στην κυματική εξίσωση που έχει ως συνέπεια να διατυπωθεί η λύση της κυματικής εξίσωσης μέσω συναρτήσεων **Green**³. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε ιδιότητες των συναρτήσεων Green που είναι απαραίτητες στην ανάλυση που θα ακολουθήσει.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{dG}{dz}\right] + [q(z) + \lambda r(z)]G = -\delta(z - z_0), \quad (2.1.1)$$

για μία συνάρτηση $G(z)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$.

Η εξίσωση μας θυμίζει την αντίστοιχη του προβλήματος Stourm-Liouville, όπου η βασική διαφορά βρίσκεται στην ύπαρξη του μη ομογενούς όρου. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι η άγνωστη συνάρτηση $G(z)$, ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος S-L και ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις και για τις υπόλοιπες παραμέτρους της εξίσωσης. Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι μία συνάρτηση Green μίας διάστασης και συμβολίζεται ως $G(z, z_0, \lambda)$. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση δέλτα μηδενίζεται για $z \neq z_0$ και

$$\int_{z_1}^{z_2} \delta(z - z_0) dz = \begin{cases} 1 & z_0 \in [z_1, z_2] \\ 0 & z_0 \notin [z_1, z_2] \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση G θα δεχτούμε ότι είναι συνεχής στο διάστημα ορισμού της με συνεχή πρώτη παράγωγο παντού εκτός από τη θέση $z = z_0$. Προσέξτε στο όρισμα της Green ότι περιέχονται ως μεταβλητές το ιδιόμορφο σημείο z_0 και η παράμετρος λ που εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση..

Η παράγωγος της G είναι ασυνεχής στο ιδιόμορφο σημείο z_0 . Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε την ασυνέχεια της παραγώγου της G για $z = z_0$.

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση 2.1.1 από $z_0 - \varepsilon$ έως $z_0 + \varepsilon$ για $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε:

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{dG}{dz}\right] dz + \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} [q(z) + \lambda r(z)]G dz = - \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz. \quad (2.1.2)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα για $\varepsilon \rightarrow 0$ λόγω συνέχειας των G, q και r τείνει στο 0.

³ Για λεπτομερή αναφορά σε συναρτήσεις Green συνιστάται το βιβλίο του Zauderer "Partial Differential Equations of Applied Mathematics"

Λόγω των ιδιοτήτων της συνάρτησης δ , το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της 2.1.2 είναι:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \delta(z-z_0) dz = 1 . \quad (2.1.3)$$

Έτσι έχουμε:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dG}{dz} \right] dz = \left[p(z) \frac{dG}{dz} (z, z_0, \lambda) \right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} = -1 . \quad (2.1.4)$$

Επομένως:

$$p(z_0 + \varepsilon) \frac{dG}{dz} (z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - p(z_0 - \varepsilon) \frac{dG}{dz} (z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda) = -1 , \quad (2.1.5)$$

όπου έχουμε πλέον χρησιμοποιήσει και το όρισμα της συνάρτησης Green.

Για $\varepsilon \rightarrow 0$ και εφ' όσον $p(z)$ συνεχής συνάρτηση και $p(z) \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{dG}{dz} (z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG}{dz} (z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda) \right] = -\frac{1}{p(z_0)} . \quad (2.1.6)$$

Μία ενδιαφέρουσα σημείωση στο σημείο αυτό αναφέρεται στο ανάπτυγμα της συνάρτησης δέλτα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Θεωρώντας μία συνάρτηση $f(z)$ που αναπτύσσεται κατά τα θεωρήματα αναπαράστασης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων, παίρνουμε διαδοχικά

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) , \quad (2.1.7)$$

όπου

$$A_n = \int_a^b r(z) f(z) \psi_n(z) dz \quad (2.1.8)$$

και αντικαθιστώντας την 2.1.8 στη 2.1.7 (αλλάζοντας για αποφυγή σύγχυσης τον συμβολισμό στην μεταβλητή ολοκλήρωσης) έχουμε:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b r(z') f(z') \psi_n(z') \psi_n(z) dz' , \quad (2.1.9)$$

$$f(z) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r(z') \psi_n(z') \psi_n(z) \right\} f(z') dz' . \quad (2.1.10)$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα, θα πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(z') \psi_n(z') \psi_n(z) = \delta(z - z') . \quad (2.1.11)$$

που είναι γνωστή και ως σχέση πληρότητας (completeness relation) του προβλήματος S-L.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1.3.25 η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z') \psi_n(z) = \delta(z - z') \quad (2.1.12)$$

2.2 Ανάπτυγμα της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

Η συνάρτηση Green πληροί τις απαιτήσεις που θέσαμε για να είναι δυνατή η ανάπτυξη της σε συγκλίνουσα σειρά ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος S-L. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$G(z, z_0, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) . \quad (2.2.1)$$

Αντικαθιστούμε τις G και δ από τις 2.2.1 και 2.1.11 αντίστοιχα, στην 2.1.1 και παίρνουμε:

$$\frac{d}{dz} p(z) \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d\psi_n}{dz}(z) \right] + q(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) + \lambda r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) \quad (2.2.2)$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε άθροισμα με παράγωγο και να πάρουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{d}{dz} (p(z) \frac{d\psi_n}{dz}) + q(z) \psi_n \right\} + \lambda r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) , \quad (2.2.3)$$

ή τελικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση S-L για τις ιδιοσυναρτήσεις

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n r(z) \psi_n(z) + \lambda r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) , \quad (2.2.4)$$

ή

$$r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \psi_n(z) = - \delta(z - z_0) . \quad (2.2.5)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας την (2.2.4) με $\psi_m(z)$, ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, b]$ και κάνοντας χρήση της συνθήκης ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \int_a^b r(z) \psi_n(z) \psi_m(z) dz = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0) \int_a^b r(z) \psi_n(z) \psi_m(z) dz , \quad (2.2.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \delta_{mn} = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0) \delta_{nm}, \quad (2.2.7)$$

$$A_m (\lambda - \lambda_m) = - \psi_m(z_0). \quad (2.2.8)$$

Έτσι το ανάπτυγμα της Green (εξίσωση 2.2.1) γίνεται

$$G(z, z_0, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(z) \psi_n(z_0)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (2.2.9)$$

Η συνάρτηση Green του προβλήματος επομένως αναπτύχθηκε σε σειρά, μέσω ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Η συνάρτηση Green είναι συμμετρική, γεγονός που επιτρέπει την αντιμετάθεση της θέσης της πηγής και του πεδιακού σημείου. (γιατί;).

$$G(z, z_0, \lambda) = G(z_0, z, \lambda). \quad (2.2.10)$$

Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι το λ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος. Επιπλέον η μέχρι τώρα θεώρηση αφορούσε πραγματικές ιδιοτιμές-ιδιοσυναρτήσεις.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το λ είναι μιγαδική μεταβλητή. Η συνάρτηση Green του αντίστοιχου προβλήματος θα είναι επομένως μιγαδική. Λόγω της διαφοράς που εμφανίζεται στον παρανομαστή της αναπαράστασης 2.2.9, η $G(z, z_0; \lambda)$ είναι αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία για τα οποία $\lambda = \lambda_n$. Τα σημεία αυτά είναι οι πόλοι της G στο μιγαδικό επίπεδο του λ και είναι απλοί.

Εάν ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση Green στο επίπεδο του λ πάνω σε μία καμπύλη C_λ που περιέχει τους πόλους, παίρνουμε:

$$\int_{C_\lambda} G(z, z_0, \lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \psi_n(z_0) \int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda_n - \lambda}. \quad (2.2.11)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy (residue theorem – βλ. παράρτημα Α) παίρνουμε:

$$\int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda_n - \lambda} = -2\pi i, \quad (2.2.12)$$

όπου i είναι η φανταστική μονάδα, και προκύπτει η εξής έκφραση του ολοκληρώματος της Green

$$\int_{C_\lambda} G(z, z_0, \lambda) d\lambda = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \psi_n(z_0), \quad (2.2.13)$$

ενώ χρησιμοποιώντας τη συνθήκη πληρότητας 2.1.11 έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G(z, z_0, \lambda) d\lambda = - \frac{\delta(z - z_0)}{r(z)}. \quad (2.2.14)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο εδάφιο.

2.3 Η συνάρτηση Green για μια γενική διέγερση.

Ας θεωρήσουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dF}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)] F = -S(z). \quad (2.3.1)$$

Η εξίσωση αυτή μας θυμίζει την εξίσωση ορισμού της συνάρτησης Green (2.1.1) με τη διαφορά να βρίσκεται στην έκφραση του μη ομογενούς όρου $S(z)$. Ο όρος αυτός θα μπορούσε να εκφράζει μία διέγερση (πηγή) που ορίζεται πάνω σε μία συνεχή κατανομή σημειακών ιδιόμορφων σημείων στον άξονα z , που εκτείνεται σε μία περιοχή Z_r . Το σημαντικό στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι η συνάρτηση F που αποτελεί λύση της 2.3.1 μπορεί να εκφραστεί με χρήση της συνάρτησης Green του αντίστοιχου προβλήματος 2.1.1 μέσω της σχέσης :

$$F(z) = \int_{Z_r} G(z, z_0, \lambda) S(z_0) dz_0, \quad (2.3.2)$$

με την μεταβλητή z_0 να ορίζει μια θέση πηγής.

Η F ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με την $G(z, z_0; \lambda)$.

Επομένως αρκεί να μελετήσει κανείς το πρόβλημα για τις συναρτήσεις Green που ορίζονται από την απλή διέγερση που εκφράζει η συνάρτηση δέλτα.

2.4 Οι συναρτήσεις δέλτα στο κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Μέχρι τώρα είδαμε τον ορισμό της συνάρτησης Green μέσω κάποιων συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Έγινε φανερό ότι η συνάρτηση Green συνδέεται με τη διέγερση (forcing) ενός προβλήματος που ορίζεται για μία σημειακή πηγή. Στη φύση βέβαια τα προβλήματα είναι τρισδιάστατα και με την έννοια αυτή θα πρέπει να αναζητήσουμε εκφράσεις της σημειακής διέγερσης στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων ώστε να χρησιμοποιείται ως έκφραση ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που υιοθετείται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Στα προβλήματα κυματική διάδοσης, η σημειακή αρμονική πηγή ορίζεται μέσω της συνάρτησης $-S(\vec{x}, t)$ (το πρόσημο της συνάρτησης τίθεται έτσι για λόγους που έχουν να κάνουν με την επιλεγείσα διαδικασία της λύσης) ως εξής:

$$S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, \vec{x}_0, t) = A \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) e^{-i\omega t}. \quad (2.4.1)$$

Στην έκφραση αυτή αναγνωρίζουμε το διάνυσμα θέσης της πηγής $\vec{x}_0$, την χρονική αρμονική εξάρτηση με την κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ (f είναι η συχνότητα της πηγής) και το πλάτος της διέγερσης A .

Η εξίσωση 1.1.1 που διέπει τη διάδοση του ήχου σε ένα ρευστό ακουστικό μέσον, εάν επιβάλουμε τη διέγερση που περιγράφεται από την 2.4.1, γράφεται ως :

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -S . \quad (2.4.2)$$

Καθώς από την υπόθεσή μας, η πηγή εκπέμπει σε συγκεκριμένη συχνότητα ω , και αφού η χρονική εξάρτηση είναι ανεξάρτητη από τον χωρική, μπορούμε να θεωρήσουμε στην λύση της (2.4.2) την ίδια χρονική εξάρτηση και να πάρουμε.

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t} . \quad (2.4.2a)$$

Αντικαθιστώντας την μορφή της πίεσης από την 2.4.2a στην 2.4.2 και θεωρώντας ότι $k(\vec{x}) = \omega / c(\vec{x})$, οδηγούμαστε στην μη ομογενή εξίσωση Helmholtz :

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + k^2(\vec{x})p(\vec{x}) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) , \quad (2.4.3)$$

όπου για λόγους απλότητας έχουμε υποθέσει $A=1$. Δηλαδή έχουμε θεωρήσει σημειακή αρμονική πηγή μοναδιαίου πλάτους διέγερσης.

Η εξίσωση αυτή διέπει το πρόβλημα του υπολογισμού της χωρικής εξάρτησης της ακουστικής πίεσης για μονοχρωματική πηγή, δηλαδή πηγή που εκπέμπει σε συγκεκριμένη συχνότητα (αρμονική πηγή).

Εργαζόμενοι σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων θα πρέπει να εκφράσουμε σε αυτά, τόσο τον τελεστή ∇^2 (Λαπλασιανή) όσο και τη συνάρτηση δέλτα.

2.4.1 Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι συντεταγμένες του κυλινδρικού συστήματος είναι r, z, φ και συνδέονται με τις καρτεσιανές μέσω των σχέσεων: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

Σε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , η συνάρτηση δέλτα έχει νόημα μόνο εάν μπορεί να εκφραστεί μέσω ολοκληρώματος της μορφής

$$\iiint \delta(\xi_1 - \xi_1') \delta(\xi_2 - \xi_2') \delta(\xi_3 - \xi_3') d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 . \quad (2.4.4)$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε :

$$\iiint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \iiint \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) . \quad (2.4.5)$$

Για να μετατρέψουμε το στοιχειώδη όγκο $dx dy dz$ στο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων έχουμε τη σχέση

$$dx dy dz = |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 , \quad (2.4.6)$$

όπου J είναι η Ιακωβιανή (Jacobian) του μετασχηματισμού από το ένα σύστημα στο άλλο που ορίζεται ως :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Έτσι, γράφουμε τη συνάρτηση δέλτα με χρήση των συντεταγμένων ξ_1, ξ_2, ξ_3 ως

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = \frac{1}{|J|} \delta(\xi_1 - \xi_1')\delta(\xi_2 - \xi_2')\delta(\xi_3 - \xi_3') \quad (2.4.8)$$

ώστε οι εκφράσεις 2.4.4 και 2.4.5 να είναι ισοδύναμες. Στην περίπτωση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων έχουμε:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \quad (2.4.9)$$

Επομένως η συνάρτηση δέλτα στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0). \quad (2.4.10)$$

Λόγω του ότι για $r=0$ η Ιακωβιανή μηδενίζεται, δεν έχουμε αντιστοιχία ένα προς ένα στη θέση $r=0$ ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Υπενθυμίζοντας τη σχέση 1.2.18, η μη ομογενής Helmholtz γράφεται στο κυλινδρικό σύστημα:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0). \quad (2.4.11)$$

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι εκείνη για την οποία η p δεν εξαρτάται από τη γωνία φ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε **αξονικά συμμετρικό περιβάλλον**. Η πηγή θα βρίσκεται σε θέση $r_0 = 0$ και επομένως η μη ομογενής Helmholtz γράφεται τότε ως:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{r} \delta(r)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0) \quad (2.4.12)$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως 2π τα δύο μέρη παίρνουμε:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{r} \delta(r) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \right) d\phi \quad (2.4.13)$$

και αφού η προς ολοκλήρωση ποσότητα στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέρους είναι σταθερά ως προς την γωνία ενώ η ολοκλήρωση της συνάρτησης δ ως προς τη γωνία δίνει 1, έχουμε

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p \right) = -\frac{1}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) . \quad (2.4.14)$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) , \quad (2.4.15)$$

που είναι η ζητούμενη έκφραση.

2.4.2 Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Η αντιστοιχία καρτεσιανών-σφαιρικών συντεταγμένων είναι:

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta \quad (2.4.16)$$

και η Ιακωβιανή προκύπτει εύκολα : $J = r^2 \sin \theta$

Επομένως,

$$dx dy dz = |J| dr d\theta d\phi \quad (2.4.17)$$

και

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{|J|} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) , \quad (2.4.18)$$

δηλαδή

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) . \quad (2.4.19)$$

Δεν έχουμε αντιστοιχία ένα προς ένα ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων, μόνο όταν η Ιακωβιανή μηδενίζεται. Αυτό ισχύει στις περιπτώσεις που $r=0$ ή $\theta=0$.

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξίσωση Helmholtz όταν η άγνωστη συνάρτηση p δεν εξαρτάται από τις γωνίες. Η πηγή θεωρείται ότι βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η εξίσωση Helmholtz (με τον μη ομογενή όρο) γράφεται τότε:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dp}{dr} \right] + k^2 p = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} . \quad (2.4.20)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχει μία τουλάχιστον περίπτωση που η έκφραση αυτή θα μας είναι χρήσιμη ακόμη και για την μελέτη μας στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΝΟΡΑ

3.1 Γενική γεωμετρία-οριακές συνθήκες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το πρόβλημα της διάδοσης του ήχου σε ένα θαλάσσιο περιβάλλον που ορίζεται από επίπεδα σύνορα χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αλλά και πρόσθετες μεθόδους που θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Η απλούστερη γεωμετρία του προβλήματος περιγράφεται στο σχήμα 3.1.

Πρόκειται για ένα περιβάλλον που ορίζεται σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με την επιφάνεια της θάλασσας να είναι επίπεδη επιφάνεια σε βάθος $z=0$ και τον πυθμένα να αποτελείται από επάλληλα στρώματα που χωρίζονται από επίπεδα και οριζόντια σύνορα. Το πρόβλημα μελετάται για μια σημειακή πηγή που θα θεωρηθεί ότι τοποθετείται σε απόσταση $r_0=0$ και βάθος $z=z_0$. Στην γενικότερη περίπτωση η πυκνότητα (ρ) και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου (c) μπορεί να μεταβάλλεται με το βάθος και την απόσταση, σε όλα τα ακουστικά στρώματα, από τα οποία το τελευταίο μπορεί να εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Τα στρώματα στον πυθμένα μπορεί να είναι οσαδήποτε σε αριθμό. Για να αποφύγουμε τις περιπλοκές του προβλήματος θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στις περιπτώσεις που η πυκνότητα είναι σταθερή σε κάθε στρώμα, η ταχύτητα του ήχου μπορεί να μεταβάλλεται μόνο με το βάθος, ενώ στην περίπτωση που θεωρηθεί ημιάπειρο τελευταίο στρώμα, η ταχύτητα του ήχου θα είναι σταθερή σ' αυτό.



Σχήμα 3.1 Η γεωμετρία του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης σε πεδίο με επίπεδα σύνορα.

Η μόνη οριακή συνθήκη του προβλήματος που θα θεωρηθεί αμετάβλητη σε όλες τις περιπτώσεις που θα μελετηθούν είναι στην επιφάνεια ($z=0$) όπου η πίεση p θα είναι πάντα 0. Η συνθήκη αυτή αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι η επιφάνεια της θάλασσας είναι ελεύθερη πίεσεων και δεν είναι δυνατή η μετάδοση του ήχου από το νερό στον αέρα που θεωρείται με αυτό τον τρόπο ως «κενό». Η παραπάνω απλουστευτική παραδοχή δεν δημιουργεί προβλήματα στο χειρισμό ρεαλιστικών προβλημάτων ακουστικής διάδοσης στο νερό, λόγω της πολύ μικρής πυκνότητας του αέρα σε σχέση με εκείνη του νερού.

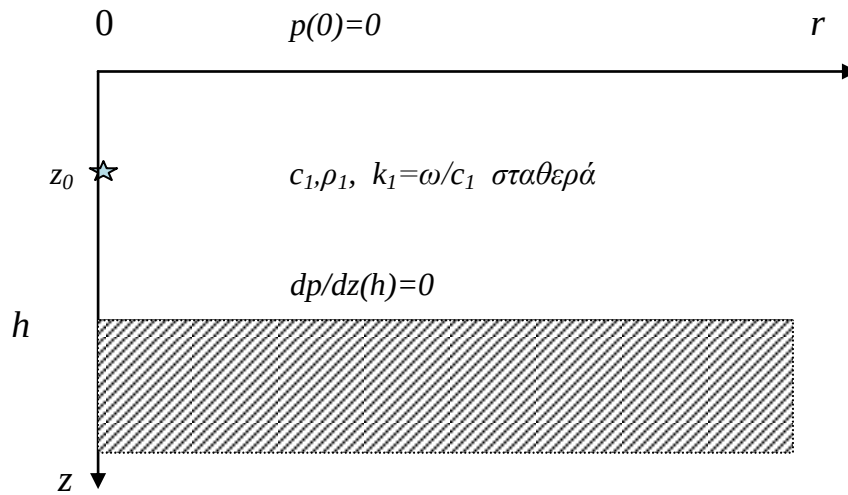
Στο όριο νερού-πυθμένα ζητάμε συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ως προς το σύνορο συνιστώσας της ταχύτητας $\vec{u}$ των στοιχειωδών σωματιδίων του συμπιεστού μέσου ενώ ίδια απαίτηση έχουμε για κάθε διεπιφάνεια στον πυθμένα. Οι συνθήκες αυτές από φυσική σκοπιά εξασφαλίζουν την συνεκτική δομή των δύο ακουστικών μέσων και τον μη αποχωρισμό τους στην διαχωριστική επιφάνεια. Θα απαιτήσουμε επίσης η πίεση να τείνει στο 0 για $z \rightarrow \infty$ όταν το τελευταίο στρώμα του πυθμένα επεκτείνεται μέχρι το άπειρο, ενώ μια συνθήκη ακτινοβολίας τύπου Sommerfeld θα τεθεί για $r \rightarrow \infty$. Σε ειδικές περιπτώσεις θα θεωρήσουμε ότι το πεδίο μας τελειώνει ως προς το z σε έναν ακλόνητο πυθμένα. Η έννοια του ακλόνητου πυθμένα περιγράφεται μαθηματικά που με μια ομογενή συνθήκη Neumann και εκφράζει μαθηματικά τη φυσική ιδιότητα η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\vec{u}$ να μηδενίζεται. Για τη σχέση ταχύτητας στοιχειωδών σωματιδίων και πίεσης παραπέμπομε στον Boyles αλλά και στο κεφάλαιο 3.3 των παρόντων σημειώσεων. Προς το παρόν αρκεί να πούμε ότι η εν λόγω συνιστώσα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι ανάλογη της κάθετης (ως προς το σύνορο) παραγώγου της πίεσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάτω από τις ανωτέρω παραδοχές, η λύση του προβλήματος δεν εξαρτάται από τη γωνία φ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (περιβάλλον αξονικής συμμετρίας) ενώ οι χαρακτηριστικές παράμετροι του περιβάλλοντος δεν εξαρτώνται από την απόσταση (περιβάλλον σταθερών συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων – range independent environment).

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις ακουστικής διάδοσης σε κυματοδηγούς. Κυματοδηγός (waveguide) είναι ένα μέσον διάδοσης κυματικής ενέργειας με σύνορα που βοηθούν στην αποδοτική διάδοση του κύματος ως προς μία κύρια διεύθυνση.

3.2 Ο απλός κυματοδηγός – Πρόβλημα Π1

Ο απλός κυματοδηγός ορίζεται από την επιφάνεια της θάλασσας, που θεωρείται επίπεδη και οριζόντια και τον πυθμένα που επίσης θεωρείται επίπεδος και οριζόντιος σε βάθος h . Στον πυθμένα δεχόμαστε ομογενή συνθήκη Neumann (σχήμα 3.2) ενώ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό θεωρείται σταθερά (ανεξάρτητη των χωρικών συντεταγμένων).



Σχήμα 3.2 Ο απλός κυματοδηγός

Το πρόβλημα που καλούμεθα να επιλύσουμε έχει ως εξής : (πρόβλημα Π1)

- Βρείτε τη συνάρτηση $p(r,z)$ που υπακούει στην εξίσωση:

$$\nabla^2 p(r,z) + k^2 p(r,z) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0), \quad (3.2.1)$$

κάτω από τις οριακές συνθήκες :

$$p(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z}(\cdot, h) = 0 \quad (3.2.2)$$

και μία κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας για $r \rightarrow \infty$.

Ο συμβολισμός με την τελεία στο όρισμα υποδηλώνει ότι η συνθήκη έχει νόημα για κάθε τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής.

Η εξίσωση 3.2.1 σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0). \quad (3.2.1\alpha)$$

3.2.1 Χωρισμός μεταβλητών

Εάν θεωρήσουμε την ομογενή εξίσωση Helmholtz, στο ανωτέρω περιβάλλον, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να καταφύγουμε σε χωρισμό μεταβλητών και να οδηγηθούμε σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 - \lambda)Z = 0, \quad (3.2.4)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $p(r, z) = R(r)Z(z)$ και λ είναι η σταθερά χωρισμού.

Ο ανωτέρω χωρισμός μεταβλητών μας οδηγεί στο να ορίσουμε δύο συναρτήσεις Green για το μη ομογενές πρόβλημα (εξίσωση 3.2.1) από τις οποίες η μία εξαρτάται από μόνο το r και η άλλη μόνο από το z , και να δούμε κατά πόσον μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση του προβλήματος Π1 μέσω αυτών.

3.2.2 Οι συναρτήσεις Green του προβλήματος

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις Green $G_1(r, r_0, \lambda)$ και $G_2(z, z_0, \lambda)$ που υπακούουν στις εξισώσεις :

$$\frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (3.2.5)$$

και

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda)G_2 = -\delta(z - z_0). \quad (3.2.6)$$

Η ευθεία αντιστοιχία ανάμεσα στις εξισώσεις αυτές και τις 3.2.3 και 3.2.4 είναι προφανής.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι εάν στην εξίσωση 2.1.1 κάνουμε τις αντικαταστάσεις :

$$z \rightarrow r, \quad z_0 \rightarrow r_0, \quad p(z) \rightarrow 2\pi r, \quad q(z) \rightarrow 0, \quad r(z) \rightarrow 2\pi r, \quad$$

οδηγούμαστε στην 3.2.5 με την παρατήρηση ότι $r_0 = 0$.

Αντίστοιχα με τις αντικαταστάσεις :

$$p(z) \rightarrow 1, \quad q(z) \rightarrow k^2, \quad r(z) \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow -\lambda, \quad$$

οδηγούμαστε από την 2.1.1 στην 3.2.6

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων G_1 και G_2 είναι αντίστοιχα $[0, \infty)$, και $[0, h]$. Η G_1 έχει ιδιόμορφο σημείο στην αρχή ($r_0 = 0$) ενώ η G_2 ενδιάμεσα (z_0).

Για το πρόβλημα που ορίζεται για την G_1 (Πρόβλημα Π1α) οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, \lambda) \right\} = -\frac{1}{2\pi}, \quad (3.2.7)$$

και

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{dG_1}{dr}(r, \lambda) - i\sqrt{\lambda} G_1(r, \lambda) \right\} = 0. \quad (3.2.8)$$

Από τις συνθήκες αυτές, η πρώτη προέρχεται από την εξίσωση 2.1.6 που ορίζει την πεπερασμένη ασυνέχεια της παραγώγου της G στο ιδιόμορφο σημείο z_0 , εδώ $r_0 = 0$ της εξίσωσης 2.1.1 .

Η δεύτερη συνθήκη (3.2.8) αντιστοιχεί στην συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο. Πρόκειται για μία έκφραση της **συνθήκης ακτινοβολίας του Sommerfeld** και ορίζει ότι το άπειρο απορροφά και δεν επανακτινοβολεί ενέργεια. Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημά μας.

Οι οριακές συνθήκες για την G_2 είναι :

$$G_2(0, z_0, \lambda) = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{G_2(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - G_2(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda)\} = 0, \quad (3.2.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{dG_2}{dz}(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG_2}{dz}(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda) \right\} = -1, \quad (3.2.11)$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h, z_0, \lambda) = 0. \quad (3.2.12)$$

(πρόβλημα Π1β)

Οι 3.2.10 και 3.2.11 εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αντιστοιχούν στην εξίσωση συνέχειας και πεπερασμένης ασυνέχειας της παραγώγου της συνάρτησης Green (2.1.5) στο ιδιόμορφο σημείο.

Οι συνθήκες 3.2.9 και 3.2.12 επιλέγονται να είναι αντίστοιχες με τις συνθήκες 3.2.1 και 3.2.2 του προβλήματος.

3.2.3 Η λύση του προβλήματος

Θα δείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $G_1(r, r_0, \lambda)$ και $G_2(z, z_0, \lambda)$ συναρτήσεις Green που αποτελούν λύσεις των προβλημάτων Π1α και Π1β αντίστοιχα. Τότε η λύση του προβλήματος Π1, προκύπτει μέσω των G_1 και G_2 ως εξής:

$$p(r, r_0, z, z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda \quad (3.2.13)$$

όπου C_λ είναι κατάλληλη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που λαμβάνεται με θετική φορά.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από την αντιστοιχία των προβλημάτων Π1α και Π1β με το πρόβλημα της παραγράφου 2.2 ότι ισχύει :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r} \quad (3.2.14)$$

και

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda = \delta(z - z_0). \quad (3.2.15)$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση της p από την 3.2.13 στην 3.2.1 και παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \frac{d^2 G_1}{dr^2} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i r} \int_{C_\lambda} \frac{dG_1}{dr} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \frac{d^2 G_2}{dz^2} d\lambda \\ &- \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \left\{ \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1}{dr} \right\} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \frac{d^2 G_2}{dz^2} d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \left\{ -\lambda G_1 - \frac{1}{2\pi r} \delta(r - r_0) \right\} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \left\{ -k^2 G_2 + \lambda G_2 - \delta(z - z_0) \right\} d\lambda \\ &- \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \lambda G_1 G_2 d\lambda + \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r - r_0) \int_{C_\lambda} G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} k^2 G_1 G_2 d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \lambda G_1 G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \delta(z - z_0) \int_{C_\lambda} G_1 d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r - r_0) \int_{C_\lambda} G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \delta(z - z_0) \int_{C_\lambda} G_1 d\lambda \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Θα πρέπει τώρα να επιλέξουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Επιλογή 1. Θεωρούμε ότι η C_λ είναι η καμπύλη C_r^+ που περιλαμβάνει τα ιδιόμορφα σημεία της G_1 αλλά όχι της G_2 . Η φορά είναι θετική. Οι 3.2.14 και 3.2.15 θα μας δώσουν :

$$\frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r - r_0) \int_{C_r^+} G_2 d\lambda = 0, \quad (3.2.17)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \delta(z - z_0) \int_{C_r^+} G_1 d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \delta(z - z_0) \cdot -\frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r} \cdot 2\pi i = -\frac{1}{2\pi r} \delta(z - z_0) \delta(r - r_0). \quad (3.2.18)$$

Αποδείξαμε επομένως ότι η αντικατάσταση της p από την 3.2.13 στην πεδιακή εξίσωση δίδει τη σωστή διέγερση και επομένως αποτελεί την μοναδική λύση του προβλήματος αφού το πρόβλημα είναι καλώς τεθειμένο.

Επιλογή 2. Θεωρούμε ότι η C_λ είναι η καμπύλη C_z^- που περιλαμβάνει τα ιδιόμορφα σημεία της G_2 αλλά όχι της G_1 . Η φορά είναι αρνητική. Οι 3.2.14 και 3.2.15 τότε θα μας δώσουν :

$$\frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \int_{C_z^-} G_2 d\lambda = \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \cdot \delta(z-z_0) \cdot 2\pi i = -\frac{1}{2\pi r} \delta(z-z_0) \delta(r-r_0), \quad (3.2.19)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \delta(z-z_0) \int_{C_r^+} G_1 d\lambda = 0. \quad (3.2.20)$$

Επομένως και στην επιλογή αυτή της C_λ καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η επιλογή της καμπύλης C_z^- ή C_r^+ εξαρτάται από την ευκολία χειρισμού της λύσης.

3.2.4. Υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2

Είναι αυτονόητο ότι το επόμενο βήμα στην επίλυση του προβλήματος Π1 είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2

I Η συνάρτηση G_1

Η G_1 προκύπτει ως λύση της 3.2.5 . Για να υπολογίσουμε την G_1 μπορούμε να λύσουμε την 3.2.5 για $r>0$, οπότε δεν θα έχουμε τον μη ομογενή όρο, και να επιβάλουμε στη συνέχεια τη σωστή ιδιομορφία στο $r=0$ μέσω της 3.2.7 .

Η 3.2.5 στην ομογενή της μορφή, είναι μία εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης. Η γενική της λύση εκφρασμένη μέσω συναρτήσεων Hankel είναι :

$$G_1 = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) + BH_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}r). \quad (3.2.21)$$

Η οριακή συνθήκη 3.2.8 επιβάλλει κύματα που αποκλίνουν από την πηγή σε μεγάλες αποστάσεις. Δεδομένου ότι θεωρώντας αρμονικά κύματα με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους αντιπροσωπεύει συγκλίνοντα κύματα, διαπιστώνουμε μέσω της 3.2.8 ότι $B=0$. Έτσι για $r>0$ έχουμε :

$$G_1 = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r). \quad (3.2.22)$$

Για μεγάλα ορίσματα από την 1.2.35 παίρνουμε:

$$H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{\lambda}}} e^{i(\sqrt{\lambda}r - \pi/4)}. \quad (3.2.23)$$

Επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή της συνθήκης 3.2.7. Για την εφαρμογή της θα χρειαστούμε τις αναδρομικές σχέσεις 1.2.38 . Παίρνουμε διαδοχικά :

$$\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon, r_0, \lambda) = A\varepsilon \sqrt{\lambda} H_0^{(1)'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}. \quad (3.2.24)$$

Χρησιμοποιώντας την 1.2.32 έχουμε :

$$A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_0'(\sqrt{\lambda}\varepsilon)+iN_0'(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\}=-\frac{1}{2\pi}, \quad (3.2.25)$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}\left\{J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)+iN_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\right\}=-\frac{1}{2\pi}. \quad (3.2.26)$$

Αλλά όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις 1.2.34 και με δεδομένο ότι $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ παίρνουμε :

$$J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\approx\frac{\sqrt{\lambda}\varepsilon}{2}\xrightarrow{\varepsilon\rightarrow 0}0, \quad (3.2.27)$$

$$N_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\approx-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\varepsilon}, \varepsilon\neq 0, \quad (3.2.28)$$

οπότε

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda}i\left(-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right)=-\frac{1}{2\pi}\Rightarrow A=\frac{i}{4}. \quad (3.2.29)$$

Επομένως παίρνουμε τη σωστή ιδιομορφία για τη τιμή αυτή του A και :

$$G_1(r,r_0,\lambda)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r), \quad r_0=0 \quad (3.2.30)$$

II Η συνάρτηση G_2

Παρατηρούμε και εδώ ότι η 3.2.6 μεταπίπτει σε ομογενή όταν το z_0 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της. Έτσι μπορούμε να λύσουμε την ομογενή της 3.2.6 για $0\leq z<z_0$ και για $z_0<z\leq h$ και να απαιτήσουμε στο όριο για $z\rightarrow z_0$ την εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Η γενική λύση της ομογενούς 3.2. 6 για k σταθερό είναι :

$$G_2(z,z_0,\lambda)=A_2(z_0,\lambda)e^{i\gamma z}+B_2(z_0,\lambda)e^{-i\gamma z}, 0\leq z<z_0 \quad (3.2.31)$$

$$=A_3(z_0,\lambda)e^{i\gamma z}+B_3(z_0,\lambda)e^{-i\gamma z}, z_0\leq z<h, \quad (3.2.32)$$

όπου

$$k^2=\gamma^2+\lambda. \quad (3.2.33)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες :

$$(3.2.9)\Rightarrow A_2+B_2=0 \quad (3.2.34)$$

$$(3.2.10)\Rightarrow A_2e^{i\gamma z_0}+B_2e^{-i\gamma z_0}=A_3e^{i\gamma z_0}+B_3e^{-i\gamma z_0} \quad (3.2.35)$$

$$(3.2.11) \Rightarrow i\gamma \{A_3 e^{i\gamma z_0} - B_3 e^{-i\gamma z_0} - A_2 e^{i\gamma z_0} + B_2 e^{-i\gamma z_0}\} = -1 \quad (3.2.36)$$

$$(3.2.12) \Rightarrow i\gamma A_3 e^{i\gamma h} - i\gamma B_3 e^{-i\gamma h} = 0. \quad (3.2.37)$$

Το ανωτέρω σύστημα επιλύεται εύκολα δίδοντας :

$$A_2 = -\frac{i}{2\gamma} \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h}, \quad B_2 = \frac{i}{2\gamma} \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h},$$

$$A_3 = \frac{e^{-i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h}, \quad B_3 = \frac{e^{i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h}.$$

Η αντικατάσταση των συντελεστών αυτών στις 3.2.31, 3.2.32 δίδει :

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\gamma \cos \gamma h} \sin \gamma z, \quad 0 \leq z \leq z_0, \quad (3.2.38)$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\sin \gamma z_0}{\gamma \cos \gamma h} \cos \gamma(z - h), \quad z_0 \leq z \leq h. \quad (3.2.39)$$

Επομένως :

$$p(r, z, z_0) = -\frac{1}{8\pi} \int_{C_\lambda} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h} \right\} \sin \gamma z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda, \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad (3.2.40)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_{C_\lambda} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h} \right\} \cos \gamma(z - h) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda, \quad z_0 \leq z \leq h. \quad (3.2.41)$$

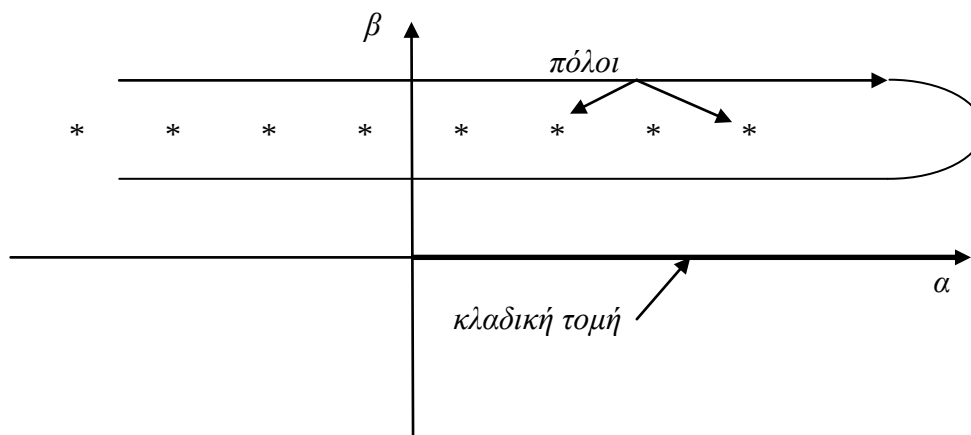
Θα προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα. Η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία για τα οποία $\cos \gamma h = 0$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία για τα οποία $\gamma = 0$, δεν είναι ιδιόμορφα σημεία καθώς συνδυάζονται με συναρτήσεις $\sin \gamma z$ που υπάρχουν στον αριθμητή και ο λόγος τους δεν οδηγεί σε ιδιόμορφο σημείο. Οι τιμές του γ για τις οποίες ισχύει η σχέση $\cos \gamma h = 0$ αποτελούν τα ιδιόμορφα σημεία της προς ολοκλήρωση συνάρτησης αφού εξαρτώνται από το λ μέσω της 3.2.33. Για τις τιμές αυτές θα αποδείξουμε την επόμενη πρόταση :

ΠΡΟΤΑΣΗ : Οι τιμές του γ για τις οποίες ισχύει $\cos \gamma h = 0$, είναι πραγματικές.

Απόδειξη : Έστω $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ και $\gamma'' \neq 0$. Τότε θα είχαμε :

$$\cos \gamma h = \cos \gamma' h \cosh \gamma'' h - i \sin \gamma' h \sinh \gamma'' h = 0. \quad (3.2.42)$$

Αφού $\sinh \gamma'' h \neq 0$ θα πρέπει $\sin \gamma' h = 0$, αλλά τότε από την 3.2.42 θα πρέπει και $\cos \gamma' h = 0$, αφού $\cosh \gamma'' h \neq 0$. Αυτό βέβαια είναι άτοπο. Επομένως $\gamma'' = 0$ □



Σχήμα 3.3 Η κλαδική τομή και οι μετακινημένοι πόλοι της χαρακτηριστικής συνάρτησης.
Εδώ $\lambda = \alpha + i\beta$

Η εξίσωση

$$\cos \gamma h = 0, \quad (3.2.43)$$

ονομάζεται "**χαρακτηριστική εξίσωση**" του κυματοδηγού.

Οι λύσεις της είναι αριθμοί γ_n για τους οποίους ισχύει :

$$\gamma_n = (2n-1) \frac{\pi}{2h}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.44)$$

$$\lambda_n = k^2 - \left[(2n-1) \frac{\pi}{2h}\right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.45)$$

Θεωρώντας ότι εργαζόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο, οι επιτρεπτές τιμές του λ μπορεί να θεωρηθούν πόλοι της προς ολοκλήρωση συνάρτησης. (Υπενθυμίζεται πάντως ότι βρίσκονται στον πραγματικό άξονα) .

Παρατηρούμε επίσης, ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει ένα κλαδικό σημείο στο $\lambda=0$ (στο όρισμα της συνάρτησης Hankel έχουμε $\sqrt{\lambda}$). Έτσι, οι συναρτήσεις p , δεν είναι αναλυτικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Μια κλαδική τομή που περνά από το σημείο $\lambda=0$ και δικαιολογείται από την επ' άπειρον συμπεριφορά της λύσης μας, ορίζεται από την απαίτηση $\text{Im}(\sqrt{\lambda}) = 0$ και $\text{Re}(\lambda) > 0$ ⁴ (σχήμα 3.3).

Με δεδομένο ότι και οι πόλοι βρίσκονται στον πραγματικό άξονα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με μικρή μετατόπιση των πόλων στο φανταστικό ημιεπίπεδο και στη συνέχεια να πάρουμε ως λύση το όριο του ολοκληρώματος 3.2.40-41, όταν το φανταστικό μέρος των πόλων τείνει στο 0.

⁴ Για περισσότερες λεπτομέρειες σε ό,τι αφορά στην επιλογή της κλαδικής τομής, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Boyles.

Σύμφωνα με το Παράρτημα I, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, όπου $q(z) = \cos \gamma h$. Επομένως, για την εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy χρειαζόμαστε την παραγωγό της στα ιδιόμορφα σημεία :

$$q'(z_0) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} (\cos \gamma h)_{\lambda=\lambda_n}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy για την καμπύλη C_z^- και για $\text{Im}(\lambda_n) \rightarrow 0$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} p(r, z, z_0) &= \frac{1}{8\pi} \int_{C_z^-} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h} \right\} \sin \gamma z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n(z_0 - h) \sin \gamma_n z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r)}{\gamma_n \frac{\partial}{\partial \lambda} (\cos \gamma h)_{\lambda=\lambda_n}} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Προσοχή στην αλλαγή του προσήμου λόγω της επιλεγείσας αρνητικής φοράς της καμπύλης ολοκλήρωσης. Ο υπολογισμός της ως προς λ παραγώγου της $\cos \gamma h = 0$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = k^2 - \lambda &\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \cos \gamma h \right]_{\lambda=\lambda_n} = - \left[h(\sin \gamma h) \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} \\ &= - \left[h(\sin \gamma h) \frac{\partial}{\partial \lambda} (k^2 - \lambda)^{1/2} \right]_{\lambda=\lambda_n} = h \frac{\sin \gamma_n h}{2\gamma_n} = \frac{h(-1)^{n+1}}{2\gamma_n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

δεδομένου ότι $\cos \gamma_n h = 0$. Παίρνουμε επίσης :

$$\cos \gamma_n(z_0 - h) = \cos \gamma_n z_0 \cos \gamma_n h + \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n h = (-1)^{n+1} \sin \gamma_n z_0 \quad (3.2.48)$$

και αντικαθιστώντας στην 3.2.46 παίρνουμε :

$$p(r, z, z_0) = \frac{i}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r). \quad (3.2.49)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασυμπτωτική έκφραση για $r \gg$ που είναι:

$$p(r, z, z_0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi} h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n z \frac{\exp(i(\sqrt{\lambda_n} r + \frac{\pi}{4}))}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n} r}}. \quad (3.2.50)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Χρησιμοποιήσαμε την έκφραση της πίεσης για $0 \leq z \leq z_0$. Εντελώς αντίστοιχα καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την έκφραση της πίεσης για $z_0 \leq z \leq h$.

3.2.5. Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

Ας επανέρθουμε στην εξίσωση που διέπει το πρόβλημά μας σε κυλινδρικές συντεταγμένες :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0). \quad (3.2.51)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση $p(r, z)$ ⁵ ορίζεται στο διάστημα $[0, h]$ και είναι παντού συνεχής. Σύμφωνα με τα θεωρήματα αναπαράστασης μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά εάν ορισθεί κατάλληλα μια ομάδα ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος Sturm-Liouville (βάση) στο ίδιο διάστημα. Εάν μάλιστα εξασφαλισθεί η σύμπτωση των οριακών συνθηκών των δύο προβλημάτων, τότε η σειρά θα συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Ποια όμως είναι η εν λόγω ομάδα ;

Θεωρούμε την ομογενή μορφή της 3.2.51. Κατά τα γνωστά μπορούμε να κάνουμε χωρισμό μεταβλητών για την δεδομένη γεωμετρία του προβλήματος $p(r, z) = \Phi(r)u(z)$ και να πάρουμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda \Phi = 0, \quad (3.2.52)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (k^2 - \lambda)u = 0. \quad (3.2.53)$$

όπου λ είναι η σταθερά χωρισμού. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $k^2 - \lambda = \gamma^2$.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα που ορίζεται από την 3.2.53, με οριακές συνθήκες όπως αυτές προκύπτουν από το αρχικό (μη ομογενές) πρόβλημα για την συνάρτηση $p(r, z)$.

$$u(0) = 0, \quad (3.2.54)$$

$$\frac{du}{dz}(h) = 0. \quad (3.2.55)$$

Το πρόβλημα μας θυμίζει ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville⁶ και συνεπώς ορίζουμε μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές λ_n . Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0, h]$, μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι ορθοκανονικές και επί πλέον αποτελούν βάση στο $[0, h]$. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές υπολογίζονται ως εξής :

⁵ Στη συνέχεια δεν θα μεταφέρομε το όρισμα z_0 στη συνάρτηση της ακουστικής πίεσης

⁶ ΑΣΚΗΣΗ : Αποδείξτε ότι το πρόβλημα που ορίζεται από την εξίσωση 3.2.53 και τις οριακές συνθήκες 3.2.54 και 3.2.55 είναι ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville.

Η γενική λύση της 3.2.53 για k σταθερό, είναι

$$u(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z}. \quad (3.2.56)$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε :

Από την 3.2.54

$$A+B=0. \quad (3.2.57)$$

Από την 3.2.55

$$i\gamma Ae^{i\gamma h} - i\gamma Be^{-i\gamma h} = 0. \quad (3.2.58)$$

Το σύστημα των εξισώσεων 3.2.57 και 3.2.58 για να έχει μη μηδενική λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι 0. Παίρνουμε έτσι την χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού που είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma e^{i\gamma h} & -i\gamma e^{-i\gamma h} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2.59)$$

$$\text{ή} \quad -i\gamma[e^{i\gamma h} + e^{-i\gamma h}] = 0, \quad (3.2.59a)$$

ή τελικά

$$\cos \gamma h = 0 \quad (3.2.60)$$

απ' όπου προκύπτουν οι επιτρεπτές τιμές για το γ ως εξής :

$$\gamma_n h = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \gamma_n = \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{h} \quad n=1, 2, \dots \quad (3.2.61)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στα γ και λ και τον δείκτη n για κάθε επιτρεπτή τιμή παίρνουμε

$$\lambda_n^2 = k^2 - \gamma_n^2 = k^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2. \quad (3.2.62)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις προκύπτουν εύκολα ως

$$\begin{aligned} u_n(z) &= Ae^{i\gamma_n z} + Be^{-i\gamma_n z} = A(e^{i\gamma_n z} - e^{-i\gamma_n z}) = \\ &= A(\cos \gamma_n z + i \sin \gamma_n z - \cos \gamma_n z + i \sin \gamma_n z) = \\ &= 2Ai \sin \gamma_n z. \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

Όπως γνωρίζουμε, η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων μπορεί να αποτελέσει ένα ορθοκανονικό σύστημα με κατάλληλη επιλογή του συντελεστή A . Έτσι παίρνουμε

$$\int_0^h u_n^2(z) dz = 1 \quad (3.2.64)$$

και χρησιμοποιώντας την 3.2.63 και τριγωνομετρικές ιδιότητες καταλήγουμε στην

$$2Ai = \sqrt{\frac{2}{h}} \quad . \quad (3.2.65)$$

οπότε οι ιδιοσυναρτήσεις γράφονται συναρτήσεις των ιδιοτιμών ως

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \left[(k^2 - \lambda_n)^{1/2} z \right] \quad . \quad (3.2.66)$$

Σημειώνουμε ότι πολλές φορές στην βιβλιογραφία ως ιδιοτιμή εμφανίζεται το μέγεθος $\kappa_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Σύμφωνα τώρα με το δεύτερο θεώρημα αναπαράστασης, η συνάρτηση $p(r, z, z_0)$ μπορεί να αναπτυχθεί για κάθε θέση r σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων μέσω των $u_n(z)$. Έτσι γράφουμε :

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) u_n(z) \quad . \quad (3.2.67)$$

Απομένει να υπολογίσουμε τους συντελεστές A_n .

Αντικαθιστώντας την $p(r, z)$ από την 3.2.67 στην 3.2.51 και παραλείποντας τα όρια για λόγους ευκολίας παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n'' + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n' + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'' A_n + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0), \quad (3.2.68)$$

όπου ' δηλώνει παραγώγιση ως προς r ή z ανάλογα με το όρισμα.

Χρησιμοποιώντας την 3.2.53 έχουμε $u_n'' = (\lambda_n - k^2) u_n$ και αντικαθιστώντας στην 3.2.68 καταλήγουμε στην

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left\{ A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \lambda_n A_n \right\} = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad . \quad (3.2.69)$$

Στο σημείο αυτό αξιοποιούμε την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων και αφού πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της 3.2.69 με $u_m(z)$, ολοκληρώνουμε από 0 έως h . Έτσι παίρνουμε

$$\int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} u_n u_m \left\{ A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \lambda_n A_n \right\} dz = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^h \delta(r) \delta(z - z_0) u_m dz \quad . \quad (3.2.70)$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων παίρνουμε στη συνέχεια

$$A_m'' + \frac{1}{r} A_m' + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) u_m(z_0) \quad . \quad (3.2.71)$$

Θεωρώντας ότι $u_m(z_0) \neq 0$ παίρνουμε

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] + \lambda_m \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r). \quad (3.2.72)$$

Η εξίσωση 3.2.72 μας παραπέμπει άμεσα στην 3.2.5. Προσεκτική ανάλυση της 3.2.72 σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $\left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right]$ έχει την ίδια λύση με την G_1 της 3.2.5 που δίδεται από την 3.2.30. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{A_m}{u_m(z_0)} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r), \quad (3.2.73)$$

$$\text{ή} \quad A_m = \frac{i}{4} u_m(z_0) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r). \quad (3.2.74)$$

Επανερχόμενοι στην 3.2.67 και αντικαθιστώντας τον δείκτη n με m έχουμε :

$$p(r, z) = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) u_n(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r). \quad (3.2.75)$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την έκφραση της ιδιοσυνάρτησης μέσω της 3.2.66 έχουμε

$$p(r, z) = \frac{i}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n z_0) \sin(\gamma_n z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r). \quad (3.2.76)$$

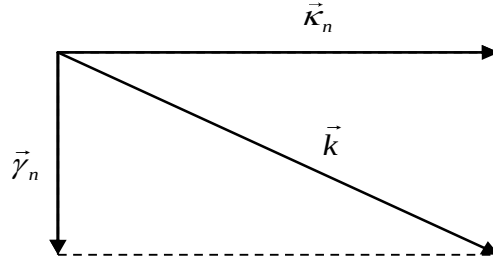
Η έκφραση αυτή βέβαια είναι πανομοιότυπη με την 3.2.49 που είχε προκύψει από τον υπολογισμό των συναρτήσεων G_1 και G_2 του προβλήματος. Έτσι, βλέπουμε την πλήρη αντιστοιχία των μεθόδων αναπτύγματος σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων και της ολοκληρωτικής έκφρασης της λύσης μέσω συναρτήσεων Green. Οι ιδιοτιμές λ_n αντιστοιχούν στους πόλους της G_2 . Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι λόγω της ύπαρξης της πηγής, δεν είναι δυνατόν να ξεφύγουμε από τον υπολογισμό μιας συνάρτησης Green (πρβλ 3.2.72).

Κάθε όρος της σειράς 3.2.75 χαρακτηρίζεται «ιδιομορφή» (mode) ενώ οι ιδιοσυναρτήσεις $u_n(z)$ αντιπροσωπεύουν διακριτούς τρόπους κατανομής της ακουστικής ενέργειας ως προς το βάθος. Προσέξτε την δυνατότητα εναλλαγής πηγής δέκτη (ως προς το βάθος) με το ίδιο αποτέλεσμα για το ακουστικό πεδίο που προέρχεται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων Green.

3.2.6. Κανονικές-Μη κανονικές ιδιοτιμές

Δεδομένου ότι η ιδιοτιμή λ_n εμφανίζεται ως υπόριζος ποσότητα, παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε τι γίνεται στη λύση μας, όταν $\lambda_n < 0$. Σημειώνουμε ότι για τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, οι ιδιοτιμές λ_n μπορεί να είναι αρνητικές, και η αντιστοιχία τους με τους πόλους της G_2 μας παραπέμπει στο σχήμα 3.3 όπου ήδη έχει

σημειωθεί (χωρίς άλλη αναφορά) η δυνατότητα των λ_n να έχουν αρνητικές τιμές. Πριν προχωρήσουμε στη σχετική μελέτη, ας δούμε τη φυσική σημασία των ιδιοτιμών.



Σχήμα 3.4 Ο αριθμός κύματος και οι συνιστώσες του

Ο αριθμός κύματος k μπορεί να θεωρηθεί διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση κάθετη στο μέτωπο ενός κύματος που διαδίδεται σε κάποιο ακουστικό μέσον. Οι αριθμοί γ_n και $\sqrt{\lambda_n} = \kappa_n$ είναι τα μέτρα της κάθετης και οριζόντιας συνιστώσας του $\vec{k}$.

Η αναπαράσταση 3.2.76 μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί με σύνθεση επίπεδων κυμάτων που χαρακτηρίζονται με οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος μέτρου $\sqrt{\lambda_n}$. Σημειώνεται ότι το μέτρο του $\|\vec{k}\| = (\omega/c)$ παραμένει σταθερό, όχι όμως και η φορά του που μεταβάλλεται ανάλογα με το μέτρο του $\sqrt{\lambda_n}$.

Για να έχουμε όμως κύμα, θα πρέπει $|\gamma_n| < |k|$ για να έχει νόημα η ανάλυση του $\vec{k}$ σε πραγματικές διανυσματικές συνιστώσες, όπως φαίνεται από το σχήμα 3.4 οπότε $\sqrt{\lambda_n}$ πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός και επομένως $\lambda_n > 0$.

Η περίπτωση λοιπόν που αντιστοιχεί σε $\lambda_n > 0$ ορίζει μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων που ονομάζονται κανονικές (normal) σε αντίθεση με τις ιδιοσυναρτήσεις που ορίζονται για $\lambda_n < 0$ που ονομάζονται μη κανονικές (evanescent). Οι μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις συνεισφέρουν βέβαια στη λύση του προβλήματος, που δεν μπορεί να είναι πλήρης παρά μόνο με τη συμμετοχή τους, ωστόσο από τη φυσική πλευρά δεν δίδουν συνεισφορά στο κυματικό φαινόμενο. Περισσότερα για τη φυσική σημασία της λύσης της κυματικής εξίσωσης με τη μορφή αναπτύγματος σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων θα δοθεί στο κεφάλαιο 3.3.3.

Μία πρώτη εικόνα της μη κυματικής συμπεριφοράς της λύσης όταν $\lambda_n < 0$ παίρνουμε χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις της συνάρτησης Hankel για μεγάλα ορίσματα. Η έκφραση αυτή σε συνδυασμό με την αναπαράσταση 3.2.76 μας δίνει:

$$p(r, z) = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n z_0) \sin(\gamma_n z) \frac{e^{i\sqrt{\lambda_n} r + i\pi/4}}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n} r}}. \quad (3.2.77)$$

Η κυματική συνεισφορά των όρων της 3.2.77 ως προς την απόσταση r φαίνεται για $\lambda_n > 0$ από την εκθετική συνάρτηση $e^{i\sqrt{\lambda_n}r}$ που αντιπροσωπεύει κύμα. Εάν όμως $\lambda_n < 0$ τότε $\sqrt{\lambda_n} = ib_n$, $b_n \in \Re^+$ και η εκθετική συνάρτηση $e^{i\sqrt{\lambda_n}r}$ δεν αντιπροσωπεύει πλέον κύμα, μια και έχουμε:

$$e^{i\sqrt{\lambda_n}r} = e^{-b_n r}. \quad (3.2.78)$$

Οι όροι τάξης n στην 3.2.77 δίνουν λύση που αποσβέννεται εκθετικά με την απόσταση r , και επομένως συνεισφέρουν σημαντικά μόνο για μικρά r . Για μεγάλα r , μια καλή προσέγγιση της λύσης είναι μία αναπαράσταση της 3.2.77 μόνο πάνω στις τάξεις n για τις οποίες $\sqrt{\lambda_n} \in \Re$. Το ερώτημα που τίθεται επομένως είναι κατά πόσον υπάρχει η πιθανότητα να έχουμε λύση που να μην αντιπροσωπεύει κυματικό φαινόμενο. Αυτό πράγματι μπορεί να συμβεί εάν:

$$\lambda_n = k^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{h} \right]^2 < 0 \quad \forall n \in (1, 2, \dots). \quad (3.2.79)$$

Εάν η ανωτέρω ανισότητα ισχύει για $n=1$, θα ισχύει προφανώς και για κάθε n οπότε παίρνομε ως συνθήκη για την ύπαρξη μη κυματικής λύσης :

$$k - \frac{\pi}{2h} < 0 \Rightarrow k (= \frac{\omega}{c}) < \frac{\pi}{2h}. \quad (3.2.80)$$

Η ανισότητα αυτή γράφεται :

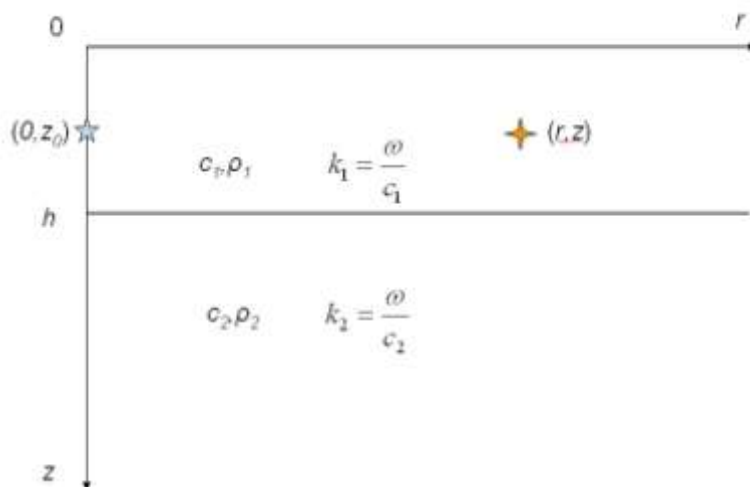
$$\frac{2\pi f}{c} < \frac{\pi}{2h} \Rightarrow f < \frac{c}{4h}. \quad (3.2.81)$$

Επομένως, για συχνότητες μικρότερες από $c/4h$ δεν υπάρχει κυματική διάδοση. Η συχνότητα αυτή ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής** (cut-off frequency). Συχνότητα αποκοπής ορίζεται και για κάθε ιδιομορφή χωριστά και προκύπτει εάν στην 3.2.79 η τάξη n πάρει την αντίστοιχη τιμή.

Τονίζεται και πάλι ότι η συχνότητα αποκοπής είναι το κάτω όριο της συχνότητας για την ύπαρξη κυματικού φαινομένου. Δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής ότι η αναπαράσταση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από τις παραμέτρους του προβλήματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Δεν θα μας απασχολήσει η ειδική περίπτωση κατά την οποία $\lambda_n=0$.

3.3 Ο κυματοδηγός PEKERIS - Πρόβλημα Π2



Σχήμα 3.5 Η γεωμετρία του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης για τον κυματοδηγό PEKERIS.

Θεωρείστε το περιβάλλον που ορίζεται σύμφωνα με το σχήμα 3.5. Το πεδίο ορισμού της ακουστικής πίεσης $p(r,z)$ κατά τον άξονα των z εκτείνεται μέχρι το ∞ . Επομένως η p ορίζεται τώρα στο διάστημα $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Η περιγραφή αυτή είναι περισσότερο κοντά στην πραγματικότητα καθώς υπάρχει πάντα διείσδυση της ακουστικής ενέργειας σε μεγάλα βάθη στον πυθμένα της θάλασσας ο οποίος μπορεί να διαδώσει ακουστικά όπως και διατμητικά κύματα⁷. Στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης δεν θα εξετασθεί η περίπτωση διάδοσης και διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα ο οποίος επομένως για πρόβλημα που παρουσιάζεται εδώ θα θεωρηθεί ρευστός. Το περιβάλλον αυτό ονομάζεται «κυματοδηγός Pekeris» (Pekeris waveguide), προς τιμήν του Γεωφυσικού Chaim L. Pekeris (1908-1993), ο οποίος μελέτησε αναλυτικά τον συγκεκριμένο κυματοδηγό σε σχέση με προβλήματα σεισμικής διάδοσης.

Η ύπαρξη της διεπιφάνειας στη θέση $z=h$ μας επιβάλει την αναζήτηση της κατάλληλης συνθήκης που θα καταστήσει το πρόβλημα καλώς τεθειμένο. Την απάντηση θα τη δώσει η φυσική του προβλήματος που επιβάλλει :

- Συνέχεια της πίεσης
- Συνέχεια της κάθετης στην διεπιφάνεια συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\vec{u}$.

Ανατρέχοντας στη θεμελίωση της κυματικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του πρώτου κεφαλαίου θα διαπιστώσουμε ότι ισχύει (βλ Boyles) :

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1. \quad (3.3.1)$$

⁷ Δείτε σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία»

Θεωρώντας την ως προς z συνιστώσα της ταχύτητας ($\vec{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$) έχουμε :

$$-\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u_{1z} . \quad (3.3.2)$$

Στην περίπτωση της αρμονικής λύσης ($\vec{u}_1 = \vec{u} e^{-i\omega t}$, $p_1 = p e^{-i\omega t}$) και $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, παίρνουμε:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -i\omega \rho_0 u_z , \quad (3.3.3)$$

$$u_z = \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} . \quad (3.3.4)$$

Δεδομένου ότι $i\omega$ είναι σταθερά, η συνέχεια της ως προς z συνιστώσας της ταχύτητας, ισοδυναμεί με συνέχεια του όρου $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}$. Υπενθυμίζεται εν προκειμένω η

συνθήκη του ακλόνητου πυθμένα στο πρόβλημα Π1 στο οποίο μηδενισμός της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων είχε εκφραστεί με τον μηδενισμό της ως προς z παραγώγου της πίεσης.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα στο προαναφερθέν περιβάλλον, μπορούμε να θεωρήσουμε την γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση στη ειδική περίπτωση που η πυκνότητα ρ_0 μεταβάλλεται με το βάθος. Η κυματική εξίσωση τότε είναι:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 . \quad (3.3.5)$$

Για αρμονική λύση $p_1 = p e^{-i\omega t}$, η εξίσωση γίνεται:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p + k^2 p = 0 \quad (3.3.6)$$

και στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας που μας ενδιαφέρει εδώ και για $\rho_0 = \rho(z)$ όπως στο πρόβλημά μας :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = 0 . \quad (3.3.7)$$

Βέβαια εδώ έχουμε:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε την $p(z)$:

$$p(z) = \begin{cases} p^{(1)} & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ p^{(2)} & \text{για } z > h \end{cases}$$

Για την πηγή που έχουμε θεωρήσει, η πεδιακή εξίσωση είναι :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0). \quad (3.3.8)$$

με οριακές συνθήκες και συνθήκες διεπιφανειών:

$$p^{(1)}(\cdot, 0) = 0, \quad (3.3.9)$$

$$p^{(1)}(\cdot, h) = p^{(2)}(\cdot, h), \quad (3.3.10)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot, h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot, h), \quad (3.3.11)$$

και συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld για $r \rightarrow \infty$.

Απομένει η συνθήκη για $z \rightarrow \infty$. Για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα και παράλληλα να έχουμε μια φυσικά αποδεκτή συνθήκη, ζητάμε κι εδώ αποκλίνοντες κυματισμούς. Η συνθήκη αυτή (συνθήκη ακτινοβολίας) είναι αντίστοιχη με την Sommerfeld. Μπορεί ωστόσο ναδειχθεί ότι στην περίπτωση που απαιτούμε διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη περιοριστική συνθήκη:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p^{(2)}(\cdot, z) = 0, \quad (3.3.12)$$

που επιβάλλει μηδενισμό του ακουστικού πεδίου σε άπειρο βάθος. Θα σημειώσουμε ωστόσο ότι ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει μια αυστηρότερη αναφορά στην οριακή συνθήκη για την επ' άπειρο ως προς z συμπεριφορά της λύσης της κυματικής εξίσωσης στα βιβλία των Zauderer και Jensen et. al.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό (Π2) χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων:

Έστω η εξίσωση

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{du}{dz}(z) \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho(z)} - \frac{\lambda}{\rho(z)} \right) u(z) = 0, \quad (3.3.13)$$

όπου $u(z): [0, \infty)$, με

$$u(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ u^{(2)}(z) & \text{για } z \geq h \end{cases},$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases},$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\omega}{c_1} = k_1 & \text{για } 0 \leq z < h \\ \frac{\omega}{c_2} = k_2 & \text{για } z > h \end{cases},$$

και

$$u^{(1)}(h) = u^{(2)}(h), \quad \Sigma.1$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du^{(1)}}{dz}(h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du^{(2)}}{dz}(h), \quad \Sigma.2$$

$$u^{(1)}(0) = 0, \quad \Sigma.3$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u^{(2)}(z) = 0. \quad \Sigma.4$$

(πρόβλημα βάθους)

Με αναφορά στο πρόβλημα Sturm-Liouville μπορούμε να δείξουμε ότι το παρόν πρόβλημα είναι αντίστοιχο με ένα μη-κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville, και ορίζει μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ που αντιστοιχεί σε ένα διακριτό φάσμα πεπερασμένων ιδιοτιμών λ_n , $n=1, \dots, N$ και ένα συνεχές φάσμα ιδιοτιμών λ που ορίζονται σε μία περιοχή S .

Μία συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα $[0, h)$ με τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο μπορεί να αναπτυχθεί με βάση τις ανωτέρω ιδιοσυναρτήσεις ως εξής:

$$f(z) = \sum_{n=1}^N A_n u_n(z, \lambda_n) + \int_S b(\lambda) u(z, \lambda) d\lambda, \quad (3.3.14)$$

όπου S καλύπτει το συνεχές φάσμα των ιδιοτιμών λ . Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να χειριστούμε το ανωτέρω αποτέλεσμα για να εκφράσουμε την πίεση $p(r, z)$ μέσω των ιδιοσυναρτήσεων που ορίζονται κατά τα ανωτέρω. Για τις ιδιότητες των $u_n(z, \lambda_n)$ και $u(z, \lambda)$ παραπέμπουμε στις 1.3.20 και 1.3.21.

3.3.1 Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων

Με βάση τη μεταβολή των παραμέτρων του προβλήματος βάθους μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων της μορφής :

$$\frac{d^2 u^{(*)}}{dz^2} + (k_*^2 - \lambda) u^{(*)} = 0, \quad * = 1, 2 \quad (3.3.15)$$

και να ζητήσουμε εφαρμογή των συνθηκών στα όρια και τη διεπιφάνεια. Οι λύσεις του προβλήματος αφού το k είναι σταθερό σε κάθε περιοχή 1 ή 2, είναι της γενικής μορφής:

$$u^{(1)}(z) = A e^{i\gamma_1 z} + B e^{-\gamma_1 z}, \quad (3.3.16)$$

$$\text{όπου } \gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda} ,$$

$$u^{(2)}(z) = C e^{i\gamma_2(z-h)} \quad (3.3.17)$$

$$\text{για αποκλίνον κύμα, όπου } \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda} .$$

Η απαίτηση του προβλήματός μας (δες 3.3.12) είναι για λύση που τείνει στο 0 για $z \rightarrow \infty$. Ο μόνος τρόπος που αυτό είναι δυνατό, είναι να έχουμε $\gamma_2 = ib_2$ $b_2 \in \Re^+$, δηλαδή γ_2 φανταστικό. Επομένως θα πρέπει

$$k_2^2 < \lambda$$

(Περιορισμός I)

Η συνθήκη Σ.3 μας δίνει

$$u^{(1)}(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \quad \text{και}$$

$$u^{(1)}(z) = A[e^{i\gamma_1 z} - e^{-i\gamma_1 z}] . \quad (3.3.18)$$

Η συνθήκη Σ.1 μας δίνει

$$u^{(1)}(h) = u^{(2)}(h) \Rightarrow A[e^{i\gamma_1 h} - e^{-i\gamma_1 h}] = C , \quad (3.3.19)$$

ενώ η συνθήκη Σ.2 επιβάλλει:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du^{(1)}}{dz}(h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du^{(2)}}{dz}(h) \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} \gamma_1 i A [e^{i\gamma_1 h} + e^{-i\gamma_1 h}] = -\frac{1}{\rho_2} b_2 C . \quad (3.3.20)$$

Οι εξισώσεις 3.3.19 και 3.3.20 ορίζουν ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ως προς τους αγνώστους A, C . Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος πρέπει να είναι 0 για μη τετριμμένη λύση. Έτσι παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού, αφού αντικαταστήσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις με τριγωνομετρικές:

Από την 3.3.19 έχουμε :

$$2i \sin \gamma_1 h \cdot A - C = 0 . \quad (3.3.21)$$

Από την 3.3.20 έχουμε:

$$2i \gamma_1 \cos \gamma_1 h \cdot A + b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C = 0 . \quad (3.3.22)$$

Αρα θέλουμε για μη μηδενική λύση:

$$b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} 2i \sin \gamma_1 h + 2i \gamma_1 \cos \gamma_1 h = 0 . \quad (3.3.23)$$

ή

$$\tan \gamma_1 h = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\gamma_1}{b_2} , \quad (3.3.24)$$

που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού. Η εξίσωση αυτή θα μας δώσει τις επιτρεπτές ιδιοτιμές λ_n που συνδέονται με τα γ_1 και b_2 μέσω των σχέσεων

$$k_1^2 = \gamma_{1n}^2 + \lambda_n \quad \text{και} \quad k_2^2 = \lambda_n - b_{2n}^2$$

όπου έχουμε εισαγάγει τον δείκτη n και στα αντίστοιχα μεγέθη εκτός από την ιδιοτιμή.

Η 3.3.24 είναι μία μη γραμμική εξίσωση ως προς λ που πρέπει να λυθεί με κατάλληλη μέθοδο. Θα δούμε στη συνέχεια την μορφή της εξίσωσης γραφικά.

Κάνουμε τις αντικαταστάσεις $y = \gamma_1 h$ $b = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ $a = \omega h \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται :

$$\tan y = -\frac{by}{\sqrt{a^2 - y^2}} . \quad (3.3.25)$$

Υπολογίζοντας τα y που ικανοποιούν την ανωτέρω εξίσωση, παίρνουμε και τις ιδιοτιμές λ

Για να πάρουμε μία αίσθηση της ποιοτικής συμπεριφοράς των ιδιοτιμών κατασκευάζουμε το σχήμα 3.6, όπου έχουν χαραχτεί δύο καμπύλες για την συνάρτηση $g(y) = -by / \sqrt{a^2 - y^2}$ που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές συχνότητες ω και ω' . Τα σημεία τομής της καμπύλης που ορίζει η εν λόγω συνάρτηση με τις καμπύλες της $\tan y$, μας δίνουν τις επιτρεπτές τιμές της y , από όπου προκύπτουν και οι ιδιοτιμές λ_n . Οι επιτρεπτές τιμές του y είναι πεπερασμένες σε αριθμό.

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$u_n^{(1)}(z) = 2Ai \sin \gamma_{1n} z = A' \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n} z , \quad (3.3.26)$$

και

$$u_n^{(2)}(z) = Ce^{-\sqrt{\lambda_n - k_2^2}(z-h)} \quad (3.3.27)$$

Από τη συνθήκη Σ1 και τις ανωτέρω σχέσεις παίρνουμε :

$$A' \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n} h = C$$

και συνεπώς

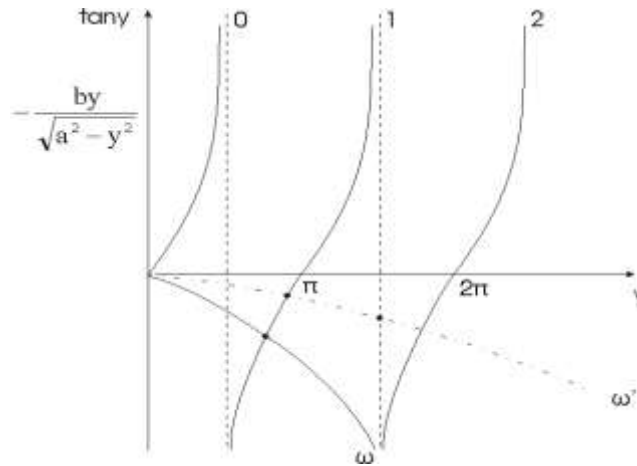
$$u_n^{(1)}(z) = A' \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n} z , \quad (3.3.26a)$$

και

$$u_n^{(2)}(z) = A' \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n} e^{-\sqrt{\lambda_n - k_2^2}(z-h)} \quad (3.3.27)$$

Οι τιμές του A' θα προκύψουν από τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, που είναι της μορφής :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} (u_n(z))^2 dz = \int_0^h \frac{1}{\rho_1} (u_n^{(1)}(z))^2 dz + \int_h^\infty \frac{1}{\rho_2} (u_n^{(2)}(z))^2 dz = 1 \quad (3.3.28)$$



Σχήμα 3.6 Σχηματική παράσταση του υπολογισμού των ιδιοτιμών στο περιβάλλον Pekeris

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι από τη σχέση $\gamma_{1n} = \sqrt{k_1^2 - \lambda_n}$ γίνεται φανερό με βάση και την μέχρι τώρα συζήτηση για την φυσική σημασία του αριθμού κύματος, ότι για να έχει η λύση μας κυματική συμπεριφορά παντού στο νερό, θα πρέπει $\gamma_{1n} \in \Re$, δηλαδή να ισχύει

$$\lambda_n < k_1^2$$

(Περιορισμός II)

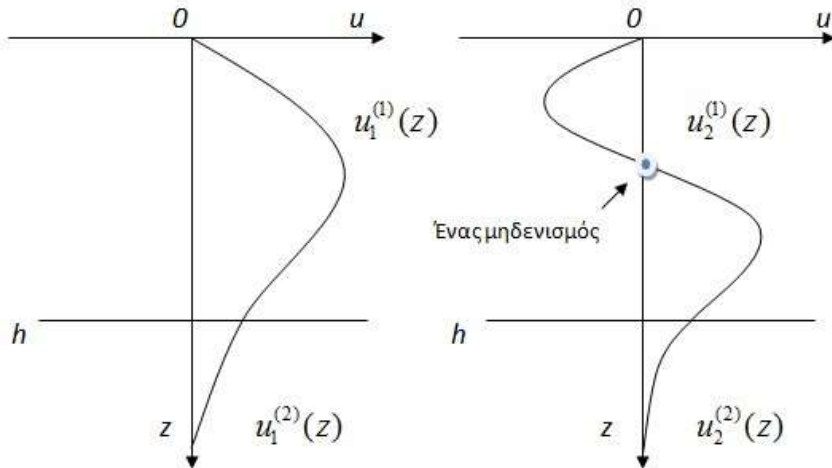
Συνδυάζοντας τους περιορισμούς I και II, βλέπουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η λύση μας κυματική μορφή στο νερό και να έχει αποσβενύμενη συμπεριφορά για $z > h$ είναι:

$$k_2^2 < \lambda_n < k_1^2 \quad (3.3.29)$$

ή

$$\left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 < \lambda_n < \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \quad (3.3.30)$$

Επομένως θα πρέπει και $c_2 > c_1$ που είναι μια απαίτηση που στο θαλάσσιο περιβάλλον ισχύει γενικά. (Ο πυθμένας της θάλασσας είναι σκληρότερος από το νερό και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι μεγαλύτερη). Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων πρώτης και δεύτερης τάξης παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα 3.7. Στο εν λόγω σχήμα έχουμε περιγράψει ποιοτικά και μόνο τις καμπύλες που αναπαριστούν τις ιδιοσυναρτήσεις. Όπως μπορεί να δει κανείς από την έκφραση 3.3.26 οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν την μορφή ημιτονοειδούς συνάρτησης που μηδενίζεται στο διάστημα $(0, h]$ τόσες φορές όσες η τάξη της ιδιοσυνάρτησης μειωμένη κατά ένα. Έτσι η πρώτη τάξη δεν έχει κανένα μηδενισμό, η δεύτερη τάξη έχει ένα κ.ο.κ. Δεν λαμβάνεται φυσικά υπόψη ο μηδενισμός στην επιφάνεια της θάλασσας που προέρχεται από την συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 3.7 Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων πρώτης και δεύτερης τάξης για το περιβάλλον Pekeris. Παρατηρείστε τον αριθμό των μηδενισμών της ιδιοσυνάρτησης (εκτός από την θέση $z=0$) που είναι κατά ένα μικρότερος της τάξης της ιδιοσυνάρτησης. Η ιδιοσυνάρτηση παρουσιάζει ασυνεχή κλίση στο βάθος $z=h$ λόγω της συνθήκης της παραγώγου στην εν λόγω διεπιφάνεια.

3.3.2 Αναπαράσταση της λύσης

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης Helmholtz στο μη φραγμένο χωρίο του προβλήματος μέσω των ιδιοσυναρτήσεων ενός αντίστοιχου προβλήματος «βάθους» θα πρέπει να γίνει πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις τόσο του συνεχούς όσο και του διακριτού φάσματος κατά την 3.3.14. Όμως, από το πρόβλημα που τέθηκε κατά τον υπολογισμό των ιδιοσυναρτήσεων u_n , φάνηκε ότι μόνο πεπερασμένες τον αριθμό ιδιοτιμές προέκυψαν και επομένως μόνο το διακριτό φάσμα υπολογίστηκε. Αυτό ήταν συνέπεια του ότι αποκλείσαμε από τη λύση τιμές του λ που θα μας έδιναν γ_2 πραγματικό ($\lambda < k_2^2$) ερμηνεύοντας με τον τρόπο αυτό την απαίτηση της συνθήκης για την συμπεριφορά της λύσης για $z \rightarrow \infty$. Στην πραγματικότητα ο περιορισμός αυτός μας δίνει το διακριτό φάσμα των ιδιοτιμών και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ονομάζονται κανονικές (normal modes). Εάν διατηρήσουμε την συνθήκη για αποκλίνον κύμα για μεγάλα z , τότε δεν υπάρχει κάτω περιορισμός στο λ . Όμως το φάσμα των ιδιοτιμών για $\lambda < k_2^2$ μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συνεχές και αντιστοιχεί στις ιδιοσυναρτήσεις $u(z, \lambda)$ της 3.3.14⁸. Όπως αναφέρθηκε ήδη, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε λύσεις που αντιστοιχούν σε κύματα που εξασθενούν πολύ γρήγορα μακριά από τη πηγή. Έτσι η συνεισφορά του συνεχούς φάσματος είναι αμελητέα, ιδιαίτερα σε μεγάλα r και αντιπροσωπεύει ενέργεια που χάνεται στο πυθμένα. Επομένως, στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για το ακουστικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λύση του προβλήματος που δίδεται με αναπαράσταση πάνω στο διακριτό φάσμα των ιδιοσυναρτήσεων είναι πολύ κοντά στην πραγματική και να γράψουμε :

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z) . \quad (3.3.31)$$

⁸ Παραπέμπουμε και πάλι στα βιβλία των Zauderer και Jensen et al. για πιο αυστηρή αντιμετώπιση του προβλήματος

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Helmholtz στο χωρίο $0 \leq z < \infty$,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0), \quad (3.3.32)$$

έχουμε :

$$\sum_{n=1}^N u_n \frac{d^2 A_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N u_n \frac{dA_n}{dr} + \sum_{n=1}^N A_n \frac{d^2 p}{dz^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \sum_{n=1}^N A_n \frac{du_n}{dz} + k^2 \sum_{n=1}^N u_n A_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0). \quad (3.3.33)$$

Με στόχο την αξιοποίηση της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέρη με $(1/\rho)u_m$ και ολοκληρώνουμε σε όλο το πεδίο ορισμού του προβλήματος παίρνοντας :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_m \sum_{n=1}^N u_n \frac{d^2 A_n}{dr^2} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_m \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N u_n \frac{dA_n}{dr} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_m \sum_{n=1}^N A_n \frac{d^2 u_n}{dz^2} dz - \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_m \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} \sum_{n=1}^N A_n \frac{du_n}{dz} dz + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_m k^2 \sum_{n=1}^N u_n A_n dz = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_n \delta(r) \delta(z - z_0) dz \quad (3.3.34)$$

και αξιοποιώντας την 3.3.13, τη συνθήκη ορθογωνιότητας και τις ιδιότητες των συναρτήσεων δέλτα, καταλήγουμε στην

$$\frac{d^2}{dr^2} A_m + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} A_m + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r} \frac{1}{\rho(z_0)} \delta(r) u_m(z_0). \quad (3.3.35)$$

Προσέξτε ότι ως αποτέλεσμα των ως άνω ιδιοτήτων, οι τιμές της ιδιοσυνάρτησης και της πυκνότητας στο δεύτερο μέρος δίδεται στο βάθος της πηγής και επομένως $\rho(z_0) = \rho_1$, ενώ και $u_m(z_0) = u_m^{(1)}(z_0)$ εάν η ακουστική πηγή βρίσκεται στο νερό.

Άρα,

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] + \lambda_m \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r), \quad (3.3.36)$$

που είναι η γνωστή μας εξίσωση για τη συνάρτηση Green που ορίζεται από το λόγο

$$\left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] :$$

Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r). \quad (3.3.37)$$

Άρα

$$A_m = \frac{i}{4\rho_1} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r) u_m^{(1)}(z_0) \quad (3.3.38)$$

και

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) u_n^{(1)}(z_0) u_n(z), \quad (3.3.39)$$

όπου έχουμε κάνει αντικατάσταση του δείκτη m με τον δείκτη n .

Παρατηρούμε ότι η μορφή της αναπαράστασης είναι παρόμοια με εκείνη του απλού κυματοδηγού (βλ. 3.2.75) με την βασική διαφορά στη μέγιστη τάξη του αθροίσματος που είναι τώρα N ενώ εμφανίζεται για πρώτη φορά και η πυκνότητα του στρώματος που φιλοξενεί την πηγή.

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ασυμπτωτική έκφραση για την συνάρτηση Hankel και να πάρουμε :

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N u_n^{(1)}(z_0) u_n(z) \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\lambda_n} r}} e^{i(\sqrt{\lambda_n} r - \pi/4)} \quad (3.3.40)$$

Οι ασυμπτωτικές εκφράσεις της Hankel μας δίδουν σημαντική πληροφορία για την ποιοτική συμπεριφορά του ακουστικού πεδίου μακριά από την πηγή. Έτσι μπορούμε να δούμε για παράδειγμα ότι το μέτρο της πίεσης μειώνεται με την τετραγωνική ρίζα της απόστασης από την πηγή. Αυτή η συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική της διάδοσης σε ένα «κυλινδρικό» κυματοδηγό.

Ο κυματοδηγός Pekeris αποτελεί την απλούστερη μορφή ενός «ρεαλιστικού» κυματοδηγού για ακουστικές εφαρμογές στο περιβάλλον της γης μας. Χρησιμοποιείται ευρύτατα στην αναλυτική μελέτη μαθηματικών μοντέλων που εφαρμόζονται για να αντιμετωπισθούν διαφορετικά προβλήματα κυματικής διάδοσης. Στο θαλάσσιο περιβάλλον, η βασική υπόθεση για σταθερή ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό δεν μπορεί να θεωρηθεί στις περισσότερες περιπτώσεις ως ικανοποιητική, αλλά υπάρχει η δυνατότητα επέκτασης της θεωρίας που αναφέρθηκε προηγουμένως και στην περίπτωση αυτή, οπότε η μόνη διαφορά που θα έχουμε θα είναι η αριθμητική έκφραση της λύσης του προβλήματος που διέπεται από τις εξισώσεις 3.3.15. Η επέκταση αυτή θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

3.3.3 Φυσική ερμηνεία της λύσης της ακουστικής εξίσωσης στο περιβάλλον PEKERIS

Είναι ενδιαφέρον στο σημείο αυτό να δούμε τη φυσική σημασία της λύσης της ακουστικής εξίσωσης στο περιβάλλον PEKERIS.

Τα ακουστικά κύματα μπορεί να θεωρηθεί ότι εκπέμπονται από την πηγή με τη μορφή ακουστικών ακτίνων (rays). Η ακουστική διάδοση περιγραφόμενη με τη μορφή ακουστικών ακτίνων αποτελεί ιδιαίτερο κεφάλαιο της κυματικής θεωρίας που χαρακτηρίζεται «θεωρία ακτίνων» (ray theory). Στοιχεία από τη θεωρία ακτίνων σε σχέση με τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα έχουν παρουσιαστεί στο μάθημα «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία» και δεν θα αναφερθούν αναλυτικά εδώ.

Θα γίνει ωστόσο αναφορά σε φυσικές έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία ιδιομορφών.

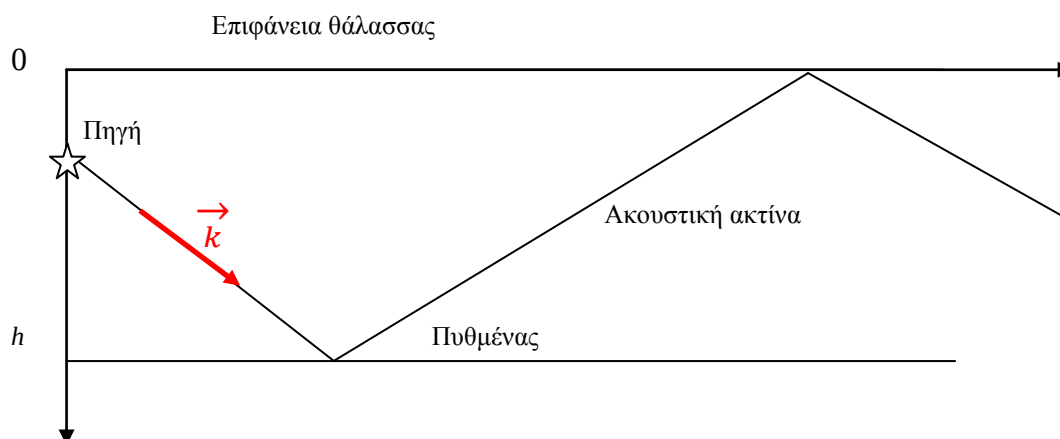
Ακουστική ακτίνα είναι μία καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας ο αριθμός κύματος λαμβανόμενος ως διάνυσμα είναι εφαπτόμενος. Μία σημειακή αρμονική πηγή εκπέμπει ενέργεια προς όλες τις κατευθύνσεις και συνεπώς εκπέμπει ακτίνες προς όλες τις κατευθύνσεις. Εάν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο μέσο διάδοσης της ακουστικής ενέργειας είναι σταθερή (c_1), κάθε ακτίνα αντιστοιχεί σε ένα αριθμό κύματος που έχει σταθερό μέτρο $\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c_1}$ και συνεπώς η ακτίνα είναι ευθεία γραμμή (Σχήμα 3.8).

Σημειώνουμε εν προκειμένω ότι η αναπαράσταση της διάδοσης του ήχου μέσω ακτίνων είναι συνυφασμένη με την έννοια του «επίπεδου» κύματος το οποίο είναι ένα κύμα το οποίο έχει σταθερή «φάση» σε ένα επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στον αριθμό κύματος και επομένως σε κάθε ακουστική ακτίνα. Κάθε ακουστική ακτίνα λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί ως ο φορέας ενός επίπεδου ακουστικού κύματος.

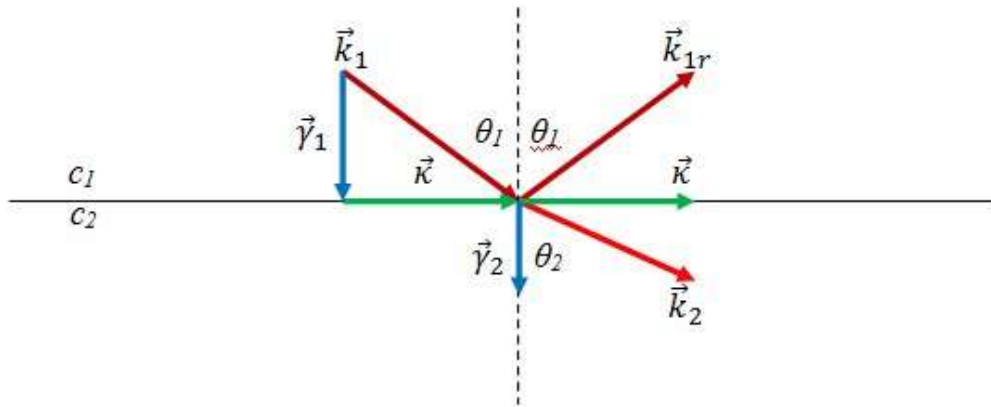
Καθώς οι ακτίνες διαδίδονται σε ένα κυματοδηγό έρχονται σε επαφή με τα σύνορά του και υφίστανται ανάκλαση. Από το Νόμο του Snell γνωρίζουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης θ_1 ενός επίπεδου κύματος είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης ενώ υπάρχει η πιθανότητα διάδοσης του ήχου σε δεύτερο κυματικό μέσο ταχύτητας διάδοσης ήχου c_2 (όπως ο πυθμένας στο περιβάλλον Pekeris), οπότε ορίζεται και γωνία διάδοσης θ_2 , το μέτρο της οποίας ακολουθεί το νόμο του Snell σύμφωνα με τον οποίο

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \quad (3.3.41)$$

Στο σχήμα 3.9 βλέπουμε τα διανύσματα του αριθμού κύματος για τον προσπίπτοντα, τον ανακλώμενο και το διαδιδόμενο κυματισμό. Στο σχήμα σημειώνονται επίσης οι συνιστώσες του αριθμού κύματος. Προσέξτε ότι από το Νόμο του Snell η οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος, που στο σχήμα σημειώνεται με $\vec{k}$, παραμένει σταθερή σε μέτρο διεύθυνση και φορά.



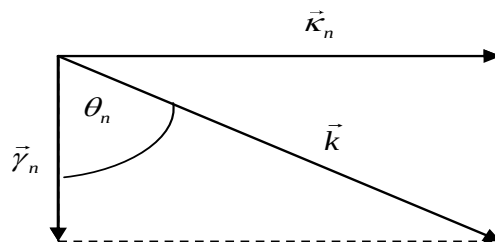
Σχήμα 3.8 Ηχητική ακτίνα σε θαλάσσιο περιβάλλον σταθερής ταχύτητας c_1



Σχήμα 3.9 Τα διανύσματα των αριθμών κύματος στην περίπτωση ανάκλασης κύματος σε οριζόντια διεπιφάνεια και διάδοσης στο επόμενο μέσο

Στην επιφάνεια της θάλασσας έχουμε πάντα ανάκλαση του ήχου χωρίς να θεωρείται διάδοση στον αέρα. Αυτό συμβαίνει επειδή η πυκνότητα του αέρα είναι πολύ μικρή σε σχέση με εκείνη του νερού και προσεγγιστικά μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι δεν υπάρχει διάδοση ακουστικής ενέργειας από το νερό στον αέρα. Αυτό βέβαια δεν είναι ακριβές, αλλά η μοντελοποίηση της ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα έχει δείξει ότι η διάδοση του ήχου από το νερό στον αέρα ελάχιστα επηρεάζει το ακουστικό πεδίο στο νερό και για το λόγο αυτό σε όλες πρακτικά τις εφαρμογές τίθεται ως οριακή συνθήκη στην επιφάνεια της θάλασσας ο μηδενισμός της ακουστικής πίεσης.

Σε ένα απλό κυματοδηγό, δεν υπάρχει διάδοση σε δεύτερο μέσο αφού ο πυθμένας θεωρείται ως τέλεια ανακλαστικός και όλη η ακουστική ενέργεια παραμένει στο μέσο κυματικής διάδοσης. Ο συνδυασμός της ελεύθερης επιφάνειας στο νερό και εκείνης της τέλεια ανακλαστικής επιφάνειας στον πυθμένα οδηγούν τη λύση της ακουστικής εξίσωσης μέσω αναπτύγματος ιδιοσυναρτήσεων σε άπειρη σειρά πάνω σε διακριτές ιδιοσυναρτήσεις με αντίστοιχες ιδιοτιμές. Είδαμε η τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών αντιστοιχεί στην οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος. Είδαμε επίσης ότι για να υπάρχει κυματικό φαινόμενο οι ιδιοτιμές πρέπει να είναι θετικές, ώστε η ρίζα τους να είναι πραγματικός αριθμός κ_n . Οι θετικές ιδιοτιμές στο εν λόγω πρόβλημα ορίζουν επομένως τις ακτίνες που συνεισφέρουν στο κυματικό φαινόμενο. Κάθε ακτίνα που εκπέμπεται από την πηγή με γωνία ως προς την κατακόρυφο ίση με $\theta_n = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{k} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\kappa_n}{k} \right)$ συνεισφέρει στο κυματικό φαινόμενο.



Σχήμα 3.10 Οι συνιστώσες του αριθμού κύματος και η γωνία εκπομπής της ακτίνας που αντιστοιχεί στην n στη ιδιοτιμή.

Οι υπόλοιπες ακτίνες δεν μεταφέρουν ακουστική ενέργεια μακριά από την πηγή !

Στο περιβάλλον Pekeris τώρα, είδαμε ότι σε εφαρμογή της θεωρίας των κανονικών ιδιομορφών και αγνοώντας το συνεχές φάσμα του προβλήματος Sturm-Liouville που ορίζεται από την εξίσωση «βάθους» ο αριθμός των κανονικών ιδιομορφών είναι πεπερασμένος. Είδαμε επίσης, ότι οι κανονικές ιδιοτιμές περιορίζονται στο διάστημα $k_2^2 < \lambda_n < k_1^2$. Η δεύτερη ανισότητα αντιστοιχεί στην απαίτηση να έχουμε ανάλυση του αριθμού κύματος σε πραγματικές συνιστώσες στο νερό. Η πρώτη ανισότητα χρειάζεται μια πρόσθετη φυσική διερεύνηση.

Η απαίτηση για να έχουμε $k_2^2 < \lambda_n$ (ή $k_2 < \kappa_n$) προέκυψε από την συνθήκη της συμπεριφοράς της ιδιοσυνάρτησης τάξης n σε άπειρο βάθος και αντιστοιχεί σε κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος γ_{2n} φανταστική ποσότητα. Υπενθυμίζεται ότι

$$\gamma_{2n} = \sqrt{k_2^2 - \lambda_n} \quad (3.3.42)$$

και συνεπώς η απαίτηση για φανταστική ποσότητα παραπέμπει σε αρνητικό υπόριζο. Τι σημαίνει όμως αυτό για την κυματική διάδοση ;

Μία ακτίνα που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή λ_n προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια νερού πυθμένα με γωνία $\theta_{n1} = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{k_1} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\kappa_n}{k_1} \right)$ (Σχήμα 3.9). Σύμφωνα με το

Νόμο του Snell, η γωνία διάδοσης του ήχου στο δεύτερο μέσο θ_{n2} προκύπτει από τη σχέση $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \theta_{n1}}{\sin \theta_{n2}}$. Αλλά,

$$\theta_{n2} = \sin^{-1} \left(\frac{\kappa_n}{k_2} \right). \quad (3.3.43)$$

Ωστόσο από την απαίτηση $k_2 < \kappa_n$ προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{\kappa_n}{k_2}$ στην 3.3.43 είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Επομένως δεν υπάρχει πραγματική γωνία διάδοσης ήχου στον πυθμένα και η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε «ολική ανάκλαση» (βλ. Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία).

Οι ακουστικές ακτίνες λοιπόν που συνεισφέρουν στο ακουστικό πεδίο στο νερό αντιστοιχούν σε αυτές που υφίστανται ολική ανάκλαση στον πυθμένα. Η γωνία πρόσπτωσης στον πυθμένα για αυτές τις ακτίνες είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία για τον εν λόγω πυθμένα, η οποία ορίζεται από τη σχέση.

$$\theta_{cr} = \sin^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \quad (3.3.44)$$

Βλέπουμε ότι για να υπάρχει κρίσιμη γωνία θα πρέπει να ισχύει $c_1 < c_2$, κάτι που το είδαμε ήδη στο Κεφάλαιο 3.3.1.

Ο πυθμένας, σύμφωνα με την ως άνω θεώρηση, δέχεται ακουστική ενέργεια που αποσβέννεται γρήγορα και δεν δημιουργεί ακουστικά κύματα .

3.4 Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη συναρτήσει του z ταχύτητα διάδοσης ήχου. Πρόβλημα Π3

Θεωρούμε τώρα την γεωμετρία του προβλήματος Π2 με μία τροποποίηση που έγκειται στο ότι ο αριθμός κύματος k μεταβάλλεται μόνο με το z , $k = k(z)$ μέσα στο πρώτο στρώμα. (Σχήμα 3.11).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το πρόβλημα Π2 θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές από τη λύση του προβλήματος βάθους.

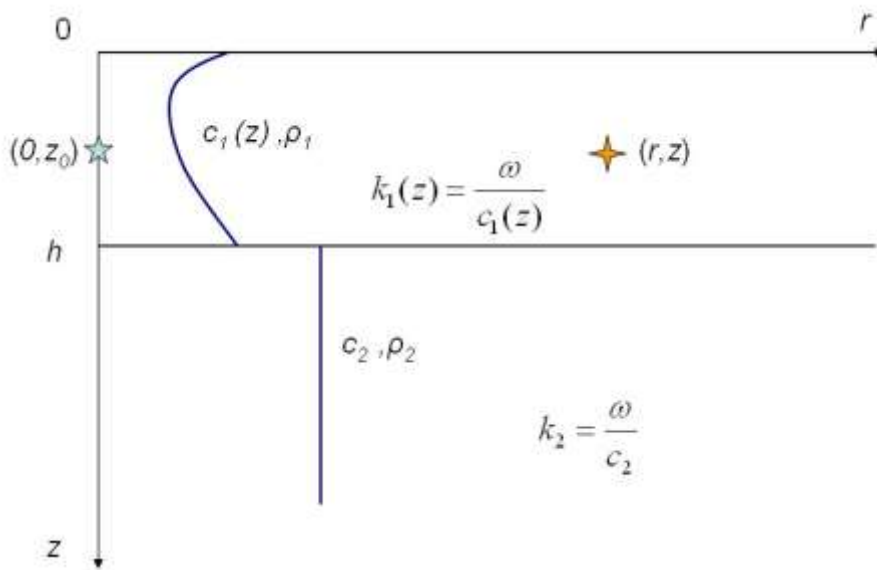
$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{du}{dz} \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho(z)} - \frac{\lambda}{\rho(z)} \right) u = 0, \quad (3.4.1)$$

όπου $u(z) : [0, \infty)$ με :

$$u(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ u^{(2)}(z) & \text{για } z \geq h \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\omega}{c_1(z)} = k_1(z) & \text{για } 0 \leq z < h \\ \frac{\omega}{c_2} = k_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$



Σχήμα 3.11 Σχηματική παράσταση περιβάλλοντος στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό μεταβάλλεται με το βάθος

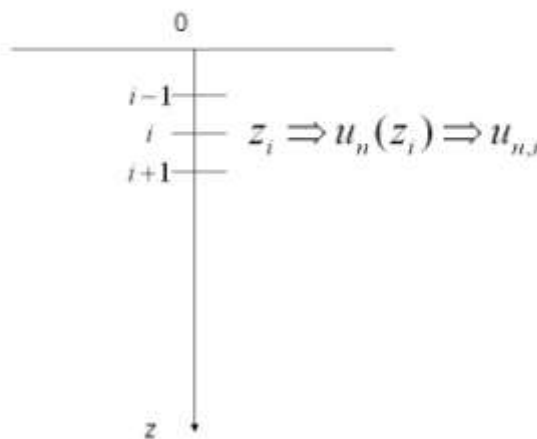
Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφοροποίηση σε σχέση με το περιβάλλον Pekeris είναι στην μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου με το βάθος στο νερό και για τον λόγο αυτό ο αριθμός κύματος k μεταβάλλεται με το z στο διάστημα $[0-h]$. Οι οριακές συνθήκες Σ.1-Σ.4 παραμένουν οι ίδιες και επομένως εκείνο που απομένει να γίνει είναι ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων. Εδώ η δυσκολία βρίσκεται στο ότι η μεταβολή του k με το z με κάποιο γενικό νόμο μεταβολής, που είναι βέβαια και η συνηθισμένη περίπτωση, δεν μας επιτρέπει έκφραση της λύσης σε αναλυτική μορφή στο διάστημα $[0-h]$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά στο διάστημα αυτό ενώ για το διάστημα $[h-\infty)$ ισχύει η αναλυτική λύση που είδαμε (3.3.17) αφού δεν αλλάζει κάτι ως προς το πρόβλημα Π2. Στη συνέχεια θα δοθεί μία μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που με αρκετή αποδοτικότητα προσεγγίζει τη λύση μας.

3.4.1 Ένα σχήμα διαφορών για την λύση της εξίσωσης βάθους με μεταβαλλόμενο συναρτήσει του z , αριθμό κύματος.

Το πρόβλημα "βάθους" που ορίζεται από την εξίσωση 3.4.1 και τις οριακές συνθήκες Σ.1-Σ.4 μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με την εφαρμογή ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών. Στα επόμενα αλλάζουμε τον συμβολισμό του βάθους στην θάλασσα από h σε d ώστε να διατηρήσουμε τον τυπικό συμβολισμό των ισοδιαστημάτων ενός αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών.

Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι ταυτόχρονα με τις ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να υπολογιστούν και οι ιδιοτιμές του προβλήματος και για το λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα συνδυασμένο σχήμα.

Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν, ότι γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές λ_n . Έστω επίσης ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0,d]$ σε I ισοδιαστήματα μήκους h όπως στο σχήμα 3.12. Τότε στη θέση $z = z_i = (i-1)h$ (εδώ το i αντιστοιχεί σε δείκτη και όχι στην φανταστική μονάδα), η ακριβής λύση του προβλήματος θα είναι $u(z_i)$ ενώ σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε ένα σχήμα διαφορών για τον υπολογισμό μιας καλής προσέγγισης u_i της $u(z_i)$, $i=1,2,\dots,I+1$.



Σχήμα 3.12 Διακριτοποίηση ως προς το βάθος για την εφαρμογή σχήματος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του προβλήματος βάθους

Η αντικατάσταση των παραγώγων με αλγεβρικές διαφορές είναι το πρώτο βήμα για την υλοποίηση της μεθόδου.

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα Π2 θα θεωρήσουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u^{(*)}}{dz^2} + (k^2 - \lambda) u^{(*)} = 0 \quad , \quad * = 1, 2 \quad , \quad (3.4.2)$$

που διέπει το πρόβλημα βάθους για σταθερές πυκνότητες στο νερό και στον πυθμένα. Υπενθυμίζουμε ότι το εν λόγω πρόβλημα είναι πρόβλημα ιδιοτιμών και συνεπώς οι συναρτήσεις που θα υπολογιστούν αριθμητικά αναφέρονται σε κάποια τάξη n . Συνεπώς στόχος μας είναι ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ και με βάση τα γνωστά από την αριθμητική λύση των διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές των προσεγγίσεων $u_{n,i}$ της $u_n(z_i)$.

Σύμφωνα με τα γνωστά από την αριθμητική λύση διαφορικών εξισώσεων και από τις σχέσεις διαφορών, η δεύτερη παράγωγος της $u_n(z_i)$ προσεγγίζεται με την σχέση:

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2}(z_i) \approx \frac{u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}}{h^2} \quad , \quad (3.4.3)$$

που όπως είναι γνωστό έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς h

Αντικαθιστώντας στην 3.4.2 παίρνουμε :

$$\frac{u_{n,i+1}^{(1)} - 2u_{n,i}^{(1)} + u_{n,i-1}^{(1)}}{h^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] u_{n,i}^{(1)} = 0 \quad , \quad (3.4.4)$$

ή

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left[2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c(z_i)} \right)^2 - \lambda_n \right] u_{n,i}^{(1)} \right] - u_{n,i+1}^{(1)} \quad . \quad (3.4.5)$$

Η 3.4.5 είναι μία άμεση αναδρομική σχέση. Με γνωστές τις τιμές των $u_{n,i+1}$ και $u_{n,i}$ παίρνουμε το $u_{n,i-1}$. Η αναδρομική σχέση γράφεται με τον τρόπο αυτό μια και στην εφαρμογή μας στο συγκεκριμένο πρόβλημα εξυπηρετεί να ξεκινήσει κανείς από τη διεπιφάνεια στη θέση $z=d$ και στη συνέχεια να υπολογίσει τις τιμές μέχρι το $z=0$ μειώνοντας τον δείκτη. Ένας ισχυρός λόγος γι' αυτό είναι η γνώση της λύσης μας για $z>d$ (άρα και για $z=d$) που μπορεί να γραφεί (δείτε και σχέση 3.3.17) :

$$u_n^{(2)}(z) = A' e^{i\gamma_2(z-h)} = A' \exp \{-b_{2n}(z-h)\} \quad (3.4.6)$$

Δεδομένου ότι $b_{2n} = \sqrt{\lambda_n - k_2^2} = \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2}$, αλλάζοντας το όρισμα από $z-h$ σε z , παίρνουμε (προσοχή στην αλλαγή του συντελεστή από A' σε A):

$$u_n^{(2)}(z) = A \exp \left\{ -z \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.4.6a)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια επιβάλλουν :

$$u_n^{(1)}(d) = u_n^{(2)}(d) \quad (3.4.7)$$

και

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du_n^{(2)}}{dz}(d). \quad (3.4.8)$$

Δεδομένου ότι ο συντελεστής A της αναπαράστασης της ιδιοσυνάρτησης στο δεύτερο μέσον (πυθμένας) θα υπολογιστεί τελικά από την συνθήκη οροκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων και για διευκόλυνση του αριθμητικού σχήματος, έχουμε την δυνατότητα να δώσουμε σε αυτόν σε πρώτη φάση μία αυθαίρετη τιμή η οποία μπορεί να διορθωθεί στο τέλος. Έτσι δεχόμαστε κατ'αρχήν ότι

$$u_n^{(2)}(d) = 1 \quad (3.4.9)$$

Επομένως, κατά την 3.4.7 έχουμε $u_{n,l+1} = u_n^{(1)}(d) = 1$.

Από την εφαρμογή της συνθήκης 3.4.8 και την 3.4.9 έχουμε:

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -A \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left\{ -d \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.4.10)$$

$$\text{Θέτοντας } \frac{\rho_1}{\rho_2} = R \quad \text{και} \quad B_n = \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right],$$

γράφουμε:

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -R B_n^{1/2}. \quad (3.4.11)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την $u_n^{(1)}(z)$ σε σειρά Taylor:

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h \frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(z) - \frac{h^3}{6} \frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(z) + O(h^4) \quad (3.4.12)$$

Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα στη θέση $z=d$ και παίρνουμε από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = - \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)} \right]^2 - \lambda_n \right] u_n^{(1)}(d) \quad (3.4.13)$$

Παραγωγίζοντας ως προς z και παίρνοντας πρώτη τάξης προσέγγιση για την παράγωγο της ποσότητας στην αγκύλη έχουμε:

$$\frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx - \left[\frac{\omega^2}{c_1^2(d)} - \lambda_n \right] \frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) - \frac{\omega^2}{h} \left[\frac{1}{c_1^2(d)} - \frac{1}{c_1^2(d-h)} \right] u_n^{(1)}(d) . \quad (3.4.14)$$

$$\text{Θέτουμε } \frac{\omega^2}{c_1^2(d)} - \lambda_n = C_n \quad \text{και} \quad \frac{\omega^2}{c_1^2(d-h)} - \lambda_n = D_n$$

και παίρνουμε:

$$\frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C_n u_n^{(1)}(d), \quad \frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx C_n R B_n^{1/2} - \frac{1}{h} [C_n - D_n] u_n^{(1)}(d) .$$

Αλλά αφού $u_n^{(1)}(d) = 1$, έχουμε

$$\frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C_n, \quad \frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx C_n R B_n^{1/2} - \frac{1}{h} [C_n - D_n] .$$

Αντικαθιστώντας στην 3.4.12 παίρνουμε:

$$u_n^{(1)}(d-h) \approx 1 + h R B_n^{1/2} - \frac{h^2}{2} C_n - \frac{h^3}{6} \{ C_n R B_n^{1/2} - \frac{1}{h} [C_n - D_n] \} = \quad (3.4.15)$$

$$= 1 + h R B_n^{1/2} - \frac{h^2}{3} C_n - \frac{h^2}{6} D_n - \frac{h^3}{6} C_n R B_n^{1/2} . \quad (3.4.15\alpha)$$

Επομένως, το αριθμητικό μας σχήμα γίνεται:

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \{ 2 - h^2 [(\frac{\omega}{c_i})^2 - \lambda_n] \} u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, I \quad (3.4.16)$$

$$\text{με} \quad u_{n,I+1}^{(1)} = 1 \quad (3.4.16\alpha)$$

$$\text{και} \quad u_{n,I}^{(1)} = 1 + h R B_n^{1/2} - \frac{h^2}{3} C_n - \frac{h^2}{6} D_n - \frac{h^3}{6} C_n R B_n^{1/2} . \quad (3.4.16\beta)$$

Έτσι, εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες συνεργασίας προσδιορίζουμε τις δύο αρχικές τιμές που μας δίνουν τις προσεγγίσεις των ιδιοσυναρτήσεων.

Είναι αυτονόητο ότι το παραπάνω σχήμα δεν είναι το μοναδικό. Μπορεί να εισαγάγει κανείς σχήματα και άλλης μορφής ή ακρίβειας. Το προτεινόμενο ως άνω σχήμα έχει ικανοποιητική ακρίβεια (δευτέρας τάξης).

3.4.2 Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών

Χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες θα περιγράψουμε μια μέθοδο υπολογισμού των ιδιοτιμών που βασίζεται στο σχήμα που προαναφέραμε.

Έστω ότι στο σχήμα εφαρμόζεται για μία τυχούσα τιμή λ , που δεν είναι κατ'ανάγκην ιδιοτιμή του προβλήματος. Τότε θα μας δώσει μία τιμή στην επιφάνεια της θάλασσας $u_{n,1}^{(1)}$ που θα είναι γενικά διάφορη του μηδενός. Στο συνεχές πρόβλημα, εάν το λ ήταν η ιδιοτιμή τάξης n (λ_n) τότε το $u_n^{(1)}(0)$ θα έπρεπε να είναι μηδέν 0 υπακούγοντας στην οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Περιμένουμε λοιπόν ότι και η τιμή $u_{n,1}^{(1)}$ που θα υπολογιστεί για μια σωστή ιδιοτιμή λ_n θα είναι πολύ κοντά στο 0, (για την ακρίβεια θα έχει μία τιμή $\varepsilon < <$). Πάντως στη γενική περίπτωση θα ισχύει :

$$u_1^{(1)} = f(\lambda).$$

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος μπορούν επομένως να υπολογιστούν ως οι τιμές λ_n που μηδενίζουν τη συνάρτηση $f(\lambda)$.

Η εξίσωση

$$f(\lambda_n) = 0, \quad (3.4.17)$$

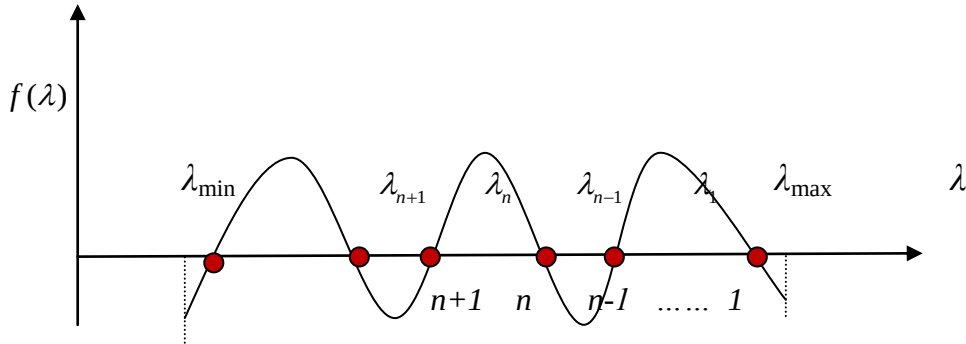
μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως η «χαρακτηριστική εξίσωση» του διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών όπως το ορίσαμε παραπάνω.

Ας δούμε ωστόσο πως συμπεριφέρεται η $f(\lambda)$. Το σχήμα 3.14 δίδει ποιοτικά τη γραφική της παράσταση

Από τη μέχρι τώρα θεώρηση γνωρίζουμε ότι τα επιτρεπτά λ_n θα βρίσκονται στο διάστημα $\lambda_{\min} < \lambda_n < \lambda_{\max}$, όπου

$$\lambda_{\min} = \frac{\omega^2}{c_2^2} \quad \text{και} \quad \lambda_{\max} = \frac{\omega^2}{c_{1\min}^2}.$$

Όπως παρατηρεί κανείς, εδώ έχουμε αντικαταστήσει το c_1 της σχέσης 3.3.30 με το $c_{1\min}$. Αυτό συμβαίνει γιατί, κυματικό φαινόμενο στο νερό έχουμε, για συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής, όταν μια κυματομορφή (mode) μπορεί να διαδοθεί τουλάχιστον σε μία περιοχή της υδάτινης στήλης, δηλαδή ακόμη και σε ένα συγκεκριμένο βάθος (z^*) μόνο. Για την περιοχή αυτή (ή το συγκεκριμένο βάθος μόνο), η κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος γίνεται πραγματικός αριθμός $\gamma_n(z) = \sqrt{k_1^2(z) - \lambda_n}$. Επομένως, για ταχύτητα διάδοσης του ήχου που μεταβάλλεται με το βάθος, αρκεί οι ιδιοτιμές να είναι μικρότερες από τον μέγιστο αριθμό κύματος στο νερό (που αντιστοιχεί σε ελάχιστη ταχύτητα διάδοσης) ώστε να έχουμε κυματικό φαινόμενο.



Σχήμα 3.13 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\lambda)$. Οι αριθμοί $n, n-1, \dots$ αντιστοιχούν στις αντίστοιχες τάξεις των ιδιοτιμών. (Τυχαία καμπύλη που αντιπροσωπεύει τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(\lambda)$).

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές που δίδουν κυματικό φαινόμενο στο νερό) και αποσβενύμενο πεδίο στον πυθμένα ονομάζονται κανονικές ιδιοτιμές (normal modes). Επίσης η ιδιοτιμή μικρότερης τάξης είναι μεγαλύτερη από αυτή μεγαλύτερης τάξης.

Γνωρίζουμε λοιπόν το διάστημα στο οποίο θα ψάξουμε για τις ρίζες της $f(\lambda)$. Η εξίσωση $f(\lambda)=0$ είναι βέβαια μη γραμμική εξίσωση. Η μορφή όπως της γραφικής παράστασης της $f(\lambda)$ (σχήμα 3.13) μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία απλή αριθμητική μέθοδο για την επίλυσή της όπως π.χ. την μέθοδο της τέμνουσας στην οποία και θα αναφερθούμε στη συνέχεια ως παράδειγμα και μόνο.

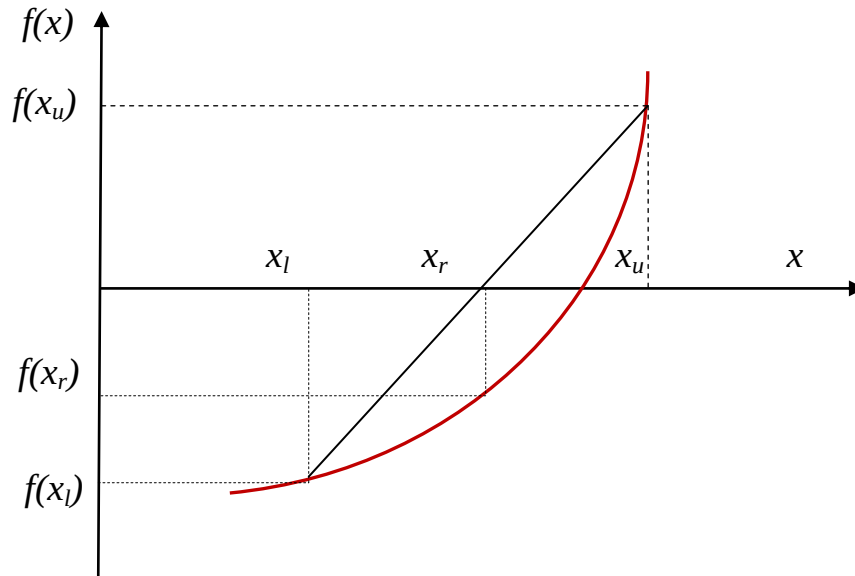
Χρησιμοποιώντας το σχήμα 3.14 υπενθυμίζουμε την αναδρομική σχέση που μας δίνει μια προσεγγιστική λύση της $f(x)=0$ με την ως άνω μέθοδο :

Εάν εντοπίσουμε δύο τιμές x_l και x_u που μας δίνουν $f(x_l)f(x_u)<0$ τότε η προσεγγιστική λύση x_r της $f(x)=0$ είναι:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \quad (3.4.18)$$

Εάν $f(x_r) < \varepsilon$ όπου ε ένας μικρός αριθμός που τον καθορίζουμε έτσι ώστε να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στους υπολογισμούς μας, τότε η λύση μας θεωρείται ικανοποιητική. Στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει έχουμε πολλές λύσεις και θα πρέπει να τις υπολογίσουμε όλες. Το βασικό μας κριτήριο είναι ο αριθμός των μηδενισμών της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης που θα πρέπει να είναι ακριβώς $n-1$ για κάθε τάξη n όπως αναφέρθηκε και στο πρόβλημα Sturm-Liouville για τις κανονικές ιδιοσυναρτήσεις. Θα πρέπει συνεπώς να εξασφαλίσουμε ότι έχουμε εξαντλήσει όλες τις αποδεκτές ρίζες της εξίσωσης στο διάστημα ελέγχου.

Μία διαδικασία εντοπισμού των λύσεων x_r έχει ως εξής : Εντοπίζουμε δύο σημεία x_l και x_u ώστε $f(x_l)f(x_u)<0$. Υπολογίζουμε το $f(x_r)$ και ελέγχουμε εάν ικανοποιεί το κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου (δηλαδή $f(x_r)<\varepsilon$). Εάν ναι, σταματάμε την επανάληψη, ελέγχουμε τον αριθμό των μηδενισμών της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης που έχει προκύψει ήδη από το σχήμα των πεπερασμένων διαφορών και ψάχνουμε για την επόμενη ρίζα. Εάν όχι, ελέγχουμε ποιο από τα γινόμενα $f(x_r)f(x_l)$, $f(x_r)f(x_u)$ είναι <0 ώστε να «εγκλωβίσουμε» την ρίζα.



Σχήμα 3.14 Μέθοδος της τέμνουσας (Σχηματική παράσταση)

Τότε το αντίστοιχο x_u ή x_l αντικαθίσταται με το x_r και συνεχίζουμε τη διαδικασία, έως ότου εξαντληθούν όλες οι δυνατές λύσεις της $f(x) = 0$.

Όπως αντιλαμβάνεται κανείς, η μέθοδος αυτή δεν δίνει πάντα καλή ταχύτητα σύγκλισης και παρουσιάζει σημαντικά προβλήματα όταν η $f(x)$ είναι έντονα ταλαντευόμενη συνάρτηση με συχνές και πυκνές διελεύσεις από το 0. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ υψηλές συχνότητες στο πρόβλημα που εξετάζουμε που ισοδυναμεί με μεγάλο αριθμό επιτρεπτών ιδιοτιμών, μπορεί η μέθοδος να μην είναι αποδοτική. Δεν παύει ωστόσο να είναι ικανοποιητική σε χαμηλές συχνότητες.

3.4.3 Κανονικοποίηση

Οι ιδιοσυναρτήσεις όπως υπολογίστηκαν ανωτέρω, βασίστηκαν σε μια αυθαίρετη επιλογή του συντελεστή της $u_n^{(2)}(z)$. Όμως για να χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη έκφραση της λύσης για μοναδιαία διέγερση 3.3.39, οι ιδιοσυναρτήσεις θα πρέπει να αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} u_n^2(z) dz = 1. \quad (3.4.19)$$

που στην περίπτωση μας (δύο στρώματα) γράφεται:

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} u_n^{(1)2}(z) dz + \int_d^\infty \frac{1}{\rho_2} u_n^{(2)2}(z) dz = 1. \quad (3.4.20)$$

Η τυχαία επιλογή του συντελεστή της $u_n^{(2)}(z)$, όπως μπορεί να διαπιστώσει πολύ εύκολα κανείς, επηρεάζει μόνο το πλάτος της ιδιοσυνάρτησης. Έτσι το ολοκλήρωμα 3.4.20 θα πάρει μια τιμή N_n^2 που θα είναι εν γένει διάφορη του 0 για ιδιοσυναρτήσεις $\bar{u}_n(z)$ μη κανονικοποιημένες.

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} \bar{u}_n^{(1)2}(z) dz + \int_d^\infty \frac{1}{\rho_2} \bar{u}_n^{(2)2}(z) dz = N_n^2. \quad (3.4.21)$$

Εάν τώρα διαιρέσουμε τις υπολογισθείσες με την αριθμητική μέθοδο ιδιοσυναρτήσεις $\bar{u}_n(z)$ με N_n , παίρνουμε το ορθοκανονικό σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων που θέλουμε για την χρήση της 3.3.39 ή 3.3.40.

$$u_n(z) = \frac{\bar{u}_n(z)}{N_n}. \quad (3.4.22)$$

Αξίζει να προσθέσουμε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται αριθμητικά στο νερό και αναλυτικά στον ημιάπειρο πυθμένα αφού υπάρχει αναλυτική έκφραση του δεύτερου ολοκληρώματος στην 3.4.21.

3.5 Η απώλεια διάδοσης

Πολλές φορές, σε προβλήματα ηχητικής διάδοσης, αντί για την πίεση σε τυχούσα θέση (r, z) υπολογίζεται η απώλεια διάδοσης (transmission loss-TL) που ορίζεται ως:

$$TL(r, z) = -20 \log \frac{|p(r, z)|}{|p_0|} \quad (3.5.1)$$

όπου p_0 είναι μία πίεση αναφοράς που ορίζεται συνήθως ως η πίεση σε απόσταση 1m από μία σημειακή αρμονική πηγή που εκπέμπει σε μη φραγμένο χωρίο. Για να υπολογίσουμε την p_0 επομένως, η οποία είναι μια συμβατική τιμή, θα πρέπει να βρούμε τη λύση του προβλήματος της διάδοσης του ήχου σε μη φραγμένο χωρίο.

Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι η Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (3.5.2)$$

που σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας (όπως στην περίπτωση που εξετάζουμε) και με p εξαρτώμενο μόνο από την απόσταση r γράφεται :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} + k^2 p = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad (3.5.3)$$

Το πρόβλημα συμπληρώνεται βέβαια με μία συνθήκη ακτινοβολίας τύπου Sommerfeld (αποκλίνον κύμα) που μας δίνει λύση:

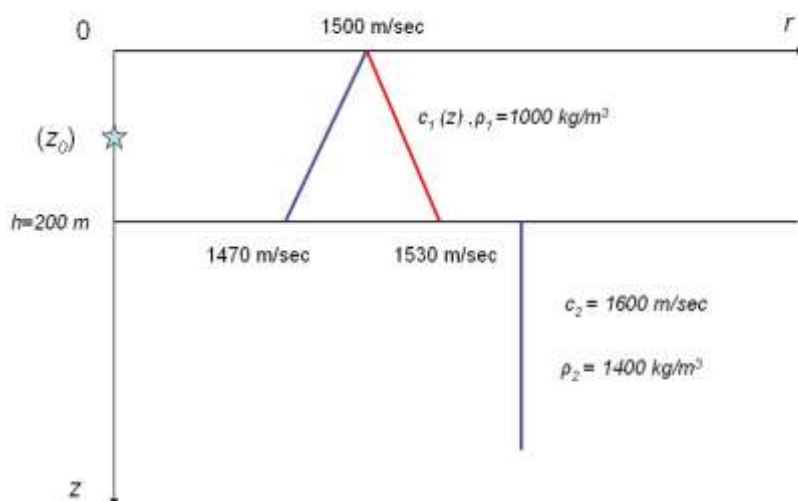
$$p(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad (3.5.4)$$

Έτσι, με βάση την σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει για την απώλεια διάδοσης παίρνουμε :

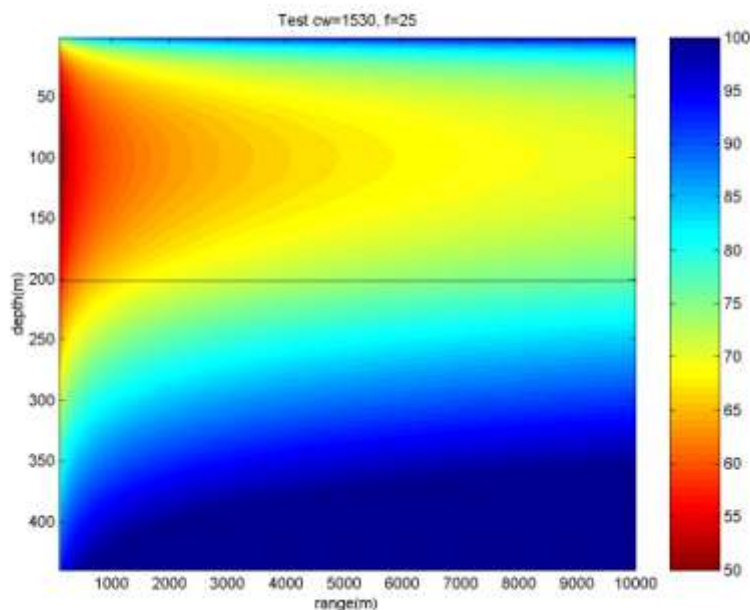
$$|p_0| = \left| \frac{1}{4\pi r} \right| = \frac{1}{4\pi} \quad (3.5.5)$$

Η απώλεια διάδοσης εκφράζεται σε μονάδες dB (decibel) και είναι πρακτικά ένα ενεργειακό μέγεθος που εκφράζει το ποσό της έντασης του ακουστικού πεδίου που μειώνεται καθώς το ακουστικό σήμα διαδίδεται στον κυματοδηγό.

Στα επόμενα σχήματα δίδονται μερικά παραδείγματα υπολογισμού του ακουστικού πεδίου στο βάθος και την απόσταση εκφρασμένου σε μονάδες dB. Τα γραφήματα 3.16-3.18 παρουσιάζουν την απώλεια διάδοσης σε τρόπο ώστε να απεικονίζονται οι περιοχές έντονης απώλειας (συνεπώς χαμηλού ακουστικού πεδίου) με χρώμα μπλέ, σε αντίθεση με τις περιοχές χαμηλής απώλειας (συνεπώς υψηλού ακουστικού πεδίου) με χρώμα ερυθρό. Τα γραφήματα αυτά βασίζονται στα δύο περιβάλλοντα που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.15 από τα οποία, το πρώτο αφορά ηχητικό πεδίο για προφίλ ταχύτητας στο νερό που αυξάνει γραμμικά με το βάθος ενώ το δεύτερο αφορά περιβάλλον με προφίλ που μειώνεται γραμμικά με το βάθος.

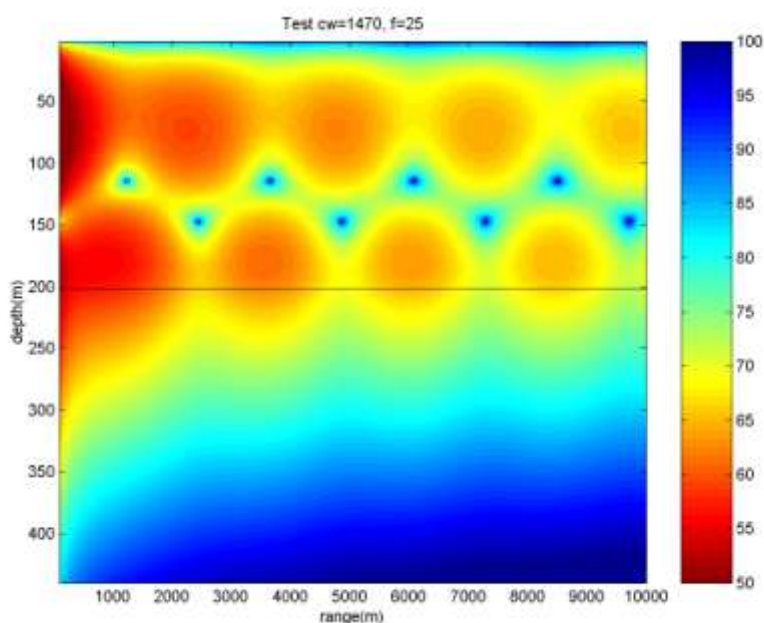


Σχήμα 3.15 Κυματοδηγός Pekeris ρηχής θάλασσας για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου που εμφανίζεται στα επόμενα σχήματα



Σχήμα 3.16 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.15 με γραμμικά αυξανόμενο συναρτήσει του βάθους προφίλ ταχύτητας. Συχνότητα πηγής 25 Hz.

Το Σχήμα 3.16 εμφανίζει χαρακτηριστική περίπτωση διάδοσης του ήχου σε μία ιδιομορφή (mode). Είναι εμφανής η μεγάλη απώλεια διάδοσης στον πυθμένα αλλά και η δυνατότητα ακουστικής διάδοσης στα επιφανειακά τουλάχιστον στρώματα σε κοντά στην πηγή. Βλέπουμε επίσης ότι η ακουστική ενέργεια διαδίδεται ικανοποιητικά σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις στο νερό (μικρή σχετικά απώλεια).

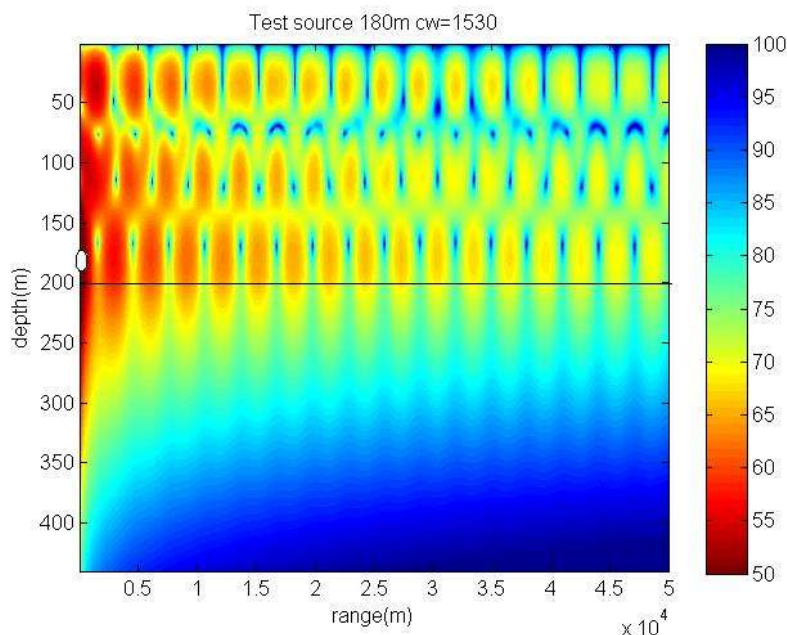


Σχήμα 3.17 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.15 με γραμμικά μειούμενο συναρτήσει του βάθους προφίλ ταχύτητας. Συχνότητα πηγής 25 Hz.

Στο Σχήμα 3.17 παρατηρούμε διάδοση σε δύο ιδιομορφές, ενώ η εισχώρηση της ακουστικής ενέργειας στον πυθμένα είναι περισσότερο σημαντική σε σχέση με την

προηγούμενη περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι το αρνητικό προφίλ ταχύτητας οδηγεί την ενέργεια προς μεγαλύτερα βάθη.

Τέλος στο Σχήμα 3.18 παρουσιάζεται μία περίπτωση διάδοσης με περισσότερες ιδιομορφές. Αφορά και πάλι στο περιβάλλον του Σχήματος 3.15 με το θετικό προφίλ ταχύτητας. Η διαφορά σε σχέση με την περίπτωση του σχήματος 3.16 είναι ότι τώρα πλέον η συχνότητα της πηγής είναι 100 Hz (τρεις ιδιομορφές διάδοσης) ενώ και η πηγή έχει μετακινηθεί σε βάθος 180 μέτρων (κοντά στον πυθμένα).



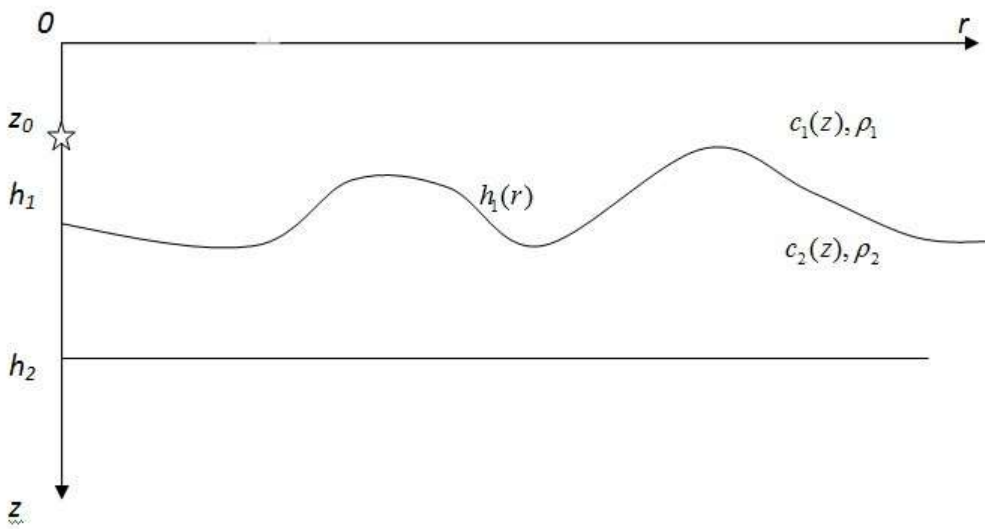
Σχήμα 3.19 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.16 με γραμμικά αυξανόμενο συναρτήσει του βάθους προφίλ ταχύτητας. Συχνότητα πηγής 100 Hz.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι πουθενά στη συζήτησή μας δεν θεωρήσαμε φαινόμενα φυσικής εξασθένησης του ήχου. Η φυσική εξασθένηση έχει ως συνέπεια μετάλλαξη μέρους της ακουστικής ενέργειας και συνεπώς απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση ξεκινώντας από την διατύπωση της ακουστικής εξίσωσης. Ωστόσο έχει αποδειχθεί ότι με πολύ καλά αποτελέσματα μπορούμε να θεωρήσουμε την φυσική εξασθένηση που άλλωστε είναι σχετικά μικρή, ως διαταραχή της κατάστασης που αναφέραμε και να επεκτείνουμε την θεώρηση των προβλημάτων μας λαμβάνοντας υπ' όψιν την δυνατότητα έκφρασης των αντίστοιχων λύσεων μέσω βάσεων συναρτήσεων (ιδιοσυναρτήσεων) που οικοδομούνται μέσω μιγαδικών ιδιοτιμών με αναφορά σε ανάλογα του Sturm-Liouville προβλήματα. Δεν θα προχωρήσουμε ωστόσο περισσότερο στην εν λόγω ανάλυση.

4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

4.1 Γενική περίπτωση

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε ένα περιβάλλον όπου οι παράμετροι που το χαρακτηρίζουν (ταχύτητα ήχου, γεωμετρία συνόρων) μεταβάλλονται και με την απόσταση r σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Ένα περιβάλλον της μορφής αυτής φαίνεται στο σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1 Ένα περιβάλλον μεταβαλλόμενων συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Θα θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον ορίζεται από ένα επίπεδο σύνορο σε βάθος h_2 με οριακή συνθήκη ακλόνητου πυθμένα εκεί, ώστε να κάνουμε άμεση αναφορά στο κανονικό πρόβλημα "Sturm-Liouville". Η πυκνότητα θα θεωρηθεί ανεξάρτητη από την απόσταση, σταθερή σε κάθε στρώμα νερού (Σχήμα 4.1). Δεδομένης όμως της γεωμετρίας του συνόρου, το βάθος στο οποίο αλλάζει η πυκνότητα από ρ_1 σε ρ_2 εξαρτάται από την απόσταση. Επομένως γενικά μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση και του r ($\rho(r, z)$). Στο σχήμα 4.1 έχει αφαιρεθεί στο συμβολισμό η εξάρτηση ταχύτητας και πυκνότητας από την απόσταση.

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος θα θεωρηθούν όπως και στα προηγούμενα προβλήματα (ελεύθερη επιφάνεια θάλασσας, συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και συνθήκες διεπιφάνειας). Προσοχή όμως: Στην διεπιφάνεια, ανάμεσα στο νερό και τον πυθμένα, η συνθήκη απαιτεί συνέχεια της κάθετης στο σύνορο συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων. Μπορούμε να δείξουμε ότι η κάθετη ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι και εδώ ανάλογη της κάθετης στο σύνορο παραγώγου της πίεσης. Σημειώνουμε ότι στη γενική περίπτωση, λόγω της γεωμετρίας της διεπιφάνειας, η κάθετη παράγωγος δεν είναι παράγωγος ως προς το βάθος z όπως είχαμε δει στις προηγούμενες εφαρμογές.

Για μία σημειακή αρμονική πηγή σε βάθος z_0 , η κυματική εξίσωση γράφεται :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho(r, z)} \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} + k^2(r, z)p(r, z) = \\ = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Σε κάθε απόσταση r , θα θεωρήσουμε την ομάδα ιδιοσυναρτήσεων του «τοπικού» προβλήματος βάθους:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(r, z)} \frac{\partial u_n(r, z)}{\partial z} \right] + \left[\frac{k^2(r, z)}{\rho(r, z)} - \frac{\lambda_n(r)}{\rho(r, z)} \right] u_n(r, z) = 0, \quad (4.1.2)$$

όπου

$$u_n(r, z) = \begin{cases} u_n^{(1)}(r, z) & \text{για } 0 \leq z \leq h_1(r) \\ u_n^{(2)}(r, z) & \text{για } h_1(r) \leq z \leq h_2 \end{cases}$$

$$k(r, z) = \begin{cases} k^{(1)}(r, z) & \text{για } 0 \leq z < h_1(r) \\ k^{(2)}(r, z) & \text{για } h_1(r) < z \leq h_2 \end{cases}$$

$$\rho(r, z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h_1(r) \\ \rho_2 & \text{για } h_1(r) < z \leq h_2 \end{cases}$$

και

$$u_n^{(1)}(r, 0) = 0, \quad (4.1.3\alpha)$$

$$u_n^{(1)}(r, h_1(r)) = u_n^{(2)}(r, h_1(r)), \quad (4.1.3\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_n^{(1)}(r, h_1(r))}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_n^{(2)}(r, h_1(r))}{\partial z}, \quad (4.1.3\gamma)$$

$$\frac{\partial u_n^{(2)}(r, h_2)}{\partial z} = 0. \quad (4.1.3\delta)$$

Γνωρίζουμε ότι υπό τις ανωτέρω συνθήκες, το πρόβλημα βάθους είναι ένα κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville (με διεπιφάνεια), και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα. Επιπλέον είναι πλήρεις στο $[0, h_2]$ οπότε μπορούμε να γράψουμε την λύση για την p της Helmholtz (ιδέ 4.1.1) ως μία συγκλίνουσα σειρά.

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) u_n(r, z). \quad (4.1.4)$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Η ακουστική πίεση δεν υπόκειται ακριβώς στις ίδιες συνθήκες στη διεπιφάνεια, σε σχέση με τις ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό θα ισχύει μόνο εάν η διεπιφάνεια είναι επίπεδη και οριζόντια, οπότε η κάθετη σ' αυτήν παράγωγος είναι παράγωγος ως προς z . Επομένως μόνο στην περίπτωση αυτή εξασφαλίζεται απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς 4.1.4
2. Οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται σε κάθε r ως συναρτήσεις του z . Όμως στον συμβολισμό που ακολουθήσαμε φαίνονται ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Στην πραγματικότητα θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται συνεχώς για κάθε r

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων που είναι:

$$\int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_n(r,z) u_m(r,z) dz = \delta_{nm} \quad (4.1.5)$$

Θα θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι στο πεδίο ορισμού του προβλήματος δεν υπάρχει πηγή, οπότε αντικατάσταση της 4.1.4 στην ομογενή της 4.1.1 και χρήση της 4.1.2 δίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} u_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\varphi_n}{dr} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} u_n + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \varphi_n = 0. \quad (4.1.6)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με $\frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z)$ και ολοκληρώσουμε από 0 έως h_2 παίρνουμε:

$$\frac{d^2 \phi_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_m}{dr} + \lambda_m(r) \phi_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}(r) \phi_n + B_{mn}(r) \left[\frac{\phi_n}{r} + 2 \frac{d\phi_n}{dr} \right] \right\}, \quad (4.1.7)$$

όπου

$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial^2 u_n(r,z)}{\partial r^2} dz \quad \text{και} \quad (4.1.8)$$

$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial u_n(r,z)}{\partial r} dz. \quad (4.1.9)$$

Οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} καλούνται "συντελεστές σύζευξης" (coupling coefficients) και εκφράζουν το βαθμό αλληλεξάρτησης τις ακουστικής διάδοσης μέσω των διαφόρων ιδιομορφών. Με άλλα λόγια μας δίνουν τον βαθμό που η ιδιομορφή μιας τάξης m εξαρτάται από την ιδιομορφή τάξης n , κάτι που δεν είχε νόημα στις περιπτώσεις διάδοσης του ήχου σε περιβάλλοντα σταθερών συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων, όπου η διάδοση της ακουστικής ενέργειας σε κάθε ιδιομορφή ήταν ανεξάρτητη της διάδοσης σε μια άλλη ιδιομορφή. Στη παρούσα περίπτωση, η διάδοση μιας ιδιομορφής (τάξης m) εξαρτάται από τη διάδοση όλων

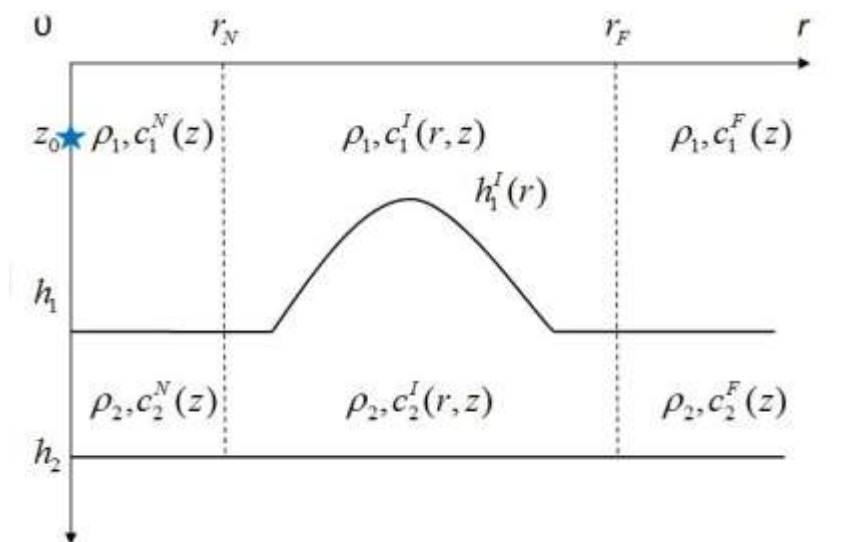
των υπόλοιπων ιδιομορφών. Οι ιδιομορφές «ανταλλάζουν» ενέργεια καθώς διαδίδονται σε περιβάλλοντα με διαφορετικές παραμέτρους ή γεωμετρία.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι εξετάσαμε το πρόβλημα στην απλή περίπτωση που το πεδίο ορισμού δεν έχει πηγή. Η εισαγωγή της πηγής στο πρόβλημα και η αναζήτηση της αντίστοιχης συνάρτησης Green περιπλέκει ακόμη περισσότερο τα πράγματα, αλλά η φιλοσοφία επίλυσης με την εισαγωγή των συντελεστών σύζευξης παραμένει η ίδια. Ωστόσο το πρόβλημα στην γενική του περίπτωση αυτό δεν είναι εύκολο να λυθεί. Παρά το γεγονός ότι έχουν προταθεί μέθοδοι για την απλοποίησή του, φαίνεται ότι είμαστε ακόμη μακριά από την επίλυση του προβλήματος σε περιβάλλοντα με γενική γεωμετρία. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε κάποια περιβάλλοντα ειδικής μορφής και να πάρουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις της πίεσης.

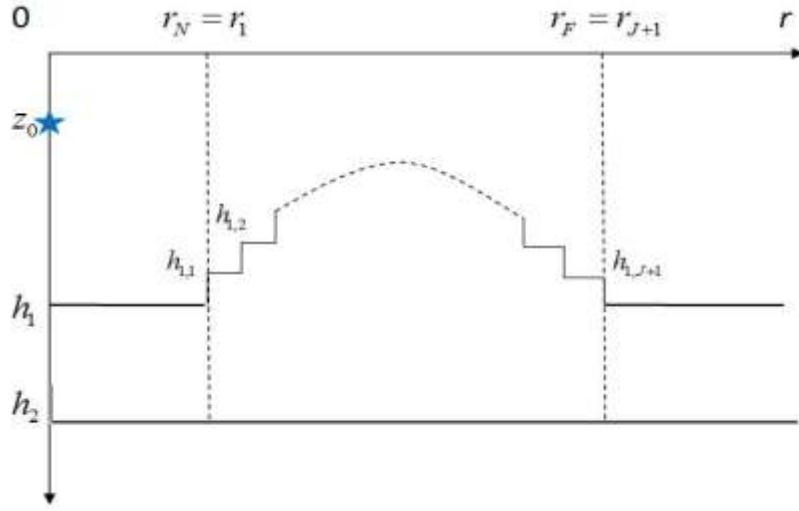
4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία

Ας θεωρήσουμε το περιβάλλον του επόμενου σχήματος 4.2. Χαρακτηρίζεται από μια τοπική ανομοιομορφία, έξω από την οποία όλες οι παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σταθερές με την απόσταση.

Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τρεις υποπεριοχές για τη μελέτη του προβλήματος: Την περιοχή "κοντά" στην πηγή (δείκτης N από το Near) την περιοχή της ανομοιομορφίας (I από το Intermediate) και την περιοχή μακράν της ανομοιομορφίας (F από το Far). Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια και τον πυθμένα παραμένουν οι ίδιες : (ελεύθερη επιφάνεια-ακλόνητος πυθμένας) ενώ ισχύει και πάλι η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στην διεπιφάνεια ($h_1(r)$). Την ενδιαμέση υποπεριοχή χωρίζουμε σε κυλινδρικούς δακτυλίους που ορίζονται από ακτίνες r_j όπως στο σχήμα 4.3 . Οι δακτύλιοι είναι συνολικά J τον αριθμό.



Σχήμα 4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία



Σχήμα 4.3: Διακριτοποίηση της ανομοιογένειας ανάμεσα στο r_N και το r_F .

Σε κάθε έναν από τους δακτυλίους οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται μόνο με το βάθος. Η γενική διαφορική εξίσωση και οι συνθήκες που διέπουν το φαινόμενο είναι ταυτόσημες με εκείνες του προηγούμενου προβλήματος με την παρατήρηση ότι οι παράγωγοι που είναι κάθετες στην διεπιφάνεια χωρίζονται πλέον σε παραγώγους ως προς το βάθος και την απόσταση.

Σε κάθε δακτύλιο με δείκτη j ορίζουμε ένα πρόβλημα "βάθους"

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_j(z)} \frac{du_{n,j}(z)}{\partial z} \right] + \left[\frac{k_j^2(z)}{\rho_j(z)} - \frac{\lambda_{n,j}}{\rho_j(z)} \right] u_{n,j}(z) = 0, \quad (4.1.10)$$

όπου $u_{n,j}(z)$ ορίζεται με δείκτες (1) και (2) σε κάθε λωρίδα (νερό, ίζημα) και το ίδιο ισχύει για τα k_j και τα $\rho_j(z)$:

Οι συνθήκες ορίων και οριζόντιας διεπιφάνειας είναι :

$$u_{n,j}^{(1)}(0) = 0, \quad (4.1.11\alpha)$$

$$u_{n,j}^{(1)}(h_{1,j}) = u_{n,j}^{(2)}(h_{1,j}), \quad (4.1.11\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_{1,j}} \frac{du_{n,j}^{(1)}(h_{1,j})}{dz} = \frac{1}{\rho_{2,j}} \frac{du_{n,j}^{(2)}(h_{1,j})}{dz}, \quad (4.1.11\gamma)$$

$$\frac{du_{n,j}^{(2)}(h_2)}{dz} = 0. \quad (4.1.11\delta)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις $u_{n,j}(z)$ είναι ορθοκανονικές και επομένως κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0, h_2]$ με ίδιες οριακές συνθήκες αναπτύσσεται σε μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά:

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,j}(r) u_{n,j}(z). \quad (4.1.12)$$

Προσοχή ότι στο πρόβλημα με τη νέα μορφή διεπιφάνειας, οι συνθήκες στα οριζόντια τμήματα της διεπιφάνειας είναι ίδιες με εκείνες της πίεσης.

Όμως καταλήξαμε έτσι στον ορισμό συναρτήσεων p_j , $j = N, 1, 2, \dots, J, F$ (αν περιλάβουμε τους χώρους του εγγύς και πέραν πεδίου) οι οποίες θα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους στα τεχνητά σύνορα r_j ώστε να έχει το πρόβλημα μοναδική λύση. Οι συνθήκες συνέχειας της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στις κατακόρυφες διεπιφάνειες που ορίζονται στις αποστάσεις r_j θα μας δώσουν τις απαραίτητες συνθήκες γι' αυτό:

$$p_j(r_j, z) = p_{j+1}(r_j, z), \quad (4.1.13\alpha)$$

$$\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j(r_j, z)}{\partial r} = \frac{1}{\rho_{j+1}} \frac{\partial p_{j+1}(r_j, z)}{\partial r}. \quad (4.1.13\beta)$$

Όσο για τις συναρτήσεις $\varphi_{n,j}(r)$ εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι σε κάθε υποχωρίο $j=1, 2, \dots, j+1, F$ υπακούουν στην διαφορική εξίσωση τύπου Bessel :

$$\frac{d^2 \phi_{n,j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{n,j}}{dr} + \lambda_{n,j} \phi_{n,j} = 0, \quad (4.1.14)$$

που έχει γενική λύση εκφρασμένη μέσω συναρτήσεων Hankel την :

$$\phi_{n,j}(r) = A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r). \quad (4.1.15)$$

Οι συντελεστές $A_{n,j}$ και $B_{n,j}$ θα προκύψουν από τις συνθήκες συνεργασίας στις κατακόρυφες διεπιφάνειες που ορίζονται για $r = r_j$ (4.1.13α και 4.1.13β).

Από φυσικής πλευράς οι δύο όροι στην 4.1.15 εκφράζουν ενέργεια που οδεύει προς τα αυξανόμενα και μειούμενα r αντίστοιχα.

Για την περίπτωση που $j=F(=J+1)$ γνωρίζουμε από τη συνθήκη ακτινοβολίας ότι $B_{n,j}=0$ καθώς δεν υπάρχει ενέργεια που να επανακτινοβολείται από το άπειρο και να οδεύει προς την αρχή των αξόνων.

Απομένει η μελέτη της συνθήκης πηγής: στο χωρίο που ορίζεται από $0 < r < r_1 = r_N$ και στο οποίο περιλαμβάνεται η ακουστική πηγή. Στο χωρίο αυτό μπορούμε να χωρίσουμε τη λύση μας σε δύο όρους. Ο πρώτος όρος αφορά τη λύση για το πρόβλημά μας όταν δεν υπάρχει η ανομοιογένεια (πεδίο ακτινοβολίας p_r) και ο δεύτερος αφορά τη λύση για το πρόβλημα που προκύπτει λόγω της ανομοιομορφίας (πεδίο περίθλασης p_d) γράφοντας

$$p(r, z) = p_r(r, z) + p_d(r, z). \quad (4.1.16)$$

Η πληροφορία μας για την πηγή ενσωματώνεται στον πρώτο όρο (πίεση ακτινοβολίας) ενώ ο δεύτερος όρος «διορθώνει» την ακουστική πίεση λόγω της ύπαρξης της ανομοιογένειας. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση στην οποία υπακούει η p_r είναι η μη ομογενής Helmholtz με τις παραμέτρους του μέσου (1) ενώ η p_d υπακούει σε μια ομογενή Helmholtz. Οι οριακές συνθήκες στις οριζόντιες διαχωριστικές επιφάνειες του πρώτου χωρίου είναι ίδιες και για τα δύο προβλήματα τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς την ύπαρξη του όρου διέγερσης από την πηγή για το πεδίο ακτινοβολίας και την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld που δεν υφίσταται για το πεδίο περίθλασης. Το πρόβλημα επομένως για το πεδίο ακτινοβολίας ανάγεται σε ένα από τα γνωστά προβλήματα που έχουμε δει μέχρι τώρα και επομένως η λύση του είναι γνωστής μορφής (δείτε τη σχέση 3.3.40, που αναφέρεται σε πρόβλημα με οριζόντια διεπιφάνεια

$$p_r(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) . \quad (4.1.17)$$

Για το πεδίο περίθλασης αρκεί να διαπιστώσουμε ότι αναπαράγουμε ένα από τα προβλήματα που διατυπώσαμε σε καθένα από τους κατακόρυφους εσωτερικούς δακτυλίους του χωρίου, με την διαφορά ότι καθώς το $r=0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, η λύση για την συνάρτηση φ_N θα πρέπει να είναι αναλυτική και στο σημείο αυτό. Από την θεωρία των συναρτήσεων Bessel γνωρίζουμε ότι για να συμβεί αυτό η λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Bessel (4.1.14 για $i=N$) πρέπει να εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους $J_0(x)$. Παίρνομε λοιπόν :

$$p_d(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,N} J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) u_{n,N}(z) . \quad (4.1.18)$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές A_n, B_n και C_n σε όλα τα στρώματα. Διαπιστώνουμε ότι δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός τους εάν δεν θεωρήσουμε πεπερασμένο αριθμό όρων στις σειρές. Ευτυχώς τα θεωρήματα αναπαράστασης που εξασφαλίζουν την σύγκλιση της σειράς μας επιτρέπουν να διατηρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό όρων, έστω M , σε όλες τις σειρές. Λογαριάζοντας τώρα τους αγνώστους του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι αυτοί είναι $2 \times M \times (J+1)$, όπως προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε M αγνώστους ($C_{n,N}$) για το εγγύς πεδίο $2 \times M \times J$ αγνώστους ($A_{n,j}, B_{n,j}$) στα J χωρία διαμερισμού της ανομοιογένειας και M αγνώστους ($A_{n,F}$) στο μακρινό πεδίο.

Ο υπολογισμός των αγνώστων θα γίνει μέσω των συνθηκών συνεργασίας στα κατακόρυφα "τεχνητά" σύνορα των ειδικών χωρίων διαμερισμού.

Η φυσική επιβάλλει συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στις κατακόρυφες τεχνητές διεπιφάνειες, όπως ακριβώς απαιτείται στις οριζόντιες. Επομένως οι συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν στις επιφάνειες $r=r_j$ είναι οι 4.1.13α και 4.1.13β

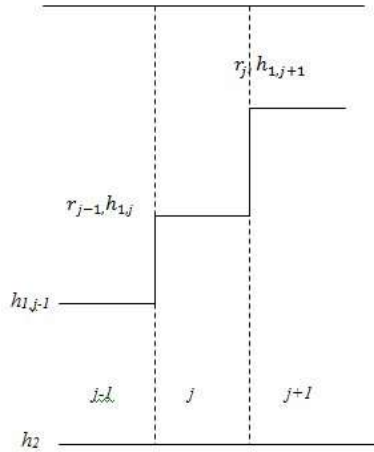
Υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις για τις πιέσεις στα διάφορα χωρία, με βάση τις σχέσεις 4.12, 4.15-4.18 και την παρατήρηση ότι κρατάμε πεπερασμένους όρους M στη σειρά.

$$p_N(r, z) = \frac{1}{4\rho_1} \sum_{n=1}^M u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) + \sum_{n=1}^M C_{n,N} J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) u_{n,N}(z) , \quad (4.1.19)$$

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^M \left\{ A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) \right\} u_{n,j}(z), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4.1.20)$$

$$p_F(r, z) = \sum_{n=1}^M A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}} r) u_{n,F}(z). \quad (4.1.21)$$

Οι συνθήκες 4.1.13 εφαρμοζόμενες χωρίς επεξεργασία δεν μπορούν να δώσουν τις απαραίτητες εξισώσεις για να υπολογιστούν οι άγνωστοι του προβλήματος.



Σχήμα 4.4 . Λεπτομέρεια του διαχωρισμού στα εσωτερικά πεδία

Για να διατυπωθεί ο ανάλογος αριθμός εξισώσεων και να καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους του προβλήματος, επιβάλλεται η αξιοποίηση της συνθήκης ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων που γίνεται με τον γνωστό τρόπο δηλαδή με πολλαπλασιασμό των σχέσεων 4.1.13 με $\frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z)$ και $u_{m,j}(z)$ αντίστοιχα και ολοκλήρωση από 0 έως h_2 . Οι όροι για τους οποίους $m \neq n$ θα μηδενιστούν στο αριστερό μέρος και θα παραμείνουν εκφράσεις της μορφής :

$$\begin{aligned} & A_{m,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) + B_{m,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) = \\ & = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} \sum_{n=1}^M \left\{ A_{n,j+1} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}} r_j) + B_{n,j+1} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}} r_j) \right\} u_{n,j+1}(z) u_{m,j}(z) dz, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

και αντίστοιχες με παραγώγους των συναρτήσεων Hankel. Μπορούμε τώρα να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των Hankel:

$$\frac{dH_0^{(\nu)}(\kappa r)}{dr} = -\kappa H_1^{(\nu)}(\kappa r), \quad (4.1.23)$$

$$H_1^{(1)}(\mathbf{kr}) = -iH_0^{(1)}(\mathbf{kr}) \quad \text{και} \quad H_1^{(2)}(\mathbf{kr}) = iH_0^{(2)}(\mathbf{kr}) \quad (4.1.24)$$

και να χρησιμοποιήσουμε τις αντικαταστάσεις:

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz, \quad (4.1.25)$$

$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz. \quad (4.1.26)$$

για να απλοποιήσουμε τις σχέσεις.

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι καταλήγουμε σε $2 \times M \times (J+1)$ εξισώσεις της μορφής 4.1.22 και της αντίστοιχης με τις παραγώγους που απαρτίζουν ένα γραμμικό σύστημα, και η επίλυση του οποίου μας δίνει τους άγνωστους συντελεστές.

Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στο εν λόγω πρόβλημα. Θα σημειώσουμε μόνο ότι οι συντελεστές C_{1mn} και C_{2mn} ονομάζονται **συντελεστές σύζευξης** (coupling coefficients) (δείτε αντίστοιχους συντελεστές στις σχέσεις 4.1.8 και 4.1.9), εκφράζουν την ανταλλαγή ενέργειας κατά την διάδοση του ήχου στις διάφορες κυματομορφές, η δε μέθοδος που αναπτύξαμε ονομάζεται μέθοδος "συζευγμένων ιδιομορφών" και το χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν βασίζεται σε καμία παραδοχή ως προς την μορφή της εξίσωσης και το πρόβλημα που επιλύει. Τα μόνα ερωτηματικά, αφορούν την σύγκλιση της μεθόδου όσον αφορά τη διακριτοποίηση του χωρίου και μόνο. Να σημειώσουμε ωστόσο ότι είναι υπολογιστικά απαιτητική, ιδιαίτερα όταν η ακρίβεια που ζητάμε επιβάλει τη θεώρηση μεγάλης τάξης ιδιομορφών στις αναπαραστάσεις (υψηλές συχνότητες μεγάλα βάθη). Επίσης θα πρέπει να πούμε ότι εντελώς αντίστοιχα μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος σε περιβάλλον με ημιάπειρο πυθμένα, οπότε οι σειρές που αναπαριστούν την ακουστική πίεση έχουν έτσι κι αλλιώς πεπερασμένους όρους, όσες είναι και οι κανονικές ιδιομορφές του προβλήματος.

5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

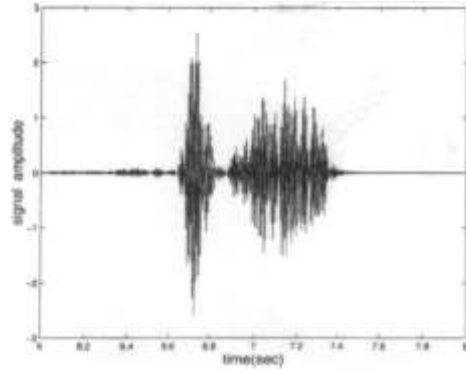
Τα ακουστικά σήματα που χρησιμοποιούνται στο θαλάσσιο περιβάλλον ποικίλουν ανάλογα με την εφαρμογή και τις απαιτήσεις συχνότητων. Κύρια κριτήρια επιλογής τους σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι η μεταφορά όσο το δυνατό μεγαλύτερης ενέργειας σε μεγάλη απόσταση και η επίτευξη χαρακτηριστικών λήψης που να είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και αξιοποιήσιμα. Με την έννοια αυτή ένα ημιτονοειδές κύμα (κύμα σταθερής συχνότητας ω , άπειρης διάρκειας), όπως αυτό στο οποίο βασίσαμε τη μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο, μια και δεν έχει καλά χαρακτηριστικά αναγνωρισιμότητας, όπως π.χ. μέτρησης χρόνου. Τα σήματα που μετρώνται και αξιοποιούνται στο θαλάσσιο περιβάλλον λοιπόν αποτελούνται από πολλές συχνότητες που κάθε μία έχει διαφορετικό βαθμό συμμετοχής στο σήμα. Το εύρος των συχνοτήτων συνιστά το (bandwidth) του σήματος και μπορεί να υπολογιστεί από το μετρούμενο σήμα με μετασχηματισμό Fourier. Αντίστροφα, ένα σήμα μπορεί να παραχθεί από την επαλληλία αρμονικών διαφορετικών συχνοτήτων και να μοντελοποιηθεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Συνεπώς η μέχρι τώρα θεωρία που αναπτύξαμε και αφορά μονοχρωματικά σήματα (μιας συχνότητας) επεκτείνεται σε ευρυζώνια σήματα μέσω του μετασχηματισμού Fourier για τον οποίο θα παραθέσουμε βασικές έννοιες τόσο για τον συνεχή όσο και για τον διακριτό μετασχηματισμό. Λεπτομέρειες για τη μετάβαση από τον συνεχή στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορεί να βρεθούν και στις σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία».

5.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.

Τα ακουστικά σήματα μετρώνται πρωτογενώς στο πεδίο του χρόνου. Εάν τα θεωρήσουμε με την αναλογική τους έκφραση, περιγράφονται ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου $f(t)$. Για παράδειγμα ένα μονοχρωματικό σήμα που οδεύει κατά μήκος του άξονα r μπορεί να έχει την έκφραση.

$$f(t) = A \sin(kr - \omega t) \quad (5.1.1)$$

Ένα τυχαίο σήμα (ντετερμινιστικό όμως ως προς την έκφρασή του) μπορεί να συντεθεί από πολλές αρμονικές, συνιστώσες δηλαδή που έχουν την ως άνω μορφή (5.1.1) αλλά που μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλάτος και τη συχνότητα. Εάν θεωρήσουμε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων, η συνεισφορά κάθε μίας από τις συχνότητες στο σήμα, χαρακτηρίζεται μέσω της συνάρτησης $F(\omega)$. Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος συναρτήσεων που χαρακτηρίζει το οποιοδήποτε αναλογικό σήμα. Ο υπολογισμός του κάθε μέλους του ζεύγους μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε το άλλο, μέσω του **Μετασχηματισμού Fourier** που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 5.1 Καταγραφή ενός ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου

Εάν οι ως άνω συναρτήσεις δεν είναι συνεχείς αλλά δίδονται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών t και ω (t_i, ω_j), η σχέση τους δίδεται μέσω του **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier**. Με δεδομένη τη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία, η τελευταία αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στις δύο περιπτώσεις αρχίζοντας από τη συνεχή περίπτωση.

5.1.1. Ο Μετασχηματισμός Fourier.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Τα ζεύγη των μιγαδικών εν γένει συναρτήσεων $f(t)$ και $F(\omega)$ καλούνται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, και συμβολίζονται ως $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, όταν σχετίζονται μέσω των εξισώσεων

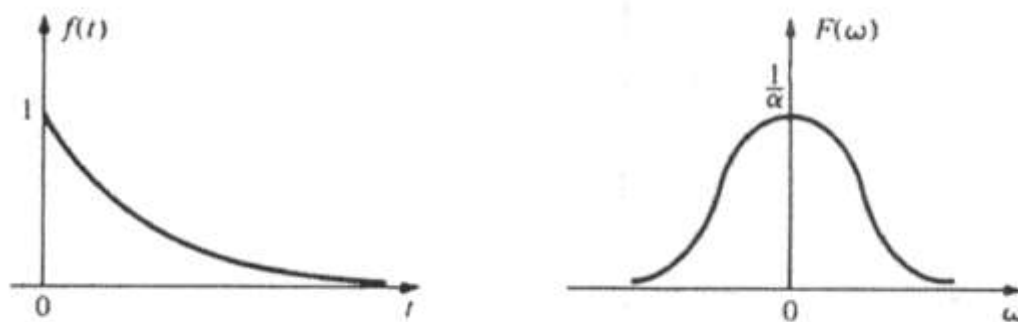
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.1.3)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις υποθέτουμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής του Cauchy. Η συνάρτηση $F(\omega)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ και συμβολίζεται και ως $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ ενώ η $f(t)$ χαρακτηρίζεται ως αντίστροφος μετασχηματισμός της $F(\omega)$ και συμβολίζεται ως $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\}$. Να σημειώσουμε εδώ ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $F(\omega)$ και $f(t)$ για τις πρακτικές εφαρμογές αναφέρεται στο μέτρο τους π.χ. ($|F(\omega)|$) που είναι και ένας ενεργειακός δείκτης πολύ χρήσιμος στις εφαρμογές.

Για παράδειγμα, εάν $f(t) = e^{-at}$ $a > 0$ $t > 0$ (Σχήμα 5.2), η $F(\omega)$ είναι

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega} \quad (5.1.4)$$



Σχήμα 5.2 Παράδειγμα σήματος στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Η $F(\omega)$ του σήματος αντιστοιχεί στο μέτρο της μετασχηματισμένης συνάρτησης

Εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει και την αντίστροφη σχέση 5.1.3.

Όπως είπαμε, οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ είναι γενικά μιγαδικές.

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης μέσω ημίτονου και συνημίτονου μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε εκφράσεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ως άνω συναρτήσεων της μορφής

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt \quad (5.1.5a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) \cos \omega t - f_1(t) \sin \omega t] dt \quad (5.1.5\beta)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (5.1.5\gamma)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (5.1.5\delta)$$

Στην πράξη, οι συναρτήσεις $f(t)$ αντιπροσωπεύουν πραγματικές μετρήσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου και είναι πραγματικές συναρτήσεις ($f_2(t) = 0$). Στην περίπτωση αυτή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (5.1.6)$$

Άλλες σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι $R(-\omega) = R(\omega)$ και $X(-\omega) = -X(\omega)$. Έτσι $F^*(\omega) = F(-\omega)$ (με * υποδηλώνουμε τον συζυγή).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, ($f(-t) = f(t)$) παίρνουμε $X(\omega) = 0$. Δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης δίδει πραγματική συνάρτηση. Αντίστοιχα εάν $f(-t) = -f(t)$ (περιττή συνάρτηση) παίρνουμε $R(\omega) = 0$.

5.1.2 Συνέλιξη

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ και τα αντίστοιχα δεύτερα μέλη των ζευγών του μετασχηματισμού Fourier $F_1(\omega)$ και $F_2(\omega)$.

Συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ονομάζουμε το ολοκλήρωμα

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (5.1.7)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει μία νέα συνάρτηση του χρόνου και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη των φίλτρων και στο γινόμενο σημάτων που χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$.

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $(f_1 * f_2)(t)$, έχουμε για $t = \tau + x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα σε ό,τι αφορά το γινόμενο συναρτήσεων που περιγράφονται στο πεδίο των συχνοτήτων :

Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων

Η συμβολικά : Εάν $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ και $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ τότε

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (5.1.9)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση) ότι

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (5.1.10)$$

5.1.3 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Τα σήματα σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές είναι ψηφιακά. Αυτό σημαίνει ότι μετράμε δείγματα του σήματος $f(t)$ στο πεδίο του χρόνου ή της $F(\omega)$ στο πεδίο των συχνοτήτων. Τα δείγματα αυτά έχουν χρονική διαφορά T_1 και συχνοτική διαφορά ω_0 . Ο αριθμός των δειγμάτων εξαρτάται από το παράθυρο δειγματοληψίας και το βήμα δειγματοληψίας. Έτσι εάν επιλέξουμε ένα παράθυρο δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου T και N αριθμό δειγμάτων, το βήμα θα είναι $T_1=T/N$. Αντίστοιχα στο πεδίο των συχνοτήτων, N δείγματα με βήμα ω_0 θα δώσουν παράθυρο δειγματοληψίας $\omega_1=N\omega_0$.

Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier συνδέει τα δείγματα στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων μέσω των σχέσεων

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}, m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.1.11)$$

και

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.1.12)$$

όπου $\bar{f}(mT_1)$ και $\bar{F}(n\omega_0)$ είναι προσεγγίσεις των $f(t)$ και $F(\omega)$ στα αντίστοιχα χρονικά ή συχνοτικά βήματα.

Η προσέγγιση που γίνεται στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier έχει να κάνει με το γεγονός ότι η μετάβαση από τον συνεχή στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier περνά από τη θεώρηση των συναρτήσεων

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega+n\omega_1) \quad (5.1.13)$$

από τις οποίες η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T , ενώ η $\bar{F}(\omega)$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο ω_1 .

Είναι προφανές ότι οι αρχικές συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ δεν είναι κατ' ανάγκην περιοδικές. Η επιλογή όμως των T και ω_1 σε συνδυασμό με τον αριθμό των δειγμάτων μπορεί να οδηγήσει σε καλή προσέγγιση των πραγματικών τιμών των συναρτήσεων αυτών από τα ως άνω δείγματα, εάν οι $f(t)$ και $F(\omega)$ δεν έχουν ισχυρό ενεργειακό περιεχόμενο έξω από τα εύρη T και ω_1 .

Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις

$$T_1 = T/N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0,$$

οι εκφράσεις 5.1.11 (ή 5.1.12) αντίστοιχα μας δίδουν N εξισώσεις (για $m=0, \dots, N-1$), που μας δίδουν τις διακριτές τιμές $\bar{F}(n\omega_0)$ της $\bar{F}(\omega)$ συναρτήσει των διακριτών τιμών $\bar{f}(mT_1)$ της $\bar{f}(t)$ και αντίστροφα.

Η σχέση 5.1.11 είναι της μορφής

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (5.1.14)$$

Και η 5.1.12 της μορφής

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.1.15)$$

Τα ζεύγη των συντελεστών που ορίζονται από τις σχέσεις (5.1.14) και (5.1.15) αποτελούν μία *διακριτή σειρά ζευγών Fourier (discrete Fourier series pair) τάξης N* και θα συμβολίζονται με

$$a_N \leftrightarrow A_m$$

Η σειρά είναι περιοδική, δηλαδή ισχύει

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$$

Δεν χρειάζεται επομένως να καταφύγει κανείς σε ολοκληρώματα για να πάρει κάποιες από τις δύο τιμές. Υπάρχει βέβαια πάντα η απαίτηση επίλυσης ενός συστήματος N εξισώσεων. Οι υπολογισμοί γίνονται γρήγορα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, ωστόσο με ειδική τεχνική (*Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier – Fast Fourier Transform ή FFT*) είναι δυνατόν αυτοί να επιταχυνθούν σημαντικά.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν έχουμε ένα τυχαίο σήμα στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ώστε να μειωθεί το λάθος που γίνεται όταν οι συντελεστές της $F(\omega)$ προσεγγιστούν κατά τα ανωτέρω με εκείνους της $\bar{F}(\omega)$. Το λάθος αυτό είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *aliasing error*.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος περιλαμβάνει πολλές παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογιστούν με αντικρουόμενα κριτήρια. Είναι σημαντικό λοιπόν να καθορισθούν οι ανάγκες της επεξεργασίας μας με βάση τα πραγματικά δεδομένα του σήματος (διάρκεια, εύρος συχνοτήτων, ανάλυση) ώστε να επιτευχθεί ο μέγιστος βαθμός ακρίβειας. Περισσότερη συζήτηση για θέματα επεξεργασίας σημάτων ξεφεύγει από τον σκοπό των σημειώσεων και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε πλέον ειδικά βιβλία (π.χ. Papoulis).

6. ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΑΣ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών σε ένα κυματοδηγό εξαρτάται από τη συχνότητα του ακουστικού κύματος. Μεγαλύτερη συχνότητα δίνει τη δυνατότητα διάδοσης περισσότερων ιδιομορφών ενώ έχουμε αναφέρει και τη «συχνότητα αποκοπής» (cut-off frequency) κάτω από την οποία δεν είναι δυνατή διάδοση ακουστικού κύματος στον κυματοδηγό. Είναι προφανές ότι σε ένα σύνθετο κυματοδηγό η συχνότητα αποκοπής δεν προκύπτει από την απλή σχέση που είδαμε για τον απλό κυματοδηγό (3.2.81). Σε γενικό κυματοδηγό η σχέση ανάμεσα στην οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος και στη συχνότητα είναι μη γραμμική, ενώ ένας κυματοδηγός παρουσιάζει χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τη συχνότητα.

6.1 Φασική ταχύτητα.

Έχουμε ήδη δει ότι η οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος που υποδηλώνει και την διάδοση του ήχου κατά την οριζόντια διεύθυνση είναι η $\sqrt{\lambda_n}$ για κάθε τάξη ιδιομορφής n . Σε αυτό το κεφάλαιο θα συμβολίσουμε την συνιστώσα αυτή με το κ_n για λόγους ευκολίας συμβολισμού όπως και στο κεφάλαιο 3.3.3. Με κάθε ιδιομορφή λοιπόν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία ταχύτητα οριζόντιας διάδοσης του ήχου από τη σχέση :

$$v_n = \frac{\omega}{\kappa_n} \quad (6.1.1)$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται «φασική ταχύτητα» (phase velocity) και δεδομένου ότι για να έχουμε κυματικό φαινόμενο θα πρέπει να ισχύει $\kappa_n < k$, η φασική ταχύτητα είναι πάντα μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον κυματοδηγό. Σημειώνουμε ωστόσο εδώ ότι η φασική ταχύτητα δεν αντιπροσωπεύει ταχύτητα διάδοσης ενέργειας αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας διάδοσης της φάσης ενός επίπεδου κύματος. Σημειώνουμε εδώ ότι στο κεφάλαιο 3.3.3 είδαμε ότι κάθε ιδιομορφή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επίπεδο κύμα που διαδίδεται στον κυματοδηγό με αριθμό κύματος k η οριζόντια συνιστώσα του οποίου είναι πάντα η κ_n ενώ η διάδοση της μπορεί γεωμετρικά να παρασταθεί με την διάδοση μιας ακουστικής ακτίνας.

Σε μεγάλες συχνότητες η φασική ταχύτητα τείνει στην ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Γεωμετρικά μπορεί επίσης να παρατηρηθεί ότι μικρές τιμές της οριζόντιας συνιστώσας του αριθμού κύματος ισοδυναμούν με ακτίνες που κατευθύνονται στον πυθμένα της θάλασσας (η στην επιφάνεια) με μεγάλες γωνίες ως προς την οριζόντιο. Αυτές λοιπόν οι ακτίνες χαρακτηρίζονται με μεγάλες φασικές ταχύτητες. Αντίθετα ακτίνες που σχετίζονται με οριζόντιες συνιστώσες αριθμού κύματος κοντά στον αριθμό κύματος έχουν φασική ταχύτητα κοντά σε αυτή της διάδοσης του ήχου και η κλίση τους ως προς την οριζόντιο είναι μικρή.

6.2 Ταχύτητα ομάδας

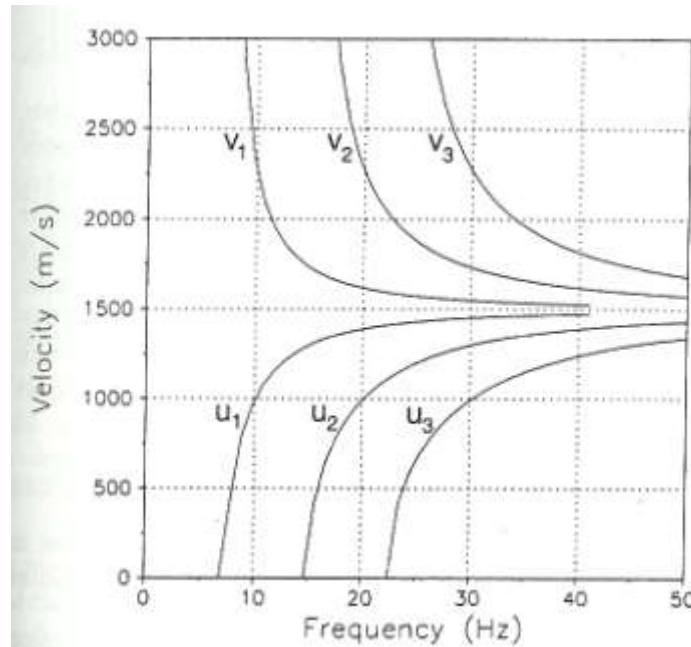
Όταν η ακουστική ενέργεια μεταφέρεται από ένα εύρος συχνοτήτων (περίπτωση τυπικών ακουστικών παλμών) και το ακουστικό σήμα δεν είναι αρμονικό, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κάθε ιδιομορφή, έχει το δικό της ρυθμό μεταφοράς ενέργειας

στον κυματοδηγό. Η ιδιότητα αυτή έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρείται διαχωρισμός των ιδιομορφών καθώς ένα σήμα μεταδίδεται στον κυματοδηγό και να οριστεί μία ταχύτητα ομάδας (group velocity) που είναι χαρακτηριστική κάθε ιδιομορφής και αντιπροσωπεύει πραγματική ταχύτητα διάδοσης ενέργειας στην οριζόντια κατεύθυνση. Η ταχύτητα αυτή χαρακτηρίζεται και ως ταχύτητα ιδιομορφής (modal velocity) u_n και από την κλασσική κυματική θεωρία μπορεί να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα αυτή δίδεται από τη σχέση :

$$\frac{1}{u_n(\omega)} = \frac{\partial \kappa_n}{\partial \omega} \quad (6.2.1)$$

Επισημαίνουμε ότι η οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος εξαρτάται από τη συχνότητα και εάν θεωρήσουμε συνεχή κατανομή συχνοτήτων στο σήμα, η παράγωγος στην 6.2.1 υπολογίζεται με την κλασσική της μορφή. Επίσης παρατηρούμε ότι η ταχύτητα ομάδας εξαρτάται συνεχώς από τη συχνότητα για κάθε τάξη ιδιομορφής. Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι η ταχύτητα αυτή θα πρέπει να είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα διάδοσης του ήχου.

Το σχήμα 6.1 που αντιγράφεται από το βιβλίο των Jensen et al. δίδει διαγραμματικά την μεταβολή της φασικής ταχύτητας και της ταχύτητας ομάδας για τις τρεις πρώτες τάξεις ιδιομορφών σε ένα απλό κυματοδηγό. Οι αναφερόμενες τιμές σχετίζονται με το πάχος του κυματοδηγού. Παρατηρούμε επίσης ότι κοντά στη συχνότητα αποκοπής για κάθε ιδιομορφή, η ταχύτητα ομάδας τείνει στο μηδέν που βέβαια αντιστοιχεί σε αδυναμία διάδοσης ακουστικής ενέργειας στον κυματοδηγό.



Σχήμα 6.1 Φασική ταχύτητα και ταχύτητα ομάδας για ένα απλό κυματοδηγό.

6.2.1 Υπολογισμός της ταχύτητας ομάδας

Η σχέση 6.2.1 γράφεται και ως

$$u_n(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_n} . \quad (6.2.2)$$

Αριθμητικός υπολογισμός της ταχύτητας ομάδας είναι δυνατός με απλές σχέσεις μικρής όμως ακρίβειας. Για παράδειγμα, μία σχέση διαφορών που δίνει μια προσέγγιση της ταχύτητας ομάδας θα μπορούσε να είναι

$$u_n(\omega) \simeq \frac{(\omega + \Delta\omega) - \omega}{\kappa_n(\omega + \Delta\omega) - \kappa_n(\omega)} , \quad (6.2.3)$$

έχοντας υπολογίσει τις ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε δύο γειτονικές συχνότητες ω και $\omega + \Delta\omega$.

Μια μέθοδος που προσεγγίζει καλύτερα την ταχύτητα ομάδας βασίζεται σε εφαρμογή θεωρίας μικρών διαταραχών.

Θα παραλείψουμε τη διαδικασία υπολογισμού της ταχύτητας ομάδας μέσω της θεωρίας αυτής (παραπέμπομε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο βιβλίο των Jensen et al.) και δίδουμε κατ' ευθείαν τη σχέση υπολογισμού που είναι :

$$u_n(\omega) = \frac{\partial \kappa_r}{\partial \omega} \simeq \int_0^D \frac{u_{n,0}^2(z)}{\rho(z)c^2(z)} dz \quad (6.2.4)$$

όπου το όριο D αναφέρεται στο κάτω σύνορο του κυματοδηγού (στον απλό είναι το h στον Pekeris είναι το ∞) και $u_{n,0}(z)$ είναι η ιδιοσυνάρτηση τάξης n του αντίστοιχου προβλήματος βάθους, υπολογισμένη στη συχνότητα ω .

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι όταν έχουμε ένα σήμα σχετικά στενού εύρους συχνοτήτων (narrow band signal), με την ακουστική ενέργεια να μεταφέρεται με συχνότητες πολύ κοντά σε μία κεντρική συχνότητας (π.χ. ακουστική πηγή με συνάρτηση διέγερσης γκαουσιανή κεντρικής συχνότητας ω_0) ο υπολογισμός της ταχύτητας ομάδας γίνεται στην κεντρική συχνότητα που έτσι αντιπροσωπεύει και την ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας του σήματος στην κυματοδηγό. Περισσότερη ανάλυση του φαινομένου της διάδοσης ενός ευρυζώνιου σήματος σε ένα κυματοδηγό ξεφεύγει από το την ύλη του μαθήματος και δεν θα περιληφθεί στις παρούσες σημειώσεις.

7. ΦΥΣΙΚΗ ΕΞΑΣΘΕΝΗΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Στη μέχρι τώρα θεώρηση του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης στον κυματοδηγό δεν είχαμε δεχθεί οποιοδήποτε μηχανισμό απώλειας της ηχητικής ενέργειας. Η ηχητική ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή παραμένει στο ακουστικό μέσον χωρίς μετατροπή σε άλλης μορφής ενέργεια. Η έντασή της όμως μεταβάλλεται με βάση την γεωμετρική εξάπλωση που υφίσταται το μέτωπο κύματος, γεγονός που οδηγεί σε μείωση της έντασης του ακουστικού πεδίου, καθώς η μεταβολή αυτή είναι συνήθως μειωτική (αύξηση της επιφάνειας του μετώπου κύματος).

Στην πραγματικότητα όμως, διάφοροι μηχανισμοί στο νερό και τα θαλασσινά ιζήματα οδηγούν σε μετατροπή της ακουστικής ενέργειας σε άλλης μορφής ενέργεια (π.χ. θερμότητα) χωρίς δυνατότητα επανάκτησης και αυτό σημαίνει ότι χάνεται οριστικά για το ακουστικό μέσον. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι περίπλοκοι και δεν είναι εύκολη η μαθηματική μοντελοποίησή τους. Από τους σημαντικούς ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το αντικείμενο αξίζει να μνημονεύουμε τους Stokes και Kirchoff, οι οποίοι απέδωσαν την εξασθένηση (attenuation) του ήχου σε ένα μέσον, στην θερμική αγωγιμότητα και τη συνεκτικότητα.

Παραλείποντας λεπτομέρειες της σχετικής θεωρίας, θα περιοριστούμε εδώ στην αναφορά της επίπτωσης που έχει ο μηχανισμός φυσικής εξασθένησης του ήχου στο πρόβλημά μας, το οποίο έχει διατυπωθεί για ένα μέσον που δεν παρουσιάζει φυσικές απώλειες ενέργειας.

Εάν λοιπόν θεωρηθεί ότι υπάρχει φυσική εξασθένηση (που πάντως είναι πολύ μικρή σε σχέση με την γεωμετρική εξασθένηση που έχουμε μελετήσει), θα εκφράσουμε τα μεγέθη που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς του ακουστικού πεδίου με τον δείκτη 0 να αντιπροσωπεύει την περίπτωση χωρίς απώλειες (όπως την έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα) και με τον δείκτη 1 να αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου έχουμε απώλειες. Οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο δεν θα επαναδιατυπωθούν με βάση τους μηχανισμούς φυσικής εξασθένησης αλλά, θα βασιστούμε στη θεωρία μικρών διαταραχών για να εκφράσουμε τα διαταραγμένα μεγέθη συναρτήσει των αδιατάραχτων.

Έτσι θα έχουμε :

$$\text{Για τον αριθμό κύματος} \quad k^2(z) = k_0^2(z) + \varepsilon k_1^2(z) \quad (7.1.1)$$

$$\text{Για τις ιδιοσυναρτήσεις} \quad u_n(z) = u_{n,0}(z) + \varepsilon u_{n,1}(z) \quad (7.1.2)$$

Για την οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος

$$K_n = K_{n,0} + \varepsilon K_{n,1} \quad (7.1.3)$$

όπου το ε χρησιμοποιείται στο συμβολισμό για να υποδηλώσει μικρές ποσότητες σε σχέση με τις ποσότητες αναφοράς. Εάν στους υπολογισμούς υπεισέρχονται γινόμενα

μικρών όρων ($\sim \varepsilon^2$ και ανώτερων τάξεων) αυτά αγνοούνται ως συνεισφέροντα πολύ λίγο στη λύση του προβλήματος.

Για να συνεχίσουμε την ανάλυση θα θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον κυματοδηγό είναι μιγαδική ποσότητα με το φανταστικό μέρος να είναι μικρό σε σχέση με το πραγματικό :

$$c(z) = c_0(z) + i c_1(z) \quad (7.1.4)$$

Το πραγματικό μέρος είναι αυτό που έχουμε ήδη συναντήσει στην κυματική θεωρία και εκφράζει το ρυθμό διάδοσης της ηχητικής ενέργειας ενώ το φανταστικό μέρος εξαρτάται από το ακουστικό μέσον και τη συχνότητα και εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο στο νερό αλλά και στα ιζήματα του πυθμένα (π.χ. περίπτωση κυματοδηγού Pekeris).

Από τη σχέση $k = \omega/c$ προκύπτει και ένας μιγαδικός αριθμός κύματος $k = k_0 + i k_a$.

Ο όρος k_a συμβολίζεται συνήθως ως a_e (βλ. σημειώσεις Ακουστικής Ωκεανογραφίας), χαρακτηρίζεται ως συντελεστής εξασθένησης (attenuation coefficient) και έχει μονάδες m^{-1} όπως και ο αριθμός κύματος. Στην βιβλιογραφία, όπου βρίσκει κανείς τυπικές τιμές του συντελεστή εξασθένησης για τυπικές περιπτώσεις θαλασσινών ιζημάτων, αλλά και για το νερό, η γραμμική εξάρτηση από τη συχνότητα που έχουν παρατηρήσει οι ερευνητές δίνει τιμές με μονάδες $(m \cdot kHz)^{-1}$

Αντίστοιχα παίρνουμε για την οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος :

$$\kappa_n = \kappa_{n,0} + i \kappa_{n,r} \quad (7.1.5)$$

Στην ανωτέρω σχέση το φανταστικό μέρος παίρνει τη θέση της διαταραχής όπως αυτή εκφράστηκε στη σχέση 7.1.3.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η διαταραχή της οριζόντιας συνιστώσας του αριθμού κύματος υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\kappa_{n,r}^2 = \int_0^D \frac{k_i^2 u_{n,0}^2}{\rho(z)} dz \quad (7.1.6)$$

όπου το D αντιπροσωπεύει το πλάτος του κυματοδηγού.

Το πρόβλημα του υπολογισμού του ακουστικού πεδίου σε ένα κυματοδηγό με φυσικές απώλειες υπολογίζεται με βάση τα ανωτέρω ως εξής :

Υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις για το περιβάλλον χωρίς απώλειες. Στη συνέχεια εισάγονται οι τιμές των ιδιοτιμών και του αριθμού κύματος στη λύση του προβλήματος σύμφωνα με τους ανωτέρω τύπους. Οι ιδιοσυναρτήσεις υπολογίζονται πάντοτε στο περιβάλλον χωρίς απώλειες. Έτσι παίρνει κανείς μια καλή προσέγγιση της λύσης στην περίπτωση που το περιβάλλον παρουσιάζει φυσικές απώλειες.

Για να δώσουμε μια εικόνα για το πώς εισάγεται η φυσική απώλεια στο πρόβλημά μας, αναφερόμαστε στο περιβάλλον Pekeris για το οποίο η λύση του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης δίδεται από τη σχέση

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N u_n^{(1)}(z_0) u_n(z) \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_n r}} e^{i(\kappa_n r - \pi/4)} \quad (7.1.7)$$

Προσέξτε την αναφορά στην οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος που τώρα συμβολίζεται με κ_n

Αντικατάσταση του κ_n από την 7.1.5 στην ανωτέρω σχέση δίνει την προσεγγιστική έκφραση της πίεσης με συνυπολογισμό της φυσικής εξασθένησης. Επισημαίνεται πάντως ότι η προσέγγιση αυτή θεωρείται ικανοποιητική όταν η φυσική εξασθένηση είναι μικρή. Αυτή είναι η περίπτωση του νερού. Ωστόσο και τα συνήθη θαλασσινά ιζήματα παρουσιάζουν φυσική εξασθένηση που δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε να ανατρέπεται η προσέγγιση πρώτης τάξης στην οποία βασίζεται η ανωτέρω θεωρία.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι : ΘΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ CAUCHY

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο με ιδιόμορφο σημείο z_0 δηλαδή ένα σημείο στο οποίο η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική. Εάν το σημείο είναι μεμονωμένο (η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική παντού στη γειτονιά του z_0 εκτός από το σημείο αυτό καθ' εαυτό,) και θεωρήσουμε κλειστή καμπύλη C_0 που περιβάλλει το σημείο z_0 η έκφραση

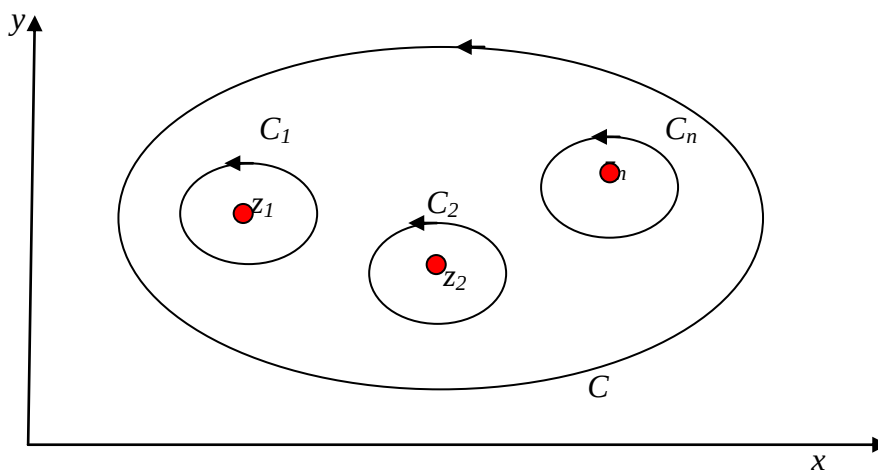
$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz \quad (\Pi 1.1)$$

ονομάζεται ολοκληρωτικό υπολοιπο (residue) της $f(z)$ στο μεμονωμένο ιδιόμορφο σημείο z_0 . Η καμπύλη λαμβάνεται με τη θετική φορά (αντίθετη εκείνης των δεικτών του ωρολογίου.)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω C μία κλειστή καμπύλη πάνω στην οποία αλλά και στο εσωτερικό της, μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική παντού, εκτός από τα μεμονωμένα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_n$ εσωτερικά της C . Εάν $B_1, B_2, \dots, B_n$ συμβολίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)$ στα εν λόγω σημεία, τότε το ολοκλήρωμα της $f(z)$ περί την ως άνω καμπύλη (που λαμβάνεται με τη θετική φορά) υπολογίζεται ως :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (B_1 + B_2 + \dots + B_n) \quad (\Pi 1.2)$$



Σχήμα Π1. Ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο

Υπενθυμίζεται τέλος ότι μία συνάρτηση που γράφεται ως $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ με $p(z)$ και $q(z)$ αναλυτικές στο z_0 με $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ έχει απλό πόλο στο z_0 και το ολοκληρωτικό της υπόλοιπο b_1 στο z_0 προκύπτει από τη σχέση :

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (\text{Π1.3})$$

Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Boyles, A.: *Acoustic Waveguides. Applications to Oceanic Science*, John Wiley, 1984.
2. Churchill, R.V., Brown, J.W. and Verhey R.F.: *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, 1974.
3. De Santo, J.A.: *Scalar Wave Theory*, Springer Verlag, Berlin 1992.
4. Etter, P.: *Underwater Acoustic Modelling*, Elsevier, London, 1991.
5. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, Orlando, 1980.
6. Jensen, F., Kuperman W., Porter, M. And Schmidt, H.: *Computational Ocean Acoustics*, Springer Verlag, New York 2000.
7. Kinsler, L., Frey, A., Coppens, A. and Sanders, J.: *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley, 1982.
8. Morse, P. and Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
9. Tolstoy, I. and Clay, C.S. : *Ocean Acoustics: Theory and Experiment in Underwater Sound*, American Institute of Physics, New York, 1987.
10. Zauderer, E.: *Partial Differential Equations*, John Wiley, Singapore 1989,
11. Ταρουδάκη Μ. *Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία*, Διδακτικές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2011.
12. Bland, D.R.: *Wave Theory and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1988