ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

04/2026

Άλκης Τερσένοβ

Μέρος Δεύτερο:
Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

Εισαγωγή

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με μερικά παραδείγματα από την κλασική Φυσική.

Παράδειγμα I (βλ. σχήμα 1). Η δύναμη βαρύτητας $\mathbf{F}$ που προκαλείται από μια σημειακή μάζα M στη θέση $(0,0,0)$ και ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο μάζας m στη θέση (x,y,z), δίνεται, συμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, από την σχέση

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}\mathbf{r}$$

ή

$$\mathbf{F} = \Big(-\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z\Big)$$

εδώ $\gamma > 0$ μια σταθερά, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ και $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Το διανυσματικο πεδίο $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικό δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση $u(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \to R$ τέτοια ώστε $\nabla u = \mathbf{F}$ ή

$$u_x = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, \ \ u_y = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, \ \ u_z = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z.$$

Προφανώς

$$u(x,y,z) = \gamma \frac{M\,m}{r}.$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\Big), \\ u_{yy} &= -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\Big), \\ u_{zz} &= -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\Big), \end{aligned}$$

συνεπώς

$$(1) \qquad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση* $Laplace$. Την εξίσωση αυτή μπορούμε να την θεωρίσουμε και σε $n \geq 2$ διαστάσεις.

Θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ \text{ ή } \ \Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_n x_n}.$$

Για $n = 2$ αντί για x_1, x_2 θα γράφουμε x, y ($\Delta\, u = u_{xx} + u_{yy}$) και για $n = 3$ αντί για x_1, x_2, x_3 θα γράφουμε x, y, z ($\Delta\, u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$). Εξίσωση $Laplace$ θα ονομάζουμε την εξίσωση

$$(1') \qquad \Delta u = 0.$$

Έστω τώρα η μάζα M είμαι κατανεμημένη σε μία μπάλα $\mathbf{B}(\mathbf{0},R)$ με κέντρο στο σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα R τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $u(x,y,z)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-4\pi\rho \ \text{ ή } \ \Delta u=-4\pi\rho \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $\rho(x,y,z)$ είναι η πυκνότητα της μάζας στο σημείο (x,y,z) (οι υπολογισμοί εδώ είναι αρκετά ογκώδεις). Η εξίσωση (2) ονομάζεται *εξίσωση Poisson*. Προφανώς εκτός της σφαίρας $\mathbf{B}(\mathbf{0},R)$ όπου $\rho(x,y,z)\equiv 0$ η (2) γίνεται (1).

Τις ίδιες εξισώσεις επαληθεύει και το δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Παράδειγμα II (βλ. σχήμα 2). Ας δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα όπου εμφανίζεται η εξίσωση $Laplace$. Έστω $\mathbf{u}=(u,v,w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, υποθέτουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και το ρευστό ασυμπίεστο δηλαδή

$$curl\,\mathbf{u}=0,\qquad div\,\mathbf{u}=0$$

όπου

$$curl\,\mathbf{u}\equiv(w_y-v_z)i+(u_z-w_x)j+(v_x-u_y)k$$

και

$$div\,\mathbf{u}\equiv u_x+v_y+w_z$$

(σχετικά με την σχέση $div\,\mathbf{u}=0$ βλέπε το παράδειγμα V). Συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις

$$w_y=v_z,\ \ u_z=w_x,\ \ v_x=u_y$$

και

$$u_x+v_y+w_z=0.$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς x

$$u_{xx}+v_{yx}+w_{zx}=0$$

από την άλλη

$$v_{xy}=u_{yy},\ \ w_{xz}=u_{zz},$$

συνεπώς

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0.$$

Παρομοίως

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=0,$$
$$w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}=0.$$

Βλέπουμε ότι και οι τρεις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{u}$ επαληθεύουν την εξίσωση $Laplace$.

Παράδειγμα III (βλ. σχήμα 3). Έστω $u(t,x,y,z)-$ θερμοκρασία στο σημείο $(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz,$$

όπου $\rho > 0$ πυκνότητα και $c > 0$ θερμοχωρητικότητα, μας δίνει την συνολική θερμότητα που περιέχεται στο Ω. Σύμφωνα με τον νόμο $Fourier$ η θερμότητα ρέει από τα θερμά προς τα ψυχρά με βάση το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -\kappa \nabla u$$

όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής θερμότητας καθορίζεται από την ροή της θερμότητας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές θερμότητας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nu\, ds + \int_\Omega f\, dxdydz,$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του Ω. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_\Omega div(\kappa\nabla u)\, dxdydz + \int_\Omega f\, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \Big((\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) - f\Big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) = f.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ποσότητες ρ, c, κ είναι σταθερες, τότε για την θερμοκρασία u θα έχουμε

$$u_t - k\Delta u = \tilde{f}, \quad k = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{\rho c}. \tag{3}$$

Η (3) ονομάζεται *εξίσωση θερμότητας*. Σε μία διάσταση η εξίσωση θα γράφεται ως εξής

$$u_t - k u_{xx} = f.$$

<u>Παράδειγμα</u> IV (βλ. σχήμα 4). Η εξίσωση

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \ \text{ ή } \ u_{tt} - \Delta u = f, \tag{4}$$

ονομάζεται *κυματική εξίσωση* και περιγράφει μικρές ταλαντώσεις, εδω f δοσμένη συνάρτηση που έχει να κάνει με τις πηγές ενέργιας. Η αντίστοιχη εξίσωση με μια χωρική μεταβλητή, δηλαδή η

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

περιγράφει μικρές ταλαντώσεις μιας χορδής. Η προσδιοριστέα συνάρτηση u περιγράφει τη θέση ενος σημείου τη χρονική στιγμή t. Χωρίς να δωσουμε λεπτομέρειες θα επισημάνουμε οτι η εξίσωση (4) προκύπτει απο τον δευτερο νόμο του Νεύτωνα λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός οτι η u_{tt} είναι η επιτάχυνση και η Δu έχει να κάνει με τις δυνάμεις που δρούν πάνω στο στερεό που δέχεται μικρές ταλαντώσεις.

Παρατηρούμε ότι αν στα παραδείγματα III και IV η διαδικασία είναι στατική δηλαδή με το πέρασμα του χρόνου η u δεν μεταβάλλεται ($u_t = 0$, $u_{tt} = 0$)

τότε και η (3) και η (4) γίνονται εξίσωση $Laplace$ ($Poisson$ αν $f \not\equiv 0$). Τέσσερα τελείως διαφορετικής φύσεως φαινόμενα περιγράφονται απο την ίδια εξίσωση! Επίσης το πραγματικό και φανταστικό μερος μιας αναλυτικής συνάρτησης $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($i = \sqrt{-1}$) ικανοποιούν την εξίσωση $Laplace$, αυτό άμεσα προκύπτει από τις συνθήκες $Cauchy - Riemann$:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{5}$$

Μια συνάρτηση η οποία επαληθευει την εξίσωση $Laplace$ ονομάζεται *αρμονική συνάρτηση*. Τέτοιες συναρτήσεις παίζουν πολύ συμαντικό ρόλο στα Καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Παράδειγμα V (βλ. σχήμα 5). Έστω τώρα $\rho(t,x,y,z)-$ πυκνότητα στο σημείο $(x,y,z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho \, dxdydz,$$

μας δίνει την συνολική μάζα του Ω. Έστω $\mathbf{u} = (u,v,w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού. Από τον νόμο διατήρησης της μάζας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής μάζας καθορίζεται από την ροή της μάζας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές της μάζας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}\cdot\nu \, ds + \int_\Omega f \, dxdydz.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dxdydz = -\int_\Omega div(\rho\,\mathbf{u}) \, dxdydz + \int_\Omega f \, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \big(\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) - f\big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = f.$$

Συνήθως παίρνουνε $f \equiv 0$, δηλαδή

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\, div\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Αν θα υποθέσουμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή, το οποιο σημαίνει οτι η ύλη είναι ασυμπίεστη, τότε απο την (6) προκύπτει

$$div\,\mathbf{u} = 0,$$

αυτή η συνθήκη ονομάζεται *συνθήκη ασυμπιεστότητας*.

Το διανυσματικό πεδίο $(x(t),y(t),z(t))$ περιγράφει την θέση ενός σημείου τη χρονική στιγνή t. Η καμπύλη $\overline{\sigma}(t) = (x(t),y(t),z(t))\; t \in (t_0,T)$ ονομάζεται *τροχιά*. Το διανυσματικό πεδίο $(x'(t),y'(t),z'(t))$ περιγράφει την ταχύτητα το σημείου αυτού αρα η καμπύλη $\overline{\sigma}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ ορίζεται από το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Αν η ύλη είναι ασυμπίεστη τότε η πυκνότητα κατά μήκος της τροχιάς πρέπει να είναι σταθερή (οχι απαραίτητα σταθερή παντου οπως είχαμε υποθέσει πιο πάνω), δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\rho(t,\overline{\sigma}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\rho(t,x(t),y(t),z(t)) = 0.$$

Απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dt}\rho(t,x(t),y(t),z(t)) = \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho_z w \equiv \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho,$$

άρα

$$\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{7}$$

Προφανώς από την (6) και την (7) πάλι προκύπτει η συνθήκη ασυμπιεστότητας $div\,\mathbf{u} = 0$.

Σε μία διάσταση η εξίσωση (7) γράφεται ως εξής

$$\rho_t + u\,\rho_x = 0.$$

Παράδειγμα VI. Τέλος θα δώσουμε (χωρίς λεπτομέρειες) τις εξισώσεις που περιγράφουν τη *διάδοση των ακουστικών κυμάτων*:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0, \;\; p_t + \rho_0 c_0^2 u_x = 0, \tag{8}$$

εδώ η $u(t,x)$ είναι η ταχύτητα, η $p(t,x)$ είναι η πίεση και ρ_0, c_0 δοσμένες θετικές σταθερές, ρ_0 είναι η πυκνότητα και η σταθερά c_0 έχει να κάνει με την συμπιεσιμότητα της ύλης.

Παρατηρούμε ότι αν παραγωγίσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t, τη δεύτερη ως προς x και μετά αφαιρέσουμε την δεύτερη από την πρώτη θα έχουμε την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0$$

(αν παραγωγίσουμε την πρώτη ως προς x και θα την πολλαλπλασιάσουμε με c_0^2, τη δεύτερη ως προς t και μετά αφαιρέσουμε την πρώτη από την δεύτερη θα έχουμε κυματική εξίσωση για την πίεση $p_{tt} - c_0^2 p_{xx} = 0$.)

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και πολλά άλλα παραδείγματα, από την δυναμική των πληθυσμών έως την χρηματοοικονομία, και προφανώς από την Φυσική.

Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις) καλούνται εξισώσεις με μια άγνωστη συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, που εκτός ενδεχομένως από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές περιέχουν και μερικές παραγώγους της συνάρτησης.

Τάξη μιας εξίσωσης καλείται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Παραδείγματος χάριν οι (1), (2), (3), (4) είναι δεύτερης τάξης ενώ οι (6), (7) είναι πρώτης. Το σύστημα (5) και (8) είναι σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a(\mathbf{x})\,u = f(\mathbf{x}), \tag{9}$$

γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a(\mathbf{x})\,u = f(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Εδώ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, οι $a_{i,j}$, a_i, a και f είναι δοσμένες συναρτήσεις ενώ η $u(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση που πρέπει να προσδιορίσουμε. Στις εξισώσεις που περιγράφουν χρονοεξαρτώμενες διαδικασίες αντί για x_1 (ή x_n) συνήθως γράφουμε t.

Λύση της (9) σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζουμε μια συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω η οποία επαληθεύει την (9) σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Παρομοίως λύση της (10) σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζουμε μια συνάρτηση μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω η οποία επαληθεύει την (10) σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$.

Στο μάθημα αυτό θα περιοριστούμε με εξισώσεις που έχουν μόνο δυο ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή.

Π.χ. για $n = 2$ οι συνάρτησεις

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \;\; u(x, y) = x\,y$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

δηλαδή αρμονικές συναρτήσεις. Οι συνάρτησεις

$$u(t, x) = e^{-t}\sin x, \;\; u(t, x) = e^{-t}\cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_t = u_{xx},$$

ενω οι συνάρτησεις

$$u(t, x) = \cos t\,\sin x, \;\; u(t, x) = \sin t\,\cos x$$

είναι λύσεις της εξισώσης

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

Εξίσου εύκολα διαπιστώνουμε οτι οι συναρτήσεις

$$u(t, x) = t + x, \;\; u(t, x) = \sin(t + x), \;\; u(t, x) = e^{t+x}$$

έναι λύσεις της εξίσωσης

$$u_t - u_x = 0.$$

1. Εξισώσεις πρώτης τάξης

Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξεως. Θέλουμε να βρούμε τη λύση $u(t,x)$ της εξίσωσης

$$u_t + u_x = 0. \tag{1.1}$$

Γνωρίζουμε οτι η παράγωγος της u κατα κατεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = \nabla u \cdot \overline{\nu} = u_t \nu_1 + u_x \nu_2.$$

Αρα αν θα πάρουμε $\nu_1 = \nu_2 = \sqrt{2}/2$ τότε η (1.1) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} = 0. \tag{1.2}$$

Τι σημαίνει αυτο; Προφανώς το διάνυσμα $\overline{\nu} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ορίζει στον $\mathbf{R}^2$ μια οικογένεια ευθειών

$x - t = C$ (βλ. σχήμα 1.1)

και η σχέση (1.2) μας λέει ότι κατα μήκος αυτών των ευθειών η $u(t,x)$ δεν μεταβάλλεται, δηλαδή οταν $x - t = C$ η u ειναι σταθερά συνεπώς έχει τη μορφή

$$u(t,x) = g(x-t) \tag{1.3}$$

όπου g τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση, ευκολα διαπιστώνουμε οτι

$$u_t + u_x = -g'(x-t) + g'(x-t) = 0.$$

Ο τύπος (1.3) μας δίνει τη γενική λύση της (1.1).

Προβλήμα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της (1.1) στον $\mathbf{R}^2$ η οποία επαληθευει τη συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty, \tag{1.4}$$

όπου $\phi(x)$ μια δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η (1.4) ονομάζεται αρχική συνθήκη. Απο την (1.3) άμεσα προκύπτει οτι η λύση του προβλήματος (1.1), (1.4) δίνεται απο τον τύπο

$$u(t,x) = \phi(x-t).$$

Π.χ. αν $\phi(x) = \sin x$, τότε $u = \sin(x-t)$, αν $\phi(x) = x^2 + e^x - 1$, τότε $u = (x-t)^2 + e^{x-t} - 1$ και ούτω καθεξής.

Θα αναρωτηθούμε τωρα τι θα συμβεί αν στο πρόβλημα $Cauchy$ (1.1), (1.4) οι αρχικές συνθήκες (1.4) είναι δοσμένες όχι σε όλο τον $\mathbf{R}$ αλλά μόνο σε ένα διάστημα (a,b) ; Δηλαδή η συνάρτηση $\phi(\xi)$ δίνεται μόνο για $\xi \in (a,b)$. Αφου η λύση είναι $u = \phi(x-t)$, είναι προφανές οτι η $u(t,x)$ ορίζεται μόνο για $x - t \in (a,b)$ δηλαδή σε μια λωρίδα

$a < x - t < b$ (βλ. σχήμα 2.1)

Περνάμε στην πιο γενική εξίσωση

$$u_t + a(t,x)u_x = f(t,x,u) \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}. \tag{1.5}$$

Εδώ a και f δοσμένες συνεχείς (φραγμένες σε φραγμένα χωρία) συναρτήσεις. Έστω

$$\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s)) \;\; (\overline{\sigma} : s \to (t(s), x(s)) \;\; (\text{βλ. σχήμα } 3.1)$$

μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $u(t,x)$ πάνω στην $\overline{\sigma}$ (περιορισμός της u στην $\overline{\sigma}$), δηλαδή

$$u(t(s), x(s)) = u(s).$$

Προφανώς, απο τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{d}{ds}u(t(s), x(s)) = u_t(t(s), x(s))\frac{dt}{ds} + u_x(t(s), x(s))\frac{dx}{ds}.$$

Αν

$$\frac{dt}{ds} = 1 \;\; \text{και} \;\; \frac{dx}{ds} = a(t(s), x(s))$$

τότε η εξίσωση (1.5) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Για να βρούμε τη λύση αρκεί να ολοκληρώσουμε ως προς s.

Αν $t(0) = 0$ τότε $t = s$ και η καμπύλη γράφεται ως

$$\overline{\sigma}(t) = (t,\, x(t)),$$

η εξίσωση (1.5) κατά μήκος της καμπύλης θα παρει την μορφή

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

αφου πάνω στην καμπύλη $u(t) = u(t, x(t))$.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.5) η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; |x| < +\infty \tag{1.6}$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$\bar{\sigma}(0) = \big(t(0), x(0)\big) = (0, x_0), \;\; (\overline{\sigma} : 0 \to (0, x_0)).$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d\,t(s)}{d\,s} = 1, \;\; \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s), x(s))$$

με αρχικές συνθήκες

$$t(0) = 0, \;\; x(0) = x_0.$$

Προφανώς $t = s$, άρα έχουμε

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t)), \;\; x(0) = x_0$$

και η εξήσωση (1.5) γράφεται ως εξής

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

(εδω $u(t) = u(t, x(t))$) με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u(0, x(0)) = \phi(x(0)) = \phi(x_0).$$

Η εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t))$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** και η λύση της ονομάζεται **χαρακτηριστική**. Για να λύσουμε την εξίσωση (1.5) πρέπει να λύσουμε το σύστημα

(1.7)
$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t, x(t))$$
$$\frac{d\,u(t)}{d\,t} = f(t, x(t), u(t)).$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.7) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση, η δεύτερη είναι η (1.5) κατά μήκος της χαρακτηριστικής. Για να λύσουμε την πρόβλημα (1.5), (1.6) προσθέτουμε στο (1.7) τις αρχικές συνθήκες

(1.8)
$$x(0) = x_0,$$
$$u(0) = \phi(x_0).$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο εξής: η επίλυση του προβλήματος (1.5), (1.6) ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος (1.7), (1.8). Τη λύση τη βρίσκουμε σε παραμετρική μορφή $(x(t), u(t))$ και μετά εκφράζουμε τη u ως συνάρτηση των t, x σε κλειστή μορφή (αυτό δεν είναι πάντα εφικτό).

Υπο ποιές προυποθέσεις το πρόβλημα (1.5), (1.6) έχει μοναδική λύση θα το μάθετε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Μπορούμε, φυσικά και να μην την κάνουμε την απλοποίηση $t = s$, τότε αντι (1.7) θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{d\,t}{d\,s} = 1, \quad \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s), x(s)), \quad \frac{d\,u(s)}{d\,s} = f(t(s), x(s), u(s)).$$

Θα βρούμε τη λύση σε παραμετρική μορφή $(t(s), x(s), u(s))$ και θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη u ως συνάρτηση των t, x.

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + au_x = b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad u(0, x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = at + x_0 \text{ χαρακτηριστική (σχήμα 4.1)}$$

$$\frac{du}{dt} = b, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = bt + \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = bt + \phi(x - at).$$

Έστω $a = b = 1$, $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = t + e^{x-t}.$$

Έστω $a = -1$, $b = 2$, $\phi(x) = \sin x$, τότε

$$u(t,x) = 2t + \sin(x+t).$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + a\,u_x = b$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x - at =$σταθερά η $u(t)$ επαληθεύει την εξίσωση $u'(t) = b$, δηλαδή $u = bt + C$ όπου η C είναι μια ποσότητα η οποία είναι σταθερή όταν η διαφορά $x - at$ είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = bt + g(x - at)$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση. (Προφανώς για τυχαία συνάρτηση g η $g(x - at)$ είναι σταθερά αν και μόνο αν η $x - at$ είναι σταθερά).

Παράδειγμα 1.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + x\,u_x = 0, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^t \quad \text{χαρακτηριστική} \quad (\text{σχήμα } 5.1)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}).$$

Αν $\phi(x) = x$, τότε η λύση είναι

$$u(t,x) = x\,e^{-t}.$$

Αν $\phi(x) = x^2 + 1$,τότε

$$u(t,x) = x^2 e^{-2t} + 1.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + x\,u_x = 0$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x\,e^{-t} =$σταθερά η u είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x\,e^{-t})$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Ας λύσουμε το πρόβλημα αυτό χωρίς την απλοποίηση $s = t$:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad t\Big|_{s=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad t(s) = s,$$

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad x\Big|_{s=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(s) = x_0 e^s,$$

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad u\Big|_{s=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(s) = \phi(x_0).$$

Αφου $x_0 = xe^{-s}$ και $s = t$, προφανώς $u = \phi(x\,e^{-t})$.

Παράδειγμα 1.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + t\,u_x = (t+x)u, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = (t+x)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \big(t + \frac{1}{2}t^2 + x_0\big)dt,$$

άρα

$$u(t) = \phi(x_0)e^{x_0 t + t^3/6 + t^2/2}.$$

Συνεπώς

$$u(t,x) = \phi(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3}$$

Έστω $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = e^{x + tx - t^3/3}.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + t\,u_x = (t+x)u$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3},$$

g τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + (t-x)\,u_x = (x+1-t)e^t \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x) \ \text{ για } \ |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x+1 \ \text{ και } \ \phi(x) \equiv 1.$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = -x + t, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = (x_0+1)e^{-t} + t - 1 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

(εδω λύσαμε εξίσωση πρώτης τάξης $x'(t) + x(t) = t$), συνεπώς η αρχική εξίσωση κατα μήκος της χαρακτηριστικής με την αρχική συνθύκη παίρνει τη μορφή

$$\frac{du}{dt} = x_0 + 1, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(t) = t(x_0+1) + \phi(x_0),$$

άρα

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + \phi\big(e^t(x-t+1) - 1\big)$$

αφού $x_0 = e^t(x-t+1) - 1$.

Αν $\phi(x) = 2x+1$

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + 2e^t(x-t+1) - 1.$$

Για $\phi(x) \equiv 1$

$$u(t,x) = te^t(x-t+1) + 1.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + (t-x)\, u_x = (x+1-t)e^t$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g\big(e^t(x-t+1)-1\big) + te^t(x-t+1),$$

g οπως και πριν, τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση

$$a_1(t,x)u_t + a_2(t,x)u_x = f(t,x,u) \tag{1.9}$$

όπου

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0. \tag{1.10}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = a_1 \;\text{ και }\; \frac{dx}{ds} = a_2$$

τότε η εξίσωση (1.9) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Η συνθήκη (1.10) είναι ουσιαστική, αν παραβιάζεται τότε το πρόβλημα $Cauchy$ μπορεί να μην έχει λύση (βλ. Άσκηση 5.). Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο ισχύει $a_1^2+a_2^2 = 0$ λέμε ότι σε αυτό το σημείο η εξίσωση *εκφυλίζεται.* Παρατηρούμε οτι για την εξίσωση (1.5) η (1.10) πάντα επαληθεύεται.

Θα τελειώσουμε με μία σημαντική παρατήρηση. Ας γράψουμε την εξίσωση (1.9) σε μορφή

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_t + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u_x = \frac{f}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}. \tag{1.11}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ είναι τωρα η καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \;\text{ και }\; \frac{dx}{ds} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

τότε προφανώς

$$\|\overline{\sigma}'(s)\| = \sqrt{t'^2(s) + x'^2(s)} = 1$$

και το αριστερό μέρος της (1.11) είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$.

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με $\phi(x)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση.

1.

$$u_t + x\,u_x = x\,u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \;\; |x| < +\infty.$$

2.
$$u_t + u_x = x(u+1), \quad u(0,x) = cos\, x, \quad |x| < +\infty.$$

3.
$$u_t - (t+x)\, u_x = (x-1+t)e^t, \quad u(0,x) = \phi(x), \quad |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για
$$\phi(x) = 2x - 1 \;\; \text{και} \;\; \phi(x) \equiv -1.$$

4.
$$u_t + u_x = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \phi(x)$$

όπου
$$\phi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{για } \; |x| < \pi/2 \\ 1, & \text{για } \; x \geq \pi/2 \\ -1, & \text{για } \; x \leq -\pi/2 \end{cases}$$

5.
$$u_t - \frac{t}{x}\, u_x = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \phi(|x|), \quad |x| < +\infty.$$

6. Εξετάστε αν το ακόλουθο πρόβλημα έχει λύση
$$u_t - \frac{t}{x}\, u_x = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \quad |x| < +\infty.$$

Στις παρακάτω ασκήσεις να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ και να προσδιορισθεί το χωρίο στον $\mathbf{R}^2$ όπου η αρχική συνθήκη ορίζει τη λύση.

7.
$$u_t + u_x = 4, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin\, x \;\; \text{για} \;\; |x| < 1.$$

8.
$$u_t + x\, u_x = (x+t)u, \qquad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \quad x \in [0,1] \cup [2,3].$$

§2. Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Η (9) για $n = 2$ παίρνει τη μορφή

$$a_{11}u_{xx} + \tilde{a}_{12}u_{xy} + \tilde{a}_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f$$

θεωρούμε ότι $u = u(x, y) \in C^2$(δηλαδή δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη) και γράφουμε την εξίσωση σε μορφή

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f \tag{2.1}$$

όπου

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21}).$$

Οι συναρτήσεις $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ ονομάζονται *συντελεστές* της εξίσωσης και η συνάρτηση $f(x, y)$ το *δεύτερο μέρος* της.

Λέμε ότι η (2.1) είναι στο σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

1.) *υπερβολική* (υπερβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

2.) *ελλειπτική* (ελλειπτικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

3.) *παραβολική* (παραβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Εάν η εξίσωση είναι υπερβολική $\forall(x, y) \in \Omega$ λέμε ότι είναι υπερβολική στο Ω, ανάλογα ορίζεται η ελλειπτικότητα και η παραβολικότητα στο Ω.

Προφανώς η κυματική εξίσωση

$$u_{yy} - u_{xx} = 0$$

είναι υπερβολικού τύπου, (συνήθως αντί για y γράφουμε t επειδή η μεταβλητή αυτή παίζει τον ρόλο του χρόνου), η εξίσωση *Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

είναι ελλειπτικού τύπου, και η εξίσωση θερμότητας

$$u_y - u_{xx} = 0$$

παραβολικού τύπου (και εδώ συνήθως αντί για y γράφουμε t για τον ίδιο λόγο).

Όπως είναι γνωστό, η καμπύλη

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

είναι έλλειψη, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, υπερβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ και παραβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Σε αυτό οφείλουν την ονομασία τους οι τρεις τύποι των εξισώσεων.

Ασκήσεις.

1. Στον $\mathbf{R}^2$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{xx} + 2u_{xy} + yu_{yy} + u_x - u_y - u = 1.$$

Προσδιορίστε τα χωρία όπου η εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου, παραβολικού τύπου, ελλειπτικού τύπου.

2. Προσδιορίστε τον τύπο των ακόλουθων εξισώσεων:

$$u_{xy} = f, \;\; u_y + u_{xx} = f, \;\; xu_{xx} + u_{yy} = f$$

όπου f τυχαία γραμμική συνάρτηση των x, y, u, u_x, u_y.

§3. **Κυματική Εξίσωση, τύπος** $d'Alembert$

Στον $\mathbf{R^2}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \tag{3.1}$$

όπου η f είναι δοσμένη ομαλή συνάρτηση, t - χρόνος, x - χωρική μεταβλητή, u_{tt} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς t και u_{xx} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς x. Ψάχνουμε τη *γενική λύση* $u(t,x)$ της εξίσωσης (3.1).

Έστω $f \equiv 0$, έχουμε

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{3.2}$$

Η (3.2) ονομάζεται ομογενής εξίσωση. Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$(t,x) \to (\xi,\eta)$$

$$u(t,x) \to \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi(t,x),\eta(t,x))$$

όπου

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t.$$

Προφανώς, παραγωγίζοντας την ταυτότητα $u(t,x) \equiv \tilde{u}(\xi,\eta)$, παίρνουμε

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(\xi(t,x),\eta(t,x)) = \tilde{u}_\xi(\xi,\eta)\xi_t + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)\eta_t = -\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta),$$

$$u_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(\xi(t,x),\eta(t,x)) = \tilde{u}_\xi(\xi,\eta)\xi_x + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)\eta_x = \tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta).$$

Παρομοίως για τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)\Big) =$$

$$-\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta)\xi_t - \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)\eta_t + \tilde{u}_{\eta\xi}(\xi,\eta)\xi_t + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta)\eta_t =$$

$$\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta),$$

$$u_{xx}(t,x) = ... = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Άρα

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) \equiv -4\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

συνεπώς η (3.2) παίρνει τη μορφή

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0. \tag{3.3}$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές παίρνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (3.3):

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + \Phi(\eta),$$

όπου F και Φ αυθαίρετες δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης (3.1) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t).$$

Έστω τώρα οι v και w λύσεις της (3.1), δηλαδή

$$v_{tt} - v_{xx} = f \;\; \text{και} \;\; w_{tt} - w_{xx} = f,$$

τότε η $\overline{u} \equiv v - w$ είναι λύση της εξίσωσης (3.2), πράγματι

$$\overline{u}_{tt} - \overline{u}_{xx} = v_{tt} - v_{xx} - (w_{tt} - w_{xx}) = f - f = 0.$$

Άρα αν βρήκαμε κάποια (μερική) λύση της (3.1) π.χ. την w τότε οποιαδήποτε άλλη λύση v της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$v = w + \overline{u}.$$

Τουτ' έστιν ισχύει το εξής

<u>*γενική λύση της*</u> (3.1)=
<u>*μερική λύση της (3.1)*</u> + <u>*γενική λύση της (3.2)*</u>.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

είναι μερική λύση της (3.1). Πράγματι θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau, \quad \text{όπου} \;\; G(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta.$$

Εξ ορισμού της παραγώγου

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big) =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_0^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau - \int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_t^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau + \int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Big[G(t+\Delta t,x,\tau^*) + \frac{1}{\Delta t}\int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$G(t,x,t) + \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau = \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau,$$

όπου $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$. Εδώ αφαιρέσαμε και προσθέσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau$$

και μετά χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τα ολοκληρώματα. Θα υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο G_t, έχουμε

$$G_t(t,x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\Big(\int_0^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta + \int_{x-t+\tau}^0 f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) =$$

$$\frac{1}{2}\big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau \big].$$

Συνεπώς έχουμε

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau) \big] d\tau,$$

$$u_{0tt}(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Παρομοίως

$$u_{0x}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) - f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

$$u_{0xx}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Δηλαδή

$$u_{0tt} - u_{0xx} = f(t,x).$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι η γενική λύση της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau.$$

Πρόβλημα $Cauchy$**.** Να βρεθεί στον $\mathbf{R}^2$ η λύση της εξίσωσης (3.1) η οποία ικανοποιεί τις *αρχικές συνθήκες*

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < +\infty, \tag{3.4}$$

όπου ϕ και ψ δοσμένες ομαλές συναρτήσεις.

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα $Cauchy$ (3.2), (3.4). Η γενική λύση της εξίσωσης (3.2) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t)$$

με αυθαίρετες (ομαλές) F και Φ. Πρέπει να προσδιορίσουμε τις F και Φ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (3.4). Έχουμε

$$u(0,x) = F(x) + \Phi(x) = \phi(x),$$
$$u_t(0,x) = -F'(x) + \Phi'(x) = \psi(x).$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ισότητα παίρνουμε

$$-F(x) + \Phi(x) + C = \int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta,$$

με C αυθαίρετη σταθερά. Τώρα χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα καταλήγουμε στο

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

και

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

Συνεπώς

$$\Phi(x+t) = \frac{1}{2}\phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

$$F(x-t) = \frac{1}{2}\phi(x-t) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

και η λύση του προβλήματος (3.2), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος** $d'Alembert$.

Παράδειγμα 3.1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = x \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση: Έχουμε $\phi(x) = \sin\, x$, $\psi(x) = x$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \zeta d\zeta = \sin\, x\, cos\, t + xt.$$

Περνάμε τώρα στην γενική περίπτωση, θεωρούμε το πρόβλημα $Cauchy$ (3.1), (3.4). Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι για την

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

έχουμε

$$u_0(0,x) = 0.$$

Επίσης

$$u_{0t}(0,x) = 0,$$

διότι

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (3.1), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \tag{3.5}$$

$$\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin\, 2x, \;\; u_t(0,x) = 0 \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) = \sin\, 2x$, $\psi(x) = 0$, $f(t,x) = 1$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(2(x+t))+\sin(2(x-t))}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)d\tau =$$

$$\sin\, 2x\, cos\, 2t + \frac{t^2}{2}.$$

Παρατήρηση 1. Για να είναι η λύση του προβλήματος (3.1), (3.4) δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ($u(t,x) \in C^2$) πρέπει $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$, $f(t,x) \in C^1$.

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ προκύπτει άμεσα ά-πο τον τρόπο κατασκευής της λύσης μέσω της γενικής λύσης της εξίσωσης. Πράγματι έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty,$$

$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x), \;\; v(0,x) = \phi(x), \;\; v_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w \equiv u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0$$

και

$$w(0,x) = w_t(0,x) = 0 \;\; |x| < \infty.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι $F(x-t) + \Phi(x+t)$ και επαληθεύοντας τις μηδενικές αρχικές συνθήκες καταλήγουμε στο ότι $F \equiv \Phi \equiv 0$ άρα

$$w \equiv 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; u \equiv v.$$

Ας επιστρέψουμε τωρα στο προβλημα (3.2), (3.4). Είναι προφανές οτι αν οι αρχικές συνθήκες είναι μήδεν, τότε και η λύση είναι μηδεν για κάθε t. Έστω τώρα $a > 0$ και

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

(σχήμα 1.3). Ας πάρουμε ένα σημείο $(t_0 \neq 0, x_0)$, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς ας πάρουμε $x_0 = 0$, έχουμε

$$u(t_0, 0) = \frac{\phi(t_0) + \phi(-t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t_0}^{t_0} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Αν ο χρόνος $|t_0| < a$, τότε $u(t_0,0) = 0$ δηλαδή $u(t,0) = 0 \; \forall t \in (-a,a)$. Μόνο όταν ο χρόνος θα φτάσει στο a $(-a)$ η λύση θα ¨νιώσει¨ την διαταραχη που είχε γίνει στην αρχική στιγμή $t = 0$. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών.*

Παράδειγμα 3.3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\; \text{στον} \;\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\; \text{για} \;\; |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [-1,1] \;\; \text{και} \;\; \phi(x) > 0 \;\; \text{για} \;\; x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1],$$

$$\psi(x) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; x \in [0,1] \;\; \text{και} \;\; \psi(x) > 0 \;\; \text{για} \;\; x \in \mathbf{R} \setminus [0,1].$$

Προσδιορίστε το χωρίο στο άνω ημιεπίπεδο $(t > 0)$ όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta$$

Για να ισχύει $u(t,x) = 0$ πρέπει $\phi(x+t) = 0$, $\phi(x-t) = 0$ και $\psi(\zeta) = 0$. Άρα

$$x+t \in [-1,1], \quad x-t \in [-1,1]$$

και

$$x+t \in [0,1], \quad x-t \in [0,1].$$

Συνεπώς

$$0 \le x+t \le 1, \quad 0 \le x-t \le 1$$

δηλαδή ρόμβος με κορυφές στα σημεία (0,0), (1,0), (1/2,1/2), (1/2, -1/2).

Παράδειγμα 3.4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in (-1,0) \ \text{ και } \ \phi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (-1,0),$$

$$\psi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in (1,2) \ \text{ και } \ \psi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (1,2).$$

Προσδιορίστε το χωρίο στο άνω ημιεπίπεδο $t > 0$ όπου ισχύει $u(t,x) > 0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta$$

Αφού οι ϕ και ψ είναι μη αρνητικές για να ισχύει $u(t,x) > 0$ σε ένα σημείο (t,x) αρκεί στο σημείο αυτο να ισχύει ενα απο τα παρακάτω

$$\phi(x+t) > 0 \ \text{ ή } \ \phi(x-t) > 0$$

ή στο διάστημα $(x-t, x+t)$ η ψ να έιναι κάπου θετική, δηλαδή

$$x+t \in (-1,0) \ \text{ ή } \ x-t \in (-1,0)$$

ή

$$(x-t, x+t) \cap (1,2) \ne \emptyset.$$

$\Big($Υπό την προϋπόθεση $x - t \le x + t \Leftrightarrow t \ge 0$ αλλιώς το ολοκλήρωμα $\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta) d\zeta$ μπορεί να είναι αρνητικό.$\Big)$

Συνεπώς το ζητούμενο χωρίο είναι το εξής (βλ. σχήμα 2.3)

$$\{(t,x) : t \ge 0, \ -1 < x+t < 0\} \cup \{(t,x) : t \ge 0, \ -1 < x-t < 0\} \cup$$
$$\{(t,x) : t \ge 0, \ 1 < x-t < 2\} \cup \{(t,x) : t \ge 0, \ 1 < x+t < 2\} \cup$$
$$\{(t,x) : t \ge 0, \ x-t < 1, \ x+t > 2\}.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad a \ne 0 \ \text{ σταθερά}$$

ανάγεται με αντικατάσταση $y = x/a$ στην εξίσωση

$$u_{tt} - u_{yy} = f(t, y)$$

(συνεπώς χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $a = 1$.)

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = t + x \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0, x) = x^3, \;\; u_t(0, x) = \sin\, 2x \text{ για } |x| < \infty.$$

3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t, x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \;\; u_t(0, x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \text{ για } x \in \mathbf{R} \setminus (0, 1) \text{ και } \phi(x) > 0 \text{ για } x \in (0, 1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \text{ στον } \mathbf{R}.$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t, x) > 0$.

4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t, x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \;\; u_t(0, x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \text{ στον } \mathbf{R},$$

$$\psi(x) \equiv 0 \text{ για } x \in \mathbf{R} \setminus (-1, 0) \text{ και } \psi(x) > 0 \text{ για } x \in (-1, 0).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t, x) \equiv 0$.

5. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t, x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \;\; u_t(0, x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \text{ για } x \in \mathbf{R} \setminus (0, 1) \text{ και } \phi(x) < 0 \text{ για } x \in (0, 1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \text{ στον } \mathbf{R} \setminus (2, 3) \text{ και } \psi(x) < 0 \text{ για } x \in (2, 3),$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t, x) < 0$.

§4. **Σειρές** $Fourier$

Ένα σύστημα συναρτήσεων $\{\psi_m\}$ ή $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\psi_0,\ \ \psi_1,\ \ \psi_2,\ \ ...,\ \ \psi_m,\ \ ...$$

ονομάζεται **ορθοκανονικό στο διάστημα** (a, b) αν

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a, b), δηλαδή

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty.$$

Οι αριθμοί

$$c_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

ονομάζονται συντελεστές $Fourier$ της $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$.

Ορισμός. *Η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k(x)$$

ονομάζεται σειρά $Fourier$ *της συνάρτησης* $f(x)$ *ως προς το σύστημα* $\{\psi_k\}$.

Έστω τώρα έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα** $\{\phi_k\}$ στο (a, b), δηλαδή

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} C \neq 0, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Το σύστημα $\{\psi_k\}$ με

$$\psi_k = \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|} \ \text{ όπου } \ \|\phi_k\| = \Big(\int_a^b \phi_k^2(x)dx\Big)^{1/2}$$

θα είναι ορθοκανονικό. Πράγματι

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \frac{1}{\|\phi_m\|\|\phi_n\|}\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Προφανώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\|\phi_k\|}\phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\phi_k$$

με c_k- συντελεστες $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$ και $\tilde{c}_k = c_k\|\phi_k\|^{-1}$-συντελεστές $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$. Για τα $\tilde{c}_k$ έχουμε

$$\tilde{c}_k = \frac{c_k}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\psi_k\,dx}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\phi_k\,dx}{\|\phi_k\|^2}. \tag{4.1}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύστημα

$$\{\phi_k\}: \qquad 1,\ \ cos\frac{k\pi}{l}x,\ \ \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ k = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

($\|\phi_0\| = \sqrt{2l}$, $\|\phi_k\| = \sqrt{l}$, $k = 1, 2, ...$) είναι ορθογώνιο στο $(-l, l)$, ενώ το σύστημα

$$(4.3) \qquad \{\psi_k\}: \qquad \frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \frac{1}{\sqrt{l}} cos\frac{k\pi}{l}x, \ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x, \ \ k = 1, 2, ...$$

είναι ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

Θεωρούμε τους συντελεστές $Fourier$ της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$ (βλ. (4.1)):

$$(4.4) \qquad \alpha_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \ \ \beta_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, \sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$k = 0, 1, 2, ...$. Η σειρά $Fourier$:

$$(4.5) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά** της $f(x)$. Στο εξής την (4.5) θα την ονομάζουμε ή σειρά $Fourier$ ή τριγωνομετρική σειρά.

Παρατηρήση 1. Στο (4.4) συμφωνα με το (4.1) θα έπρεπε να είχαμε γράψει $k = 1, 2, ...$ και $\alpha_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ (αφου $\|\phi_0\|^2 = 2l$) και στη σειρά (4.5) αντι $\alpha_0/2$ θα είχαμε α_0. Το κάνουμε λίγο διαφορετικά για να ορίζουμε τους συντελεστές α_k με ενιαίο τρόπο (4.4) για όλα τα k.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[-l, l]$. Προφανώς η $f(x)$ μπορεί να επεκταθεί περιοδικά στον $\mathbf{R}$ με περίοδο $2l$. Το ερώτημα είναι πότε ισχύει η ισότητα

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big)\,?$$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη). *Αν η $f(x)$ είναι φραγμένη περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2l$ και μπορεί να έχει ασυνέχειες μόνο πρώτου είδους, τότε η τριγωνομετρική σειρά της $f(x)$ συγκλίνει σε όλο τον $\mathbf{R}$ και στα σημεία όπου η $f(x)$ είναι συνεχής ισχύει*

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big),$$

ενώ στα σημεία όπου η $f(x)$ είναι ασυνεχής ισχύει

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + \beta_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big).$$

Π.χ. οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin x, \ \ x \in [-\pi, \pi], \qquad f(x) = 1 - x^2, \ \ x \in [-1, 1]$$

επαληθεύουν τις προυποθέσεις του θεωρήματος αφού τις επεκτείνουμε περιοδικά, την πρώτη με περιοδο 2π και τη δευτερη με περίοδο 2 (βλ. σχ. 1.4 και

2.4 αντίστοιχα). Επίσης και στις δυο περιπτώσεις οι αντίστοιχες τριγονομετρικές σειρές (σειρες $Fourier$) παριστάνουν τις συναρτήσεις σε όλο τον $\mathbf{R}$. Στην πρώτη περίπτωση η συνάρτηση ήδη είναι γραμμενή σε μορφή τριγωνομετρικής σειράς με $a_k = 0$ $k = 0, 1, 2, ...$ και $b_1 = 1$, $b_k = 0$ $k = 2, ...$

Για την συνάρτηση π.χ.

$$f(x) = x^3,\ \ x \in [-1, 1],\ \ \text{και}\ \ f(x \pm 2) = f(x)\ \ \text{για}\ \ |x| > 1\ \ (\text{βλ. σχήμα 3.4})$$

έχουμε οτι η σειρά $Fourier$ της f θα την παριστάνει μόνο στα σημεία όπου η f είναι συνεχής, ενώ στα σημεία ασυνέχειας η σειρά θα ισούται με μηδέν.

Προφανώς η συνάρτηση $f(x) \equiv 1$ $x \in [0, \pi]$ (βλ. σχήμα 4.4) παριστάνεται απο την τριγωνομετρική σείρα της (4.5). Πράγματι, χρησιμοποιώντας τους τύπους (4.4) θα έχουμε $\alpha_0 = 2$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ για $k = 1, 2, ...$ Μπορούμε να βρούμε τη σειρά $Fourier$ μόνο ως προς τα $\sin$; Η απάντηση είναι *ναι.* Πράγματι, κάνουμε περριτή επέκταση της f στο $[-\pi, 0]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{για}\ \ x \in [0, \pi] \\ -1, & \text{για}\ \ x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

και μετά την επεκτείνουμε περιοδικά με περίοδο 2π (βλ. σχήμα 5.4). Για την καινούργια συνάρτηση έχουμε ότι η τριγωνομετρική σείρα της παίρνε τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$$

με

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\, kx\, dx = \frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο}\ \ k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο}\ \ k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Όμως η σειρά αυτή παριστάνει την $f \equiv 1$ μονο στα σημεία όπου η f είναι συνεχής, δηλαδή σε όλα τα σημεία εκτός απο $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Παράδειγμα 4.1. Να βρεθεί η σειρά $Fourier$ της

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2}, & \text{για}\ \ x \in [-\pi, 0) \\ \frac{\pi - x}{2}, & \text{για}\ \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Λύση. Κατ αρχάς παρατηρούμε οτι η $f(x)$ (βλ. σχήμα 6.4) είναι περριτή ως προς το σημείο $x = 0$, πράγματι

$$\text{αν}\ \ x \in (0, \pi]\ \ \text{τότε}\ \ f(-x) = \Big(\frac{-\pi + x}{2} = -\frac{\pi - x}{2} = \Big) - f(x)$$

και για $x \in [-\pi, 0]$ επίσης

$$f(-x) = \Big(\frac{\pi + x}{2} = -\frac{-\pi - x}{2} = \Big) - f(x)$$

Ας κάνουμε την περιοδική επέκταση της f στον $\mathbf{R}$ με περίοδο 2π (βλ. σχήμα 7.4). Υπολογίζουμε τους συντελεστές $Fourier$. Προφανώς (βλ. (4.4))

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx = 0\ \ \text{για}\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

ως ολοκλήρωμα περριτής συνάρτησης (βλ. Παρατήτηση 3 κάτω). Για β_k έχουμε

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin kxdx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi - x}{2}\,\sin kxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\,\sin kxdx = \frac{1}{k}.$$

Συνεπώς, συμφωνα με την Παρατήρηση 1,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\, kx}{k} \quad \text{εκτός απο τα σημεία} \;\; x = 0,\, \pm 2\pi k.$$

Π.χ.

$$f(1) = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}.$$

Παρατηρήση 2. Προφανώς η τριγωνομετρική σειρά θα προκύψει και αν θα θεωρήσουμε την σειρά $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$:

$$\frac{\bar{a}_0}{2\sqrt{l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\bar{a}_k \frac{1}{\sqrt{l}} cos\frac{k\pi}{l}x + \bar{b}_k \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

όπου

$$\bar{a}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \;\; \bar{b}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

Παρατηρήση 3. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή ως προς το σημείο $x = 0$, τότε $\alpha_k = 0$ για κάθε k.

Πράγματι (βλ. και το Παράδειγμα 4.1), το ολοκλήρωμα από $-l$ εως l μιας περιττής ως προς το $x = 0$ συνάρτησης είναι μηδέν. Το $\cos\frac{k\pi}{l}x$ είναι άρτια ως προς το $x = 0$ συνάρτηση. Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός ότι γινόμενο άρτιας ($\cos$) και περιττής (f) συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.2. Αποδείξτε οτι η ακόλουθη σειρά συγκλίνει για κάθε x

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\, kx}{k^2}.$$

Λύση. Προφανώς για τυχαίο x_0 έχουμε

$$\Big|\frac{\sin\, kx_0}{k^2}\Big| \le \frac{1}{k^2}.$$

Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός οτι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

είναι συγκλίνουσα (κριτήριο λόγου $d'Alembert$). Εδω μάλιστα έχουμε απόλυτή σύγκλιση.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι αν η $f(x)$ είναι άρτια ως προς το σημείο $x = 0$, τότε στη σειρά (4.5) $\beta_k = 0$ για κάθε k.

2. Διαπιστώστε ότι το σύστημα (4.2) είναι όντως ορθογώνιο στο $(-l, l)$ και το σύστημα (4.3) ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

3. Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k}.$$

Αποδείξτε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει για κάθε x, ενω η δεύτερη αποκλίνει.

Υπόδειξη: i. Παρατηρήστε ότι

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad |S_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

και μετά χρησιμοποιήστε το κριτήριο $Dirichlet$.

ii. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα

$$\frac{|\sin kx|}{k} \geq \frac{1}{2k}(1 - \cos 2kx) = \frac{1}{2k} - \frac{\cos 2kx}{2k}.$$

4. Αποδείξτε ότι για $x \in (0, 2\pi)$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

§5. Μέθοδος Fourier για κυματική εξίσωση.

Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για την κυματική εξίσωση (βλ. σχήμα 1.5): Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T = \{(t,x) : |t| < \infty,\ \ 0 < x < l\}$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u(0,x) = \phi(x),\ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t),\ \ u(t,l) = \mu_2(t) \text{ για } |t| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f(t,x) \in C^1((-T,T) \times [0,l])\ \ \forall T > 0,\ \ \phi(x) \in C^2([0,l]),\ \ \psi(x) \in C^1([0,l])$$

και

$$\phi(0) = \mu_1(0),\ \ \psi(0) = \mu_1'(0),\ \ \phi(l) = \mu_2(0),\ \ \psi(l) = \mu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση (βλ. σχήμα 2.5)

$$h(t,x) = \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Προφανώς για $v(t,x) = u(t,x) - h(t,x)$ έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - \big(h_{tt} - h_{xx}\big) =$$

$$f(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1''(t) + \frac{x}{l}\mu_2''(t) = f_1(t,x)$$

και

$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(0) + \frac{x}{l}\mu_2(0),$$

$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1'(0) + \frac{x}{l}\mu_2'(0),$$

$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x),\ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l \tag{5.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{5.3}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$$

(βλ. σχήμα 3.5). Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T \tag{5.4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (5.4) και παίρνουμε

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ για κάθε } t \text{ και } x$$

συνεπώς

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά. Άρα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \tag{5.5}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{5.6}$$

Αν $\lambda \le 0$, τότε $X(x) \equiv 0$. Πράγματι, για $\lambda < 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

και για $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Και στις δυο περιπτώσεις οι συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ μας δίνουν $C_1 = C_2 = 0$. Τωρα για $\lambda > 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\, cos\sqrt{\lambda}x,$$

από τις συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ προκύπτει ότι

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

άρα $\sqrt{\lambda}l = \pi k$ (αφού θέλουμε $X(x) \not\equiv 0$). Συνεπώς για

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (5.5):

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (5.6) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big) \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (5.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (5.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (5.2). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ περιττά στο $(-l,0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{5.7}$$

(αφου ϕ και ψ περιττές ως προς $x=0$) όπου

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\phi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\,X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.8}$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (5.4) και τις συνοριακές συνθήκες (5.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (5.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x)=\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k=a_k.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}B_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x)=\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_k=\frac{l}{k\pi}b_k.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (5.4), (5.2), (5.3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t+\frac{l}{k\pi}b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.9}$$

Η απόδειξη της σύγκλισης της σειράς (5.9) και των σειρών:

$$u_t=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[-\frac{k\pi}{l}a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}t+b_k\, cos\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_x=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t+\frac{l}{k\pi}b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\frac{k\pi}{l}cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{tt}=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t+\frac{l}{k\pi}b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{xx}=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t+\frac{l}{k\pi}b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

θα δοθεί στο μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \ \text{ στο } \ Q_T=\{t,x): |t|<\infty, 0<x<\pi\}$$
$$u(0,x)=\sin\,x+\sin\,4x,\ \ u_t(0,x)=\sin\,x+\sin\,2x,$$
$$u(t,0)=u(t,\pi)=0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x)=\sin\,x+\sin\,4x,$$
$$\psi(x)=\sin\,x+\sin\,2x.$$

Συνεπώς $a_1=1$, $a_4=1$, $a_k=0$ για $k\neq 1,4$ $b_1=b_2=1$, $b_k=0$ για $k>2$. Αρα η λύση είναι

$$u(t,x)=(cos\,t+\sin\,t)\sin\,x+\frac{1}{2}\sin\,2t\,\sin\,2x+cos\,4t\sin\,4x.$$

Για τον υπολογισμό των a_k, b_k προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους στην προηγούμενη σελίδα (φυσικά με το ίδιο αποτέλεσμα), αυτο όμως στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι απαραίτητο αφού οι ϕ και ψ είναι ήδη γραμμένες σε μορφή σειράς $Fourier$.

Συνοψίζοντας παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση $u(t,x)$ για κάθε σταθεροποιημένο t σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{5.10}$$

(βλ. (5.8)) και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (5.10) στην (5.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (5.2).

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (5.1)-(5.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (5.10). Πρώτα γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{5.11}$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) \, \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx.$$

Παρατήρηση 1. Η ισότητα (5.11) εν γένει ισχύει μόνο για $x \in (0,l)$ και οχι για $x = 0$, $x = 1$ οπου η σειρά $Fourier$ μπορεί να μην παριστάνει την f (βλ. σελ. 84-85). Αυτο δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα επειδή η εξίσωση (5.1) θέλουμε να επαληθευεται για $x \in (0,l)$ και όχι για $x \in [0,l]$.

Έστω ότι η σειρά (5.10) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (5.10) στην εξίσωση (5.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (5.11) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t). \tag{5.12}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε (βλ. (5.7))

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

δηλαδή

$$u_k(0) = a_k, \;\; u_k'(0) = b_k. \tag{5.13}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (5.12) είναι

$$u_k(t) = C_{1k} cos \frac{k\pi}{l} t + C_{2k} \sin \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau) \, \sin \frac{k\pi}{l} (t-\tau) d\tau, \tag{5.14}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (5.13), πρέπει

$$C_{1k} = a_k, \;\; C_{2k} = \frac{l}{k\pi} b_k.$$

Πράγματι άπο (5.14), (5.13) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k, \;\; u_k'(0) = \frac{k\pi}{l} C_{2k} = b_k.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (5.12), (5.13) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,$$

$k = 1, 2, ...$ και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ για την εξίσωση (5.1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{5.15}$$

υπό την προϋπόθεση οτι και η δεύτερη σειρά στην σχέση (5.15) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν θα παραγωγίσουμε την δεύτερη σειρά όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t (η απόδειξη της σύγκλισης είναι παρόμοια με αυτήν των σειρών (5.7), (5.8)).

Παρατήρηση 2. Επειδή είναι δύσκολο να θυμάται κανείς τον τύπο (5.15) καλύτερα να θυμάστε την διαδικασία η οποία μας οδήγησε σε αυτόν.

Παράδειγμα 5.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\, x, \;\; (t,x) \in (-\infty,\infty)\times(0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = \sin 3x, \;\; x \in (0,\pi).$$

Λύση. Αντικαθιστόντας την σειρα

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\, kx$$

στην εξίσωση για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_1'' + u_1 = 1, \;\; u_1(0) = 1, \;\; u_1'(0) = 0,$$
$$u_3'' + 9u_3 = 0, \;\; u_3(0) = 0, \;\; u_3'(0) = 1,$$
$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \;\; u_k(0) = 0, \;\; u_k'(0) = 0, \;\; k \neq 1, 3.$$

Άρα

$$u_1(t) \equiv 1, \;\; u_3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t, \;\; u_k(t) \equiv 0 \;\; k \neq 1, 3$$

και

$$u(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\,\sin 3x.$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν θα αντικαταστήσουμε στην σειρά (3.15) $a_1 = 1, a_k = 0$ για $k > 1$, $b_3 = 1$, $b_k = 0$ για $k \neq 3$, $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k > 1$.

Παράδειγμα 5.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \;\text{ στο }\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \;\; u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, άρα $a_k = b_k = 0$ $\forall k$ και (από τον τύπο 4.15)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)\, \sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\, d\tau\Big] \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Αφού $f(t,x) \equiv 1$, έχουμε

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\, kx\, dx = \frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο } k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$u(t,x) = \sum_{k=1(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\int_0^t \sin\, k(t-\tau)\, d\tau\, \sin\, kx =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - cos(2m+1)t}{(2m+1)^3} \sin(2m+1)x.$$

Ή αλλιώς αντικαθιστούμε την σειρά

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\, kx$$

στην εξίσωση, για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \;\; u_k(0) = 0, \;\; u_k'(0) = 0, \;\; k = 2m, \;\; m = 1, 2, ...,$$

$$u_k'' + k^2 u_k = \frac{4}{k\pi}, \;\; u_k(0) = 0, \;\; u_k'(0) = 0, \;\; k = 2m+1, \;\; m = 1, 2, ... \; .$$

Συνεπώς

$$u_k \equiv 0, \;\; k = 2m, \;\; m = 1, 2, ...,$$

$$u_k = \frac{4}{\pi k^3}(1 - cos\, kt), \;\; k = 2m+1, \;\; m = 1, 2, ... \; ,$$

Άρα

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - cos(2m+1)t}{(2m+1)^3} \sin(2m+1)x.$$

Παρατήρηση 3. Όπως ήδη είχε αναφερθεί (σελ. 85) η συνάρτηση $f(x) \equiv 1$ παριστάνεται απο την τριγωνομετρική σειρά της (4.5) (με $\alpha_0 = 2$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ για $k = 1, 2, ...$). Στο προηγούμενο παράδειγμα όμως αυτη η σειρά δεν μας βολέυει, θέλουμε να βρούμε μια σειρά μόνο ως προς τα $\sin$ (βλ. σελίδα 85).

Παράδειγμα 5.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\, x + 2, \;\; (t,x) \in (-\infty, \infty) \times (0, \pi),$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

$$u(0,x) = \sin x, \;\; u_t(0,x) = \sin 3x, \;\; x \in (0, \pi).$$

Λύση. Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v = u - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t^2 - \frac{x}{\pi}t^2 = u - t^2 \ \ (u = v + t^2).$$

Έχουμε

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xx} = \sin\, x, \ \ (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (0,\pi), \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty), \\ v(0,x) = \sin x, \ \ v_t(0,x) = \sin 3x, \ \ x \in (0,\pi). \end{gathered}$$

Άρα (βλ. Παράδειγμα 5.2)

$$v(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x$$

και

$$u(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x + t^2.$$

Παρατήρηση 4. Προφανώς μπορούμε να ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ ως προς ορθοκανονικό σύστημα ψ_k (βλ. (4.3)) δηλαδή σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι $u_k(t)$ προσδιορίζονται απο την (5.12) όμως με

$$f_k(t) = \frac{2}{\sqrt{l}}\int_0^l f(t,x)\, \sin\frac{k\pi}{l}x\, dx.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (5.1) - (5.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \ \text{στο} \ \ Q_T, \\ u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ v_{tt} - v_{xx} = f(t,x) \ \ \text{στο} \ \ Q_T, \\ v(0,x) = \phi(x), \ \ v_t(0,x) = \psi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0. \end{gathered}$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$\begin{gathered} w_{tt} - w_{xx} = 0 \ \ \text{στο} \ \ Q_T, \\ w(0,x) = w_t(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0. \end{gathered}$$

Για την

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l \big(w_t^2 + w_x^2\big)dx$$

έχουμε

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \big(w_t w_{tt} + w_x w_{xt}\big)dx =$$

$$\int_0^l w_t w_{tt}\, dx + w_x w_t\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l w_t w_{xx}\, dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx = 0.$$

Εδω χρησιμοποιήσαμε οτι $w_t(t,0) = w_t(t,l) = 0$ (επειδή $w(t,0) = w(t,l) = 0$). Προφανώς $E(0) = 0$, άρα $E(t) = 0$ (αφού και $E'(t) = 0$), τουτ έστιν

$$w_t(t,x) = w_x(t,x) = 0.$$

Συνεπώς η w είναι σταθερά και επειδή $w\Big|_{t=0} = 0$ έχουμε $w \equiv 0$ δηλαδή $u \equiv v$.

Ασκήσεις.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

1.

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty, 0 < x < \pi \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \ \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \ \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

2.

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 2\sin\, x + \sin 2x + \sin 3x \ \text{ για } \ |t| < \infty, 0 < x < \pi\} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = 0 \ \ \ u_t(0,x) = 0 \ \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

3.

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}\sin\, x \ \text{ για } \ |t| < \infty, 0 < x < \pi \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \ \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \ \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

4.

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 2\big(1 - \frac{2x}{\pi}\big) \ \text{ για } \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = t^2 \ \text{ για } \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = \sin\, x, \ \ u_t(0,x) = \sin\, x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

5.

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 2\frac{x}{\pi} \ \text{ για } \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = 0, \ \ u(t,\pi) = t^2 \ \text{ για } \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = \sin\, 2x, \ \ u_t(0,x) = \sin\, 3x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

6. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ανάγετε το πρόβλημα

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ για } \ |t| < \infty, \ \ a < x < b, \\ u(t,a) = u(t,b) = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty, \\ u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ a < x < b. \end{gathered}$$

στο πρόβλημα (5.1)-(5.3)

§6. Συνοριακές συνθήκες Neumann

Συνοπτικά θα εφαρμόσουμε την μέθοδο *Fourier* στην περίπτωση συνοριακών συνθηκών **Neumann**. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l,$$
$$u_x(t,0) = \nu_1(t), \ \ u_x(t,l) = \nu_2(t) \text{ για } |t| < \infty$$

με

$$\phi'(0) = \nu_1(0), \ \ \psi'(0) = \nu_1'(0), \quad \phi'(l) = \nu_2(0), \ \ \psi'(l) = \nu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\nu_1(t) \equiv \nu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(t).$$

Προφανώς

$$v_{tt} - v_{xx} = f_1(t,x) \equiv$$
$$f(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1''(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2''(t) - \frac{1}{l}\nu_1(t) + \frac{1}{l}\nu_2(t)$$

και

$$v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0 \ \ \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(0),$$
$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1'(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2'(0),$$
$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T \tag{6.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l \tag{6.2}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{6.3}$$

με

$$\phi'(0) = \phi'(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T \tag{6.4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ X'(0) = X'(l) = 0 \tag{6.5}$$

και

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6.6}$$

Για

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (6.5):

$$X_k(x) = cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (6.6) μας δίνει

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t \ \text{ αν } \ k = 0$$

και

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big)cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (6.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (6.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (6.2). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ άρτια στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (6.4) και τις συνοριακές συνθήκες (6.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (6.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \text{ και } A_k = a_k \text{ για } k > 1.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_0 = \frac{b_0}{2}, \quad B_k = \frac{l}{k\pi} b_k \text{ για } k = 1, 2, ...$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (6.4), (6.2), (6.3) δίνεται από τον τύπο

$$(6.7) \qquad u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t] cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 6.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(0,x) = cos\, x, \quad u_t(0,x) = cos\, 2x,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = cos\, x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\, kx,$$

$$\psi(x) = cos\, 2x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\, kx,$$

άρα $a_1 = 1$, $a_i = 0$ για $i \neq 1$, $b_2 = 1$, $b_j = 0$ για $j \neq 2$. Συνεπώς η συνάρτηση

$$u(t,x) = cos\, t\, cos\, x + \frac{1}{2} \sin\, 2t\, cos\, 2x$$

είναι λύση του προβλήματος.

Παρομοίως με την περίπτωση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{6.8}$$

και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (6.8) στην (6.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (6.2)

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (6.1) - (6.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (6.8). Γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή (βλ. Παρατήτηση 2 στο τέλος της παραγράφου)

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x \tag{6.9}$$

όπου

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\, cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \ \text{ για } \ k = 1, 2, \ldots.$$

Έστω ότι η σειρά (6.8) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (6.8) στην εξίσωση (6.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (6.9) έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = f_k(t). \tag{6.10}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$
$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

δηλαδή

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \ \ u_0'(0) = \frac{b_0}{2}, \ \ u_k(0) = a_k, \ \ u_k'(0) = b_k \text{ για } \ k = 1, 2, \ldots. \tag{6.11}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (6.10) είναι

$$u_0(t) = C_{10} + C_{20}t + \int_0^t \int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,$$

(6.12)

$$u_k(t) = C_{1k}cos\frac{k\pi}{l}t + C_{2k}\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)d\tau,\ \ k = 1, 2, ...$$

Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (6.11), πρέπει

$$C_{10} = \frac{a_0}{2},\ \ C_{20} = \frac{b_0}{2},\ \ C_{1k} = a_k,\ \ C_{2k} = \frac{l}{k\pi}b_k \ \text{ για }\ k = 1, 2, ...$$

Πράγματι άπο (6.11), (6.12) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k,\ \ u_k'(0) = \frac{k\pi}{l}C_{2k} = b_k.$$

Αρα η λύση του προβλήματος (6.10), (6.11) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_0(t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,$$

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,\ \ k = 1, 2, ...$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Neumann$ για την εξίσωση (6.1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^\infty\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\Big]cos\frac{k\pi}{l}x +$$

$$\int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau + \sum_{k=1}^\infty\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{6.13}$$

Παράδειγμα 6.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\,x \ \text{ στο }\ Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,$$

$$u(0,x) = 3\cos 3x,\ \ u_t(0,x) = \cos 2x.$$

Λύση. Έχουμε $f_1 = 1$, $a_3 = 3$, $b_2 = 1$ τα υπόλοιπα μηδέν, άρα (βλ. (6.13))

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sin\,2t cos\,2x + 3cos\,3t\,cos 3x + (1 - cos\,t)cos\,x.$$

Ή αλλιώς

$$u_1''(t) + u_1(t) = 1,\ \ u_1(0) = 0,\ \ u_1'(0) = 0,$$

$$u_2''(t) + 4u_2(t) = 0,\ \ u_2(0) = 0,\ \ u_2'(0) = 1,$$

$$u_3''(t) + 9u_3(t) = 0,\ \ u_3(0) = 3,\ \ u_3'(0) = 0$$

και

$$u_k''(t) + k^2 u_k(t) = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0\ \ k \neq 1, 2, 3.$$

Προφανώς

$$u_1 = 1 - cos\,t,\ \ u_2 = \frac{1}{2}\sin\,2t,\ \ u_3 = 3cos\,3t,\ \ u_k \equiv 0\ \ k \neq 1, 2, 3.$$

συνεπώς

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x.$$

Παράδειγμα 6.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\, x + 2x - \pi \;\text{ στο }\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = t^2,$$

$$u(0,x) = 3cos 3x, \;\; u_t(0,x) = cos 2x.$$

Λύση. Αφού οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδέν εισάγουμε την συνάρτηση

$$v = u + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t^2 - \frac{x^2}{2\pi} t^2$$

η οποία επαλήθεύει την εξίσωση

$$v_{tt} - v_{xx} = cos\, x$$

και τις συνθήκες

$$u(0,x) = 3cos 3x, \;\; u_t(0,x) = cos 2x, \;\; u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,$$

άρα (βλ. Παράδειγμα 6.2)

$$v = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x,$$

και

$$u = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x + \big(x - \frac{\pi}{2}\big) t^2.$$

Παράδειγμα 6.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \;\text{ στο }\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0,x) = 2, \;\; u_t(0,x) = 1/2,$$

$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv 2 = a_0/2, \;\; \psi(x) \equiv 1/2 = b_0/2,$

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx = 1$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{4+t}{2} + \int_0^t \int_0^\tau 1 d\xi\, d\tau = \frac{t^2 + t + 4}{2}.$$

Παρατήρηση 1. Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών

$$\alpha_1 u_x(t,0) + \alpha_2 u(t,0) = \nu_1(t), \;\; \beta_1 u_x(t,l) + \beta_2 u(t,l) = \nu_2(t),$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \;\; \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Παρατήρηση 2. Προφανώς αντί (6.9) θα μπορούσαμε να την γράψουμε την f σε μορφή

$$f(t,x) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) cos \frac{k\pi}{l} x$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x)\, cos \frac{k\pi}{l} x\, dx \ \text{ για } \ k = 0, 1, 2, ...$$

(βλ. $\S$ 4).

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (6.1) - (6.3).

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

2.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x + \cos 3x, \ \ u_t(0,x) = 2\cos 2x + \cos 4x \ \text{ για } \ 0 < x < \pi.$$

3.

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos\, x + \cos 2x + \cos 3x \ \text{ για } \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{ για } \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x, \ \ u_t(0,x) = 0 \ \text{ για } \ 0 < x < \pi.$$

4.

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\, t \ \text{ για } \ |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 1 - \cos\, t, \ \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \ \ 0 < x < \pi.$$

§7. Εξίσωση Θερμότητας, μέθοδος *Fourier*

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \text{ για } t > 0, \ \ 0 < x < l \tag{7.1}$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ 0 < x < l, \tag{7.2}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \ \ t > 0. \tag{7.3}$$

Εδώ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα. Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$. Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{7.4}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.4) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.4) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t. Προφανώς

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \ \ f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx$$

και αντικαθιστώντας την (7.4) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Άρα θέλουμε να ισχύει

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t), \ \ k = 1, 2, ... \tag{7.5}$$

Επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \ \ a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

$$u_k(0) = a_k, \ \ k = 1, 2, ... \tag{7.6}$$

Πράγματι

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Έστω $f(t,x) \equiv 0$, τότε

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{7.7}$$

και η λύση του προβλήματος (7.7), (7.6) είναι

$$u_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) για $f(t,x) \equiv 0$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{7.8}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν ακολουθήσουμε την διαδικασία με την οποια ξεκινήσαμε στην §5 : ψάχνουμε αν υπάρχει λύση της $u_t - u_{xx} = 0$ της μορφής $T(t)X(x) \not\equiv 0$. Πρέπει να ισχύει

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Η $X(x)$ θα είναι λύση του προβλήματος (5.5) αρα

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \;\text{ και }\; X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Για την $T(t)$ θα έχουμε

$$T'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0$$

αρα

$$T_k(t) = A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Την αυθαίρετη σταθερά A_k την προσδιορίζουμε απο την αρχική συνθήκη και έχουμε:

$$A_k = a_k.$$

Παρατηρούμε οτι για $t < 0$ η σειρά (7.8) σίγουρα αποκλίνει, ενω για $t > 0$ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την σύγκλιση της. Αυτός είναι ο λόγος γιατί την εξίσωση θερμότητας (σε αντίθεση με την κυματική) την μελετάμε για $t > 0$.

Παράδειγμα 7.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = 0 \;\text{ για }\; t > 0, \;\; 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin x, \;\; u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, συνεπώς απο (7.8)

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x.$$

Ή αλλιώς απο (7.5), (7.6)

$$u_1' + u_1 = 0, \;\; u_1(0) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; u_1 = e^{-t},$$

και για $k > 1$

$$u_k' + k^2 u_k = 0, \quad u_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_k \equiv 0.$$

Έστω τώρα $f(t, x) \not\equiv 0$. Η γενική λύση της (7.5) είναι

$$u_k(t) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} + e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau,$$

και την αυθαίρετη σταθερά C_k την προσδιορίζουμε άπο την (7.6):

$$u_k(0) = C_k = a_k.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) δίνεται από τον τύπο
(7.9)

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t f_k(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau} d\tau \sin \frac{k\pi}{l} x$$

(πάντα υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t).

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \sin 2x + 1 - \frac{x}{\pi} \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$
$$u(t, 0) = t, \ \ u(t, \pi) = 0,$$
$$u(0, x) = \sin x.$$

Λύση. Για την

$$v(t, x) = u(t, x) - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \sin 2x \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$
$$v(t, 0) = v(t, \pi) = 0,$$
$$v(0, x) = \sin x.$$

Λύνουμε αυτό το πρόβλημα. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, επίσης $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ και $f_k = 0$ για $k > 2$. Άρα έχουμε για την v_1:

$$v_1'(t) + v_1(t) = 0, \ \ v_1(0) = 1,$$

για την v_2:

$$v_2'(t) + 4v_2(t) = 1, \ \ v_2(0) = 0,$$

για τις v_k, $k > 2$:

$$v_k'(t) + k^2 v_k(t) = 0, \ \ v_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$v_1(t) = e^{-t}, \ \ v_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big), \ \ v_k(t) \equiv 0 \ \text{ για } \ k > 2.$$

Η λύση του προβλήματος (για την v) είναι

$$v(t, x) = e^{-t} \sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \sin 2x,$$

και η λύση του αρχικού προβλήματος

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big)\sin 2x + \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t.$$

Παράδειγμα 7.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = t, \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin x, \ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Προφανώς $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$ και

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin kx\,dx = t\frac{2}{k\pi}[1 - cos\,k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}t, & \text{αν ο } k - \text{περιττός}, \end{cases}$$

Έχουμε για την u_1:

$$u_1'(t) + u_1(t) = \frac{4t}{\pi}, \ \ u_1(0) = 1,$$

για τις u_k με $k = 3, 5, 7...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = \frac{4t}{k\pi}, \ \ u_k(0) = 0,$$

για τις u_k με $k = 2, 4, 6, ...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$u_1(t) = e^{-t} + \frac{4}{\pi}(t - 1 + e^{-t}),$$

$$u_k(t) = \frac{4}{k^3\pi}\Big(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}e^{-k^2 t}\Big), \ \text{ για } \ k = 3, 5, 7, ...,$$

$$u_k(t) = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 4, 6, ...$$

Άρα λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) =$$

$$\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin x +$$

$$\sum_{k=3(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{k^5\pi}\big(k^2 t - 1 + e^{-k^2 t}\big)\sin kx =$$

$$\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big)\sin x +$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x =$$

$$e^{-t}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5}\sin(2m+1)x.$$

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (7.1) με αρχική συνθήκη (7.2) και τις συνοριακές συνθήκες $Neumann$ (θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα)

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad t > 0. \tag{7.10}$$

Παρομοίως με την κυματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{7.11}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.11) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.11) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή μια ως προς t. Κάνουμε άρτια και έπειτα περιοδική επέκταση των f και ϕ. Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \qquad k = 1,2,...$$

και αντικαθιστώντας την (7.9) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα προσδιορίζουμε τις $u_k(t)$ από την (7.5) (με $k = 0,1,2,...$), επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx, \quad k = 0,1,2,...$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \quad u_k(0) = a_k \text{ για } k = 1,2,....$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1), (7.2), (7.10) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} cos\frac{k\pi}{l}x + \int_0^t f_0(\tau)d\tau +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 7.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = cos\,3x \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_k = 0\, \forall k$, επίσης $f_3 = 1$ και $f_k = 0$ για $k \neq 3$. Άρα έχουμε για την u_3:

$$u_3'(t) + 9u_3(t) = 1, \quad u_3(0) = 0,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \ \ u_k(0) = 0,$$

για $k \neq 3$. Συνεπώς

$$u_k(t) \equiv 0 \ \text{ για } \ k \neq 3, \ \ u_3(t) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big).$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x.$$

Παράδειγμα 7.5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \cos 3x + \frac{t}{\pi} - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2$$
$$u_x(t,0) = t, \ \ u_x(t,\pi) = 0,$$
$$u(0,x) = 0.$$

Λύση. Για την

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \cos 3x,$$
$$v_x(0,x) = 0, \ \ v_x(t,\pi) = 0,$$
$$v(0,x) = 0.$$

Η λύση αυτού του προβλήηματος είναι (βλ. παράδειγμα 7.4)

$$v(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0,$$
$$v_t - v_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$w_t - w_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \tag{7.12}$$
$$w(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (7.12) με w και ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - \int_0^l w_{xx} w dx = 0.$$

Ολοκληρώνοντας κατα μερη παιρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2dx - w_x w\Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

άρα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2dx + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή ως προς t απο το μηδέν και έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^l w^2dx + \int_0^t\int_0^l w_x^2 dx d\tau = 0,$$

συνεπώς $w = 0$, δηλαδή $u = v$.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του του προβλήματος (7.1), (7.10), (7.3) είναι ίδια.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε την αντικατάσταση η οποία ανάγει την εξίσωση

$$u_t - ku_{xx} = f(t,x), \quad k > 0 \text{ σταθερά}$$

στην εξίσωση

$$u_t - u_{yy} = f(t,y).$$

2. Εστω οτι η $u(t,x)$ είναι λύση της εξίσωσης (7.1) η οποια επαληθευει την αρχική συνθήκη (7.2) και συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t).$$

Προσδιορίστε την εξίσωση και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που επαληθευει η συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) - \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των προβλημάτων:

3.

$$u_t - u_{xx} = t^2 \sin x \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = \sin 2x \text{ για } 0 < x < \pi.$$

4.

$$u_t - u_{xx} = 2\sin x \cos x \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \text{ για } t > 0,$$
$$u(0,x) = \sin x + \sin 3x \text{ για } 0 < x < \pi.$$

5.

$$u_t - u_{xx} = \frac{\pi - x}{2} \text{ για } t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ t > 0,$$
$$u(0,x) = 0 \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

Υπόδειξη: (βλ. άσκηση 4 §4. σελίδα 85)

6.

$$u_t - u_{xx} = \frac{t^2}{2}\cos x \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ t > 0,$$
$$u(0,x) = \cos x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

7.

$$u_t - u_{xx} = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}, \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = 0, \ \ u_x(t,\pi) = t \ \text{για} \ t > 0,$$
$$u(0,x) = \frac{1}{2}\cos x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

§8. Εξίσωση $Laplace$, μέθοδος $Fourier$

Θα εφαρμόσουμε τωρα την μέθοδο $Fourier$ για την εξίσωση $Laplace$ όταν το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα $Dirichlet$:

$$\begin{gathered} v_{xx}+v_{yy}=\tilde{f}(x,y) \ \text{ στο } \ (0,l)\times(0,l_1), \\ v(0,y)=h_1(y), \ \ v(l,y)=h_2(y) \ \text{ για } \ y\in[0,l_1], \\ v(x,0)=\tilde{\phi_1}(x), \ \ v(x,l_1)=\tilde{\phi_2}(x) \ \text{ για } \ x\in[0,l], \end{gathered}$$

με

$$\tilde{\phi_1}(0)=h_1(0),\tilde{\phi_1}(l)=h_2(0),\tilde{\phi_2}(0)=h_1(l_1),\tilde{\phi_2}(l)=h_2(l_1).$$

Υποθέτουμε οτι οι h_i είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε $h_1\equiv h_2\equiv 0$. Πράγματι, εισάγουμε την συνάρτηση

$$u=v-\Big[\frac{l-x}{l}h_1(y)+\frac{x}{l}h_2(y)\Big]$$

για την οποία έχουμε

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \ \text{ στο } \ (0,l)\times(0,l_1), \tag{8.1}$$

$$u(0,y)=u(l,y)=0 \ \text{ για } \ y\in[0,l_1], \tag{8.2}$$

$$u(x,0)=\phi_1(x), \ \ u(x,l_1)=\phi_2(x) \ \text{ για } \ x\in[0,l], \tag{8.3}$$

με

$$f(x,y)=\tilde{f}-\Big[\frac{l-x}{l}h_1''(y)+\frac{x}{l}h_2''(y)\Big]$$

και

$$\begin{gathered} \phi_1(x)=\tilde{\phi_1}(x)-\Big[\frac{l-x}{l}h_1(0)+\frac{x}{l}h_2(0)\Big], \ \ \phi_1(0)=\phi_1(l)=0, \\ \phi_2(x)=\tilde{\phi_2}(x)-\Big[\frac{l-x}{l}h_1(l_1)+\frac{x}{l}h_2(l_1)\Big], \ \ \phi_2(0)=\phi_2(l)=0. \end{gathered}$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(x,y)\equiv 0$:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \ \text{ στο } \ (0,l)\times(0,l_1), \tag{8.4}$$

Ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (8.4) σε μορφή

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{8.5}$$

αντικαθιστώντας την (8.5) στην (8.4) παίρνουμε

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0,$$

διαιρώντας δια XY έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda, \ \ \lambda\in\mathbf{R}. \tag{8.6}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8.2) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \ \ x\in(0,l), \ \ X(0)=X(l)=0.$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε, μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για

$$\lambda = \lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

και δίνονται ως

$$X(x) = C\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad C - \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Επίσης από την (8.6) έχουμε

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0 \quad y \in [0, l_1],$$

προφανώς η γενική λύση της άνω εξίσωσης είναι

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}, \quad A_k,\, B_k - \text{αυθαίρετες σταθερές.}$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \Big(A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

επαληθεύουν την εξίσωση (8.4) και τις συνθήκες (8.2). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν. Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (8.3) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_1(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx,$$

και

$$\phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_2(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,l_1) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{\frac{k\pi l_1}{l}} + B_k e^{\frac{-k\pi l_1}{l}})\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα πρέπει

$$A_k + B_k = a_k, \quad \text{και} \quad A_k e^{\frac{k\pi l_1}{l}} + B_k e^{\frac{-k\pi l_1}{l}} = b_k.$$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις ας πάρουμε $l_1 = l$, τότε

$$A_k = \frac{a_k - e^{k\pi}b_k}{1 - e^{2k\pi}}, \quad B_k = \frac{b_k - a_k e^{k\pi}}{1 - e^{2k\pi}}e^{k\pi}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) (για $l_1 = l$) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{a_k - e^{k\pi} b_k}{1 - e^{2k\pi}} e^{\frac{k\pi}{l} y} + \frac{b_k - a_k e^{k\pi}}{1 - e^{2k\pi}} e^{k\pi} e^{-\frac{k\pi}{l} y} \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

(υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y). Ευκολα κατασκευάζουμε τη λύση και για $l_1 \neq l$.

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν εξ αρχής θα ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{8.7}$$

Παράδειγμα 8.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) με

$$l = l_1 = \pi,\ \phi_1 \equiv 0 \,\text{και}\, \phi_2 = \sin\, x.$$

Λύση. Προφανώς $a_k = 0\ \forall k$, $b_1 = 1$ και $b_k = 0$ για $k \geq 2$ άρα

$$u(x,y) = \frac{e^{\pi}\big(e^{-y} - e^{y}\big)}{1 - e^{2\pi}} \sin\, x.$$

* * *

Έστω τώρα $f(x,y) \not\equiv 0$. Γράφουμε την f σε μορφή σειράς $Fourier$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{8.8}$$

όπου

$$f_k(y) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,y) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή (8.7). Αντικαθιστώντας την (8.7) στην (8.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (8.8) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(Y_k''(y) - \frac{k^2\pi^2}{l^2} Y_k(y) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Συνεπώς για τον προσδιορισμό των $Y_k(y)$ έχουμε

$$Y_k''(y) - \frac{k^2\pi^2}{l^2} Y_k(y) = f_k(y)$$

και

$$Y_k(0) = a_k,\ \ Y_k(l_1) = b_k.$$

Παράδειγμα 8.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.1), (8.2), (8.3) με

$$l = \pi,\ l_1 = 1,\ \phi_1 = \sin\, 2x,\ \phi_2 \equiv 0 \,\text{και}\, f = \sin x.$$

Λύση. Προφανώς $b_k = 0\ \forall k$, $a_2 = 1$, $a_k = 0$ για $k \geq 2$, $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k \neq 1$ άρα για τον προσδιορισμό των Y_k έχουμε

$$Y_1''(y) - Y_1(y) = 1,\ \ Y_1(0) = 0,\ \ Y_1(1) = 0,$$

$$Y_2''(y) - 4Y_2(y) = 0, \;\; Y_2(0) = 1, \;\; Y_2(1) = 0,$$
$$Y_k''(y) - k^2 Y_k(y) = 0, \;\; Y_k(0) = 0, \;\; Y_k(1) = 0.$$

Άρα

$$Y_1(y) = \frac{1}{e+1} e^y \frac{e}{e+1} e^{-y} - 1,$$
$$Y_2(y) = \frac{1}{1-e^4} e^{2y} - \frac{e^4}{1-e^4} e^{-2y}$$

και

$$Y_k(y) \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; k \geq 3.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,y) = \big(\frac{e^y}{e+1} + \frac{e^{1-y}}{e+1} - 1\big) \sin x + \big(\frac{e^{2y}}{1-e^4} - \frac{e^{4-2y}}{1-e^4}\big) \sin 2x.$$

Τέλος, θα εξετάσουμε το πρόβλημα $Neumann$. Θα περιοριστούμε με την εξίσωσης (8.4) και συνοριακές συνθήκες

$$u_x(0,y) = u_x(l,y) = 0 \;\; \text{για} \;\; y \in [0, l_1], \tag{8.9}$$

$$u_y(x,0) = \phi_1(x), \;\; u_y(x,l) = \phi_2(x) \;\; \text{για} \;\; x \in [0, l], \tag{8.10}$$

με $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = \phi_1'(l) = \phi_2'(l) = 0$. Θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10). Εδω υπάρχουν δυο ιδιαιτερότητες σε σχέση με το πρόβλημα $Dirichlet$. Η πρώτη είναι οτι το πρόβλιμα $Neumann$ για τυχαίες ϕ_1, ϕ_2 μπορεί να μην έχει λύση. Πράγματι απο το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\int_\Omega \Delta u dx dy = \int_\Omega div(\nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

όπου $\Omega = (0,l) \times (0, l_1)$, $\partial\Omega$ το σύνορο του χωρίου Ω, ν μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Συνεπώς (αφού $\Delta u = 0$) η αναγκαία συνθήκη για την υπαρξη της λύσης είναι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

Η συνθήκη αυτή στη περίπτωση μας (υπολογίζουμε το άνω ολοκλήρωμα για συνοριακές συνθήκες (8.9), (8.10)) παίρνει τη μορφή

$$-\int_0^l \phi_1(x) dx + \int_0^l \phi_2(x) dx = 0. \tag{8.12}$$

Η δευτερη ιδιαιτερότητα είναι οτι αν η u είναι λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) τότε και η $u + C$ με τυχαια σταθερά C είναι επίσης λύση.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) υπο τον περιορισμό (8.12) και με αυτο θα δείξουμε οτι η συνθήκη (8.12) είναι ικανή και αναγκαία για την υπαρξη της λύσης.

Όπως πάντα ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (8.4) σε μορφή

$$u(x,y) = X(x) Y(y)$$

και καταλήγουμε στην

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8.9) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Όπως γνωρίζουμε, μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

και δίνονται ως

$$X(x) = C \cos \frac{k\pi}{l}x, \quad C - \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Επίσης για την Y έχουμε

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0 \quad y \in [0, l_1],$$

με γενική λύση

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y$$

για $k = 0$ και

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}, \quad A_k, \, B_k - \text{αυθαίρετες σταθερές.}$$

για $k = 1, 2, ...$ Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x, y) = X_k(x) Y_k(y), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

επαληθεύουν την εξίσωση (8.4) και τις συνθήκες (8.9). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) =$$

$$A_0 + B_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi}{l}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{l}y}\right) \cos \frac{k\pi}{l}x$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν. Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (8.10) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi_1(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx,$$

και

$$\phi_2(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi}{l}x, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi_2(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{ky}(x, 0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(A_k - B_k) \cos \frac{k\pi}{l}x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l}x,$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{ky}(x,l) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(A_k e^{k\pi} - B_k e^{-k\pi}) \cos\frac{k\pi}{l}x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα πρέπει

$$B_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k - B_k = \frac{l}{k\pi} a_k \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...,$$

$$B_0 = \frac{b_0}{2}, \quad A_k e^{k\pi} - B_k e^{-k\pi} = \frac{l}{k\pi} b_k, \ \text{ για } \ k = 1, 2, \ldots .$$

Αρα αναγκαστικά

$$a_0 = b_0,$$

(είναι η συνθήκη (8.12)!), $B_0 = a_0/2 (= b_0/2)$ και για $k = 1, 2, ...$

$$A_k = \frac{l}{k\pi} \frac{e^{k\pi} b_k - a_k}{e^{2k\pi} - 1}, \quad B_k = \frac{l}{k\pi} \frac{e^{k\pi} b_k + 1 - a_k(1 + e^{2k\pi})}{e^{2k\pi} - 1}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (8.4), (8.9), (8.10) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = A_0 +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{l}{k\pi} \frac{e^{k\pi} b_k - a_k}{e^{2k\pi} - 1} e^{ky} + \frac{l}{k\pi} \frac{e^{k\pi} b_k + 1 - a_k(1 + e^{2k\pi})}{e^{2k\pi} - 1} e^{-ky} \Big) \cos\frac{k\pi}{l}x$$

όπου A_0 τυχαία σταθερά (προφανώς υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y).

Ασκήσεις.

1. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών ανάγετε το πρόβλημα

$$\Delta u = f \ \text{ στο } \ P = (a,b)^2,$$

$$u\Big|_{\partial P} = 0,$$

στο

$$\Delta u = f \ \text{ στο } \ \Pi = (0,l)^2,$$

$$u\Big|_{\partial \Pi} = 0.$$

Εδω f κάποια συνάρτηση, ∂P σύνορο του χωρίου P, $a < b$.

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.4), (8.2), (8.3) με $l_1 = l = \pi$,

$$\phi_1 = \sin x + 2\sin 2x \ \text{ και } \ \phi_2 = \sin x.$$

3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ (0,\pi)^2,$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ \text{ για } \ y \in [0,\pi],$$

$$u(x,0) = \cos x, \ \ u(x,\pi) = \cos x \ \text{ για } \ x \in [0,\pi].$$

4. Με κατάλληλη αλλαγή προσδιοριστέας συνάρτησης ανάγετε το πρόβλημα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ (x,y) \in (0,l_1) \times (0,l_2),$$

$$u(0,y)=h_1(y),\ \ u(l_1,y)=h_2(y)\ \text{ για }\ y\in[0,l_2],$$
$$u(x,0)=\phi_1(x),\ \ u(x,l_2)=\phi_2(x)\ \text{ για }\ x\in[0,l_1],$$

με
$$\phi_1(0)=\phi_2(0)=\phi_1(l_1)=\phi_2(l_1)=h_1(0)=h_2(0)=h_1(l_2)=h_2(l_2)=0$$
στο πρόβλημα

$$v_{xx}+v_{yy}=f(x,y)\ \ (x,y)\in(0,l_1)\times(0,l_2),$$
$$v(0,y)=v(l_1,y)=0\ \text{ για }\ y\in[0,l_2],$$
$$v(x,0)=v(x,l_2)=0\ \text{ για }\ x\in[0,l_1].$$

Εδω ϕ_i, h_i δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}+u_{yy}=0\ \text{ στο }\ (0,\pi)^2,$$
$$u(0,y)=0,\ \ u(\pi,y)=\sin y\ \text{ για }\ y\in[0,\pi],$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0\ \text{ για }\ x\in[0,\pi].$$

6. Προσδιορίστε τη η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}+u_{yy}=\cos 3x\ \text{ στο }\ (0,\pi)^2,$$
$$u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0\ \text{ για }\ y\in[0,\pi],$$
$$u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0\ \text{ για }\ x\in[0,\pi].$$

§9. Μέθοδος $Fourier$ σε πιο γενικές περιπτώσεις

Θα δούμε εδω μια πιο γενική περίπτωση εξισώσεων όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Θα περιοριστούμε με της συνοριακές συνθήκες $Dirichlet$ όμως το ίδιο ισχεί και για άλλες συνοριακές συνθήκες.

I. Θα ξεκινήσουμε με εξισώσεις υπερβολικού τύπου:

$$e(t)u_{tt} - a(x)u_{xx} + b(t)u_t - c(x)u_x + d(t)u = 0 \text{ στο } (-\infty, +\infty) \times (0, l) \tag{9.1}$$

Εδω $e(t) > 0$ $\forall t$ και $a(x) > 0$ στο $[0, l]$. Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$u = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.1) και διαιρώντας δια $T(t)X(x)$ παίρνουμε

$$e(t)\frac{T''(t)}{T(t)} + b(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)}$$

για κάθε t και x, συνεπώς

$$e(t)\frac{T''(t)}{T(t)} + b(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά, οι μεταβλητές χωρίσαν. Άρα

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{9.2}$$

$$e(t)T''(t) + b(t)T'(t) + (d(t) + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.3}$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση οι (9.2), (9.3) παίρνου τη μορφή

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (\lambda + d(x))X(x) = 0,$$
$$e(t)T''(t) + b(t)T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Η εξίσωση (9.1) (με $d = d(x)$ ή $d = d(t)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης υπερβολικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} + \beta u_t + \delta u = 0 \text{ στο } (-\infty, +\infty) \times (0, l), \tag{9.4}$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l, \tag{9.5}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{9.6}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Εδω β, δ κάποιες σταθερές. Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \beta T'(t) + (\delta + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.7}$$

Προφανώς (βλ. $\S 5$. αυτού του κεφαλαίου) παίρνουμε

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, ...$$

και

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.7) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t), \tag{9.8}$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές και $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (9.7). Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\,X_k(x) = \big(A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (9.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.5). Το ίδιο και η σειρά

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1(t) + B_k\,\mathcal{T}_2(t)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{9.9}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (9.5). Γράφουμε τις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x$$

όπου

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση (9.9). Επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Έχουμε ότι

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1(0) + B_k\,\mathcal{T}_2(0)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k\,\mathcal{T}_1(0) + B_k\,\mathcal{T}_2(0) = a_k. \tag{9.10}$$

Επίσης

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{T}_1'(0) + B_k\,\mathcal{T}_2'(0)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k \, \mathcal{T}_1'(0) + B_k \, \mathcal{T}_2'(0) = b_k. \tag{9.11}$$

Αρα, η λύση είναι η (9.9) όπου οι A_k, B_k ορίζονται απο (9.10), (9.11).

Παρατήρηση 1. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(0) & \mathcal{T}_2(0) \\ \mathcal{T}_1'(0) & \mathcal{T}_2'(0) \end{pmatrix}$$

ονομάζεται Βρονσκιανή (βλ. το μάθημα ΣΔΕ) και είναι διάφορη του μηδενός, αρα το γραμμικό σύστημα (9.10), (9.11) έχει πάντα μοναδική λύση.

Παράδειγμα 9.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0 \;\; (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin\, x, \;\; u_t(0,x) = \sin 3x, \;\; x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε

$$\lambda_k = k^2, \;\; X_k(x) = \sin kx, \;\; k = 1,2,...$$

και

$$T_k(t) = e^{-t}(A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

αφου το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της

$$T''(t) + 2T'(t) + (1+k^2)T(t) = 0$$

είναι $e^{-t}\cos kt, \quad e^{-t}\sin kt$. Συνεπώς για τον προσδιοριζμό των A_k και B_k έχουμε

$$A_k = a_k,$$
$$-A_k + kB_k = b_k$$

ήτοι

$$A_k = a_k, \;\; B_k = \frac{b_k + a_k}{k}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$a_1 = 1, \;\; a_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 1, \;\; b_3 = 1, \;\; b_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 3$$

έχουμε

$$A_1 = 1, \;\; A_k = 0 \;\text{ για }\; k \neq 1,$$

και

$$B_1 = 1, \;\; B_3 = \frac{1}{3}, \;\; B_k = 0 \;\text{ για τα υπόλοιπα }\; k.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = e^{-t}\Big((\cos t + \sin t)\sin x + \frac{1}{3}\sin 3t \sin 3x\Big).$$

II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου. Θεωρούμε τη εξίσωση

$$e(t)u_t - a(x)u_{xx} - c(x)u_x + d(t)u = 0 \text{ στο } (0,+\infty) \times (0,l) \tag{9.12}$$

Εδω $e(t) > 0 \; \forall t \geq 0$, $a(x) > 0$ στο $[0,l]$. Όπως και πρίν ψάχνουμε λύση της μορφής

$$u = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.12) και διαιρώντας δια $T(t)X(x)$ παίρνουμε

$$e(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)}$$

για κάθε t και x συνεπώς

$$e(t)\frac{T'(t)}{T(t)} + d(t) = a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά, οι μεταβλητές χωρίσαν. Άρα

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{9.13}$$

και

$$e(t)T'(t) + (d(t) + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.14}$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση οι (9.13), (9.14) παίρνου τη μορφή

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (\lambda + d(x)) = 0,$$
$$e(t)T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Η εξίσωση (9.12) (με $d = d(x)$ ή $d = d(t)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης παραβολικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς και εδώ θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_t - u_{xx} + \delta u = 0 \text{ στο } (0,+\infty) \times (0,l) \tag{9.15}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \text{ για } 0 < x < l \tag{9.16}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{9.17}$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = 0.$$

Εδω δ μια σταθερά. Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T'(t) + (\delta + \lambda)T(t) = 0. \tag{9.18}$$

Έχουμε

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \text{ και } X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.18) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t},$$

όπου A_k αυθαίρετη. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\,X_k(x) = A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (9.15) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.17). Το ίδιο και η σειρά

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{9.19}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε την αρχική συνθήκη (9.16). Γράφουμε την $\phi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση (9.19) και επιλέγουμε τις σταθερές A_k ε.ω.

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Δηλαδή

$$A_k = a_k.$$

Αρα, η λύση είναι

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\delta+\lambda_k)t} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Παράδειγμα 9.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} + u = 0 \;\; (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t > 0,$$
$$u(0,x) = 3\sin 2x, \;\; x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε $\lambda_k = k^2$,

$$X_k(x) = \sin kx,$$

$$T_k(t) = A_k e^{-(1+k^2)t}$$

και

$$a_2 = 3, \;\; a_k = 0 \;\; \text{για} \;\; k \neq 2.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = 3e^{-5t} \sin 2x.$$

III. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου. Θεωρούμε την εξίσωση

$$a(x)u_{xx} + b_1(y)u_{yy} + c(x)u_x + d_1(y)u_y + e(y)u = 0 \;\; \text{στο} \;\; (x,y) \in (0,l) \times (0,l_1).$$

Εδω $a(x) > 0$, $b_1(y) > 0$ στο $[0,l]$, $[0,l_1]$ αντίστοιχα. Χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $l_1 = \pi$. Πράγματι, εισάγουμε καινούργιες μεταβλητές

$$\eta = \frac{\pi}{l_1} y.$$

Προφανώς αν $(x,y) \in (0,l) \times (0,l_1)$, τότε $(x,\eta) \in (0,l) \times (0,\pi)$. Επίσης για

$$\tilde{u}(x,\eta) = u(x,y)$$

έχουμε (κανόνας της αλυσίδας)

$$u_x = \tilde{u}_x, \quad u_{xx} = \tilde{u}_{xx},$$

$$u_y = \tilde{u}_\eta \frac{\pi}{l_1}, \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\eta\eta}\Big(\frac{\pi}{l_1}\Big)^2.$$

Συνεπώς

$$a(x)\tilde{u}_{xx} + b(\eta)\tilde{u}_{\eta\eta} + c(x)\tilde{u}_x + d(\eta)\tilde{u}_\eta + e(\eta)\tilde{u} = 0 \ \text{ στο } \ (x,y) \in (0,l) \times (0,\pi).$$

Αρα (χρησιμοποιώντας τα σύμβολα u, y αντι $\tilde{u}, \eta$) έχουμε την εξίσωση

$$(9.20) \quad a(x)u_{xx} + b(y)u_{yy} + c(x)u_x + d(y)u_y + e(y)u = 0 \ \text{ στο } \ (0,l) \times (0,\pi).$$

Ψάχνουμε λύση σε μορφή

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (9.20) και διαιρώντας δια $X(x)Y(y)$ παίρνουμε

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -b(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - d(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - e(y)$$

για κάθε x και y συνεπώς

$$a(x)\frac{X''(x)}{X(x)} + c(x)\frac{X'(x)}{X(x)} = -b(y)\frac{Y''(y)}{Y(y)} - d(y)\frac{Y'(y)}{Y(y)} - e(y) = -\lambda$$

και

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$b(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) + (e(y) - \lambda)Y(y) = 0.$$

Επίσης οι μεταβλητές χωρίζουν αν $d = d(x)$, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$a(x)X''(x) + c(x)X'(x) + (e(x) + \lambda)X(x) = 0,$$
$$b(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Η εξίσωση (9.20) (με $e = e(x)$ ή $e = e(y)$) είναι η πιο γενική μορφή (ομογενούς) γραμμικής εξίσωσης ελλειπτικού τύπου όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος $Fourier$. Εμείς θα περιοριστούμε με πιο απλή περίπτωση. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$(9.21) \qquad u_{xx} + \alpha u_{yy} + \gamma u_y + \delta u = 0 \ \text{ στο } \ (x,y) \in (0,l) \times (0,\pi).$$

$$(9.22) \qquad u(x,0) = \phi(x), \quad u(x,\pi) = \psi(x) \ \text{ για } \ 0 < x < l$$

$$(9.23) \qquad u(0,y) = u(l,y) = 0 \ \text{ για } \ y \in (0,\pi)$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Εδω $\alpha > 0$, γ και δ κάποιες σταθερές.

Ψάχνοντας λύση της μορφής $T(t)X(x)$ καταλήγουμε στο εξής

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$Y''(y) + \frac{\gamma}{\alpha}Y'(y) + \frac{\delta - \lambda}{\alpha}Y(y) = 0. \tag{9.24}$$

Άρα έχουμε

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2 \text{ και } X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Επίσης για $\lambda = \lambda_k$ η (9.24) μας δίνει

$$Y_k(t) = A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y), \tag{9.25}$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές και $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (9.25). Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$Y_k(y)\,X_k(x) = \big(A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

λύνουν την εξίσωση (9.21) και επαληθεύουν τις συνθήκες (9.23). Το ίδιο και η σειρά

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\,\mathcal{Y}_1(y) + B_k\,\mathcal{Y}_2(y)\big)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{9.26}$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (9.22). Γράφουμε τις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(0)\,\sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x, ,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k\,\mathcal{Y}_1(0) + B_k\,\mathcal{Y}_2(0) = a_k. \tag{9.27}$$

Επίσης

$$u(x, \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\pi)\,\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

άρα

$$A_k\,\mathcal{Y}_1(\pi) + B_k\,\mathcal{Y}_2(\pi) = b_k. \tag{9.28}$$

Αρα, η λύση είναι η (9.26) όπου οι A_k, B_k ορίζονται απο (9.27), (9.28).

Παρατήρηση 2. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(0) & \mathcal{Y}_2(0) \\ \mathcal{Y}_1(\pi) & \mathcal{Y}_2(\pi) \end{pmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός αφου οι $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 9.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + 4u_{yy} - 4u_y + u = 0 \ \ (x, y) \in (0, \pi)^2,$$
$$u(x, 0) = \sin x, \ \ u(x, \pi) = 0, \qquad y \in (0, \pi),$$
$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \ \ x \in (0, \pi).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την άνω διαδικασία παίρνουμε

$$X_k(x) = \sin kx$$

και

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{1+k}{2}y} + B_k e^{\frac{1-k}{2}y}$$

αφου το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της

$$Y''(y) - Y'(y) + \frac{1-k^2}{4} Y(y) = 0$$

είναι $e^{\frac{1+k}{2}y}$, $e^{\frac{1-k}{2}y}$. Συνεπώς για τον προσδιοριζμό των A_k και B_k έχουμε

$$A_k + B_k = a_k,$$
$$A_k e^{\frac{1+k}{2}\pi} + B_k e^{\frac{1-k}{2}\pi} = b_k.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$a_1 = 1, \ \ a_k = 0 \ \text{ για } \ k \neq 1, \ \ b_k = 0 \ \ \forall k$$

παίρνουμε

$$A_1 + B_1 = 1, \ \ A_k + B_k = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 3\dots,$$
$$A_k = -B_k e^{-k\pi}$$

ήτοι

$$A_1 = -\frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \ \ B_1 = \frac{1}{1 - e^{-\pi}},$$
$$A_k = B_k = 0 \ \text{ για } \ k = 2, 3\dots.$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \Big(\frac{e^{-\pi}}{e^{-\pi} - 1} e^y - \frac{1}{e^{-\pi} - 1}\Big) \sin x = \frac{e^{y-\pi} - 1}{e^{-\pi} - 1} \sin x.$$

Ασκήσεις.

1. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής $x \to \xi$ ($\xi = h(x)$) ανάγετε το πρόβλημα

$$e(t)u_{tt} - a(x)u_{xx} + b(t)u_t - c(x)u_x + d(t)u = 0 \ \text{ στο } \ (-\infty, +\infty) \times (l_1, l_2)$$
$$u(0, x) = \phi(x), \ \ u_t(0, x) = \psi(x) \ \text{ για } \ l_1 < x < l_2$$

$$u(t, l_1) = u(t, l_2) = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty$$

με τυχαία l_1, l_2 ($l_1 < l_2$), σε πρόβλημα

$$e(t)u_{tt} - \tilde{a}(\xi)u_{\xi\xi} + b(t)u_t - \tilde{c}(\xi)u_\xi + d(t)u = 0 \ \text{στο} \ (-\infty, +\infty) \times (0,\, \pi)$$

$$u(0, \xi) = \tilde{\phi}(\xi), \ \ u_t(0, \xi) = \tilde{\psi}(\xi) \ \text{για} \ 0 < \xi < \pi$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty$$

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - 2u_{xx} + u = \sin 2x \ \ (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi),$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

$$u(0, x) = \sin 3x, \ \ x \in (0, \pi).$$

3. Ανάγετε το πρόβλημα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{στο} \ (x, y) \in (0, 2\pi) \times (c, d)$$

$$u(x, c) = \phi(x), \ \ u(x, d) = 0 \ \text{για} \ 0 \le x \le 2\pi$$

$$u(0, y) = u(2\pi, y) = 0 \ \text{για} \ c \le y \le d$$

σε πρόβλημα

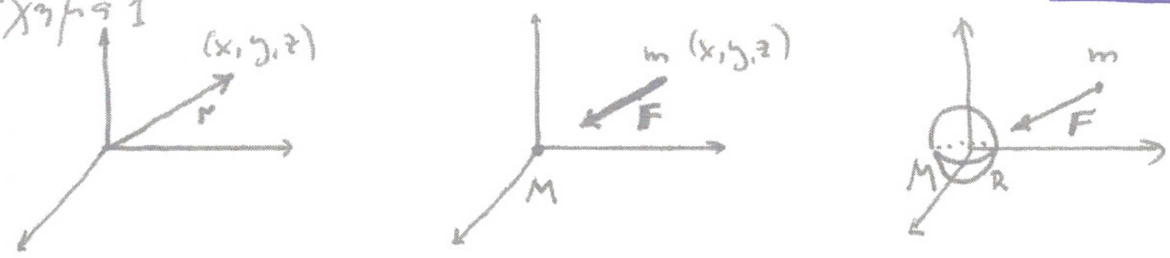
$$\alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\eta\eta} = 0 \ \text{στο} \ (\xi, \eta) \in (0,\, \pi)^2$$

$$u(\xi, 0) = \tilde{\phi}(\xi), \ \ u(\xi, \pi) = 0 \ \text{για} \ 0 \le \xi \le \pi$$

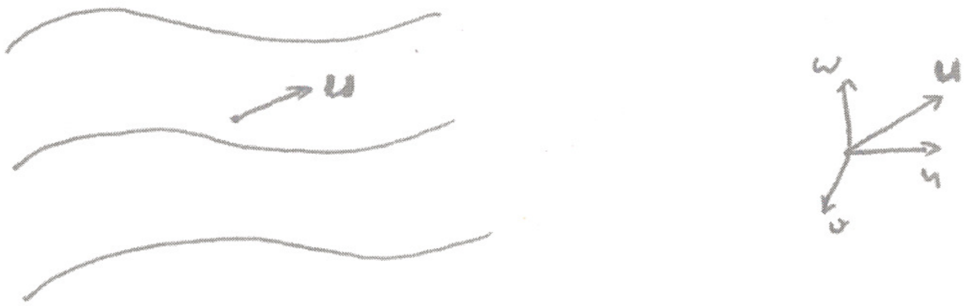
$$u(0, \eta) = u(\pi, \eta) = 0 \ \text{για} \ 0 \le \eta \le \pi$$

και έπειτα προσδιορίστε τη λύση (του αρχικού προβλήματος) για $\phi(x) = \sin \frac{x}{2}$.

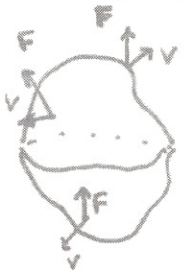
σχήμα 1



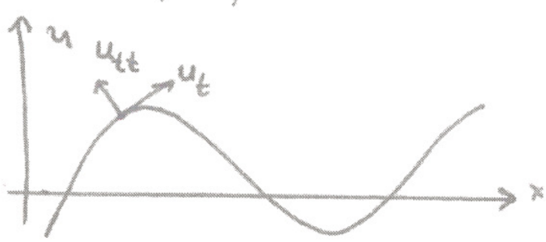
σχήμα 2



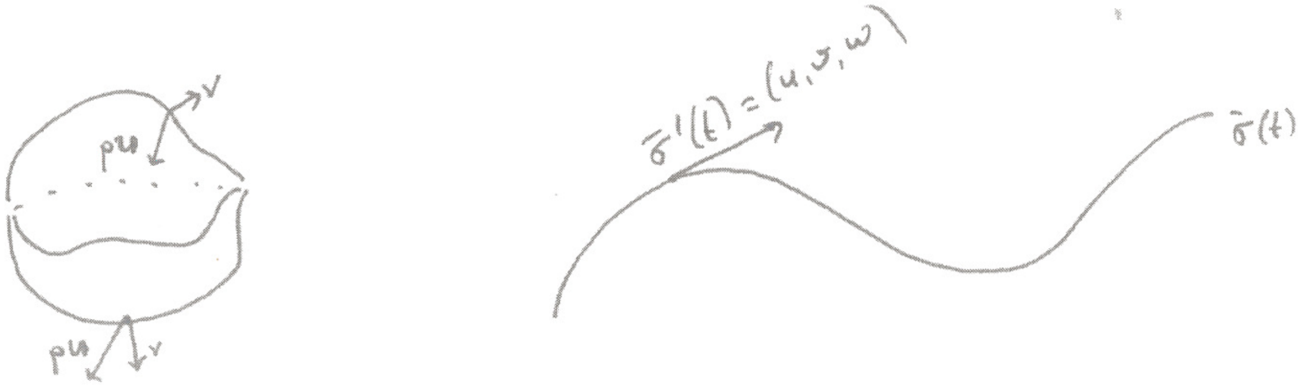
σχήμα 3



σχήμα 4

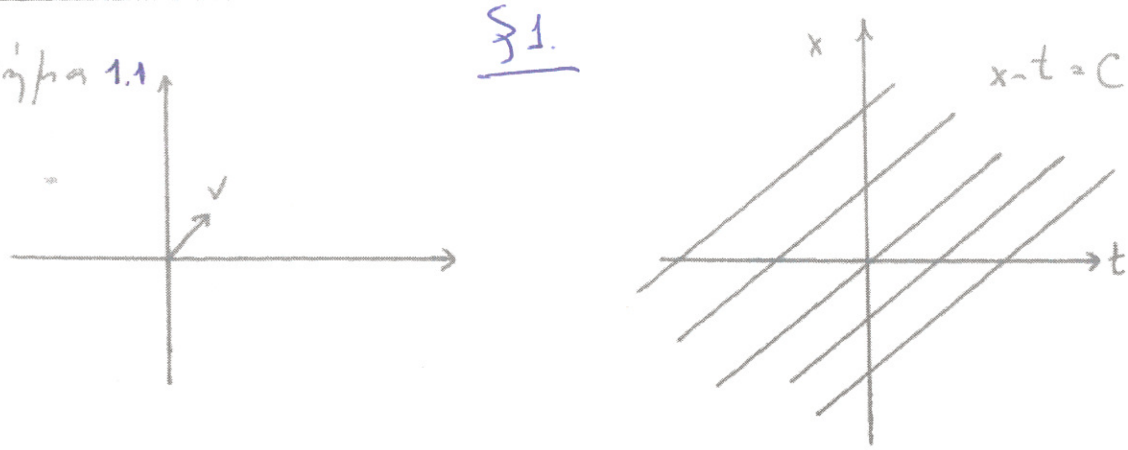


σχήμα 5

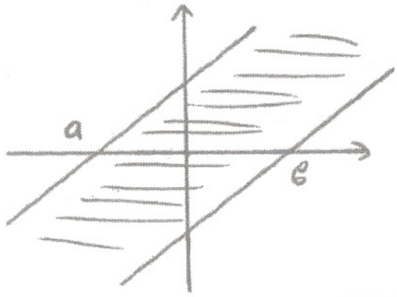


§1.

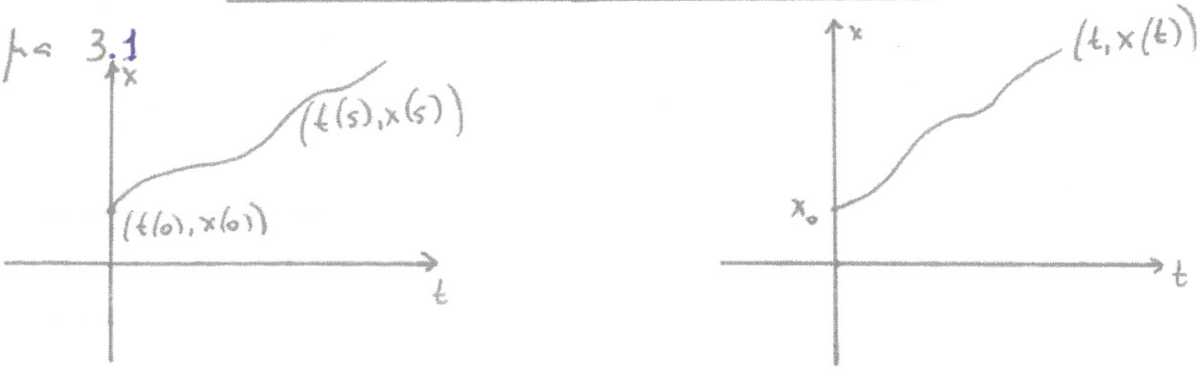
σχήμα 1.1



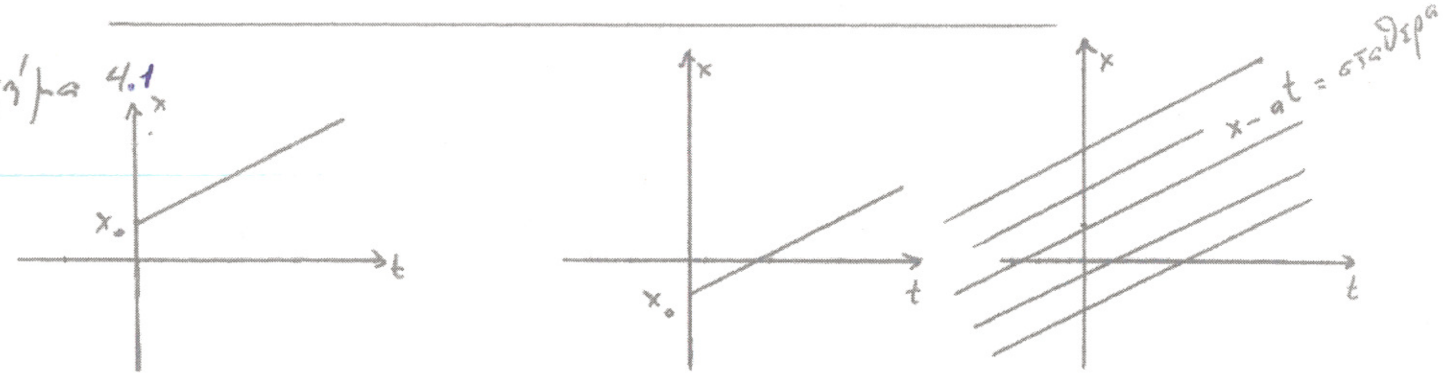
σχήμα 2.1



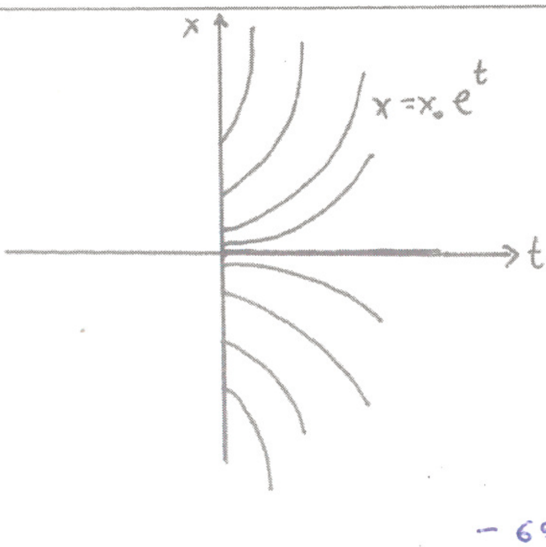
σχήμα 3.1



σχήμα 4.1



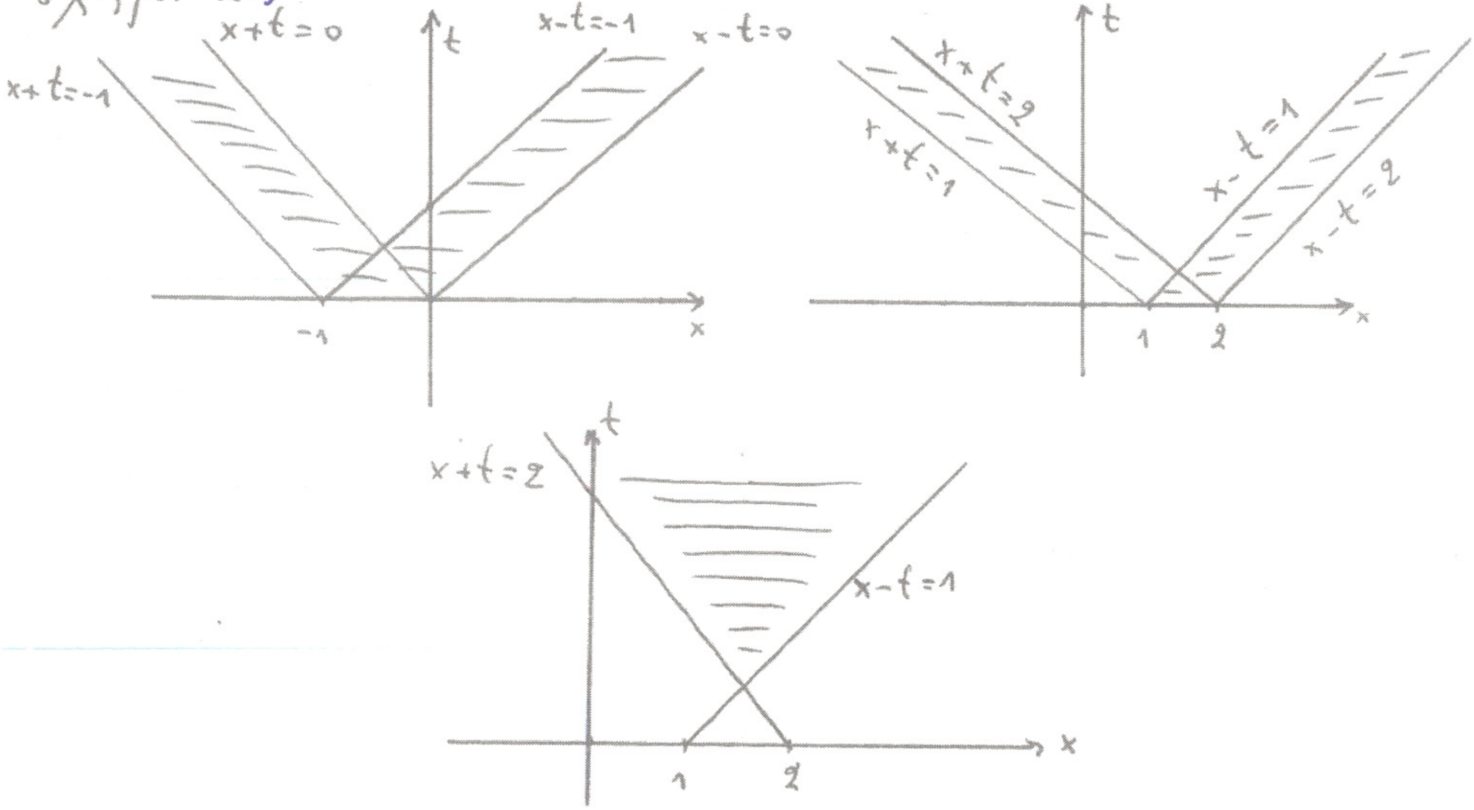
σχήμα 5.1



§3

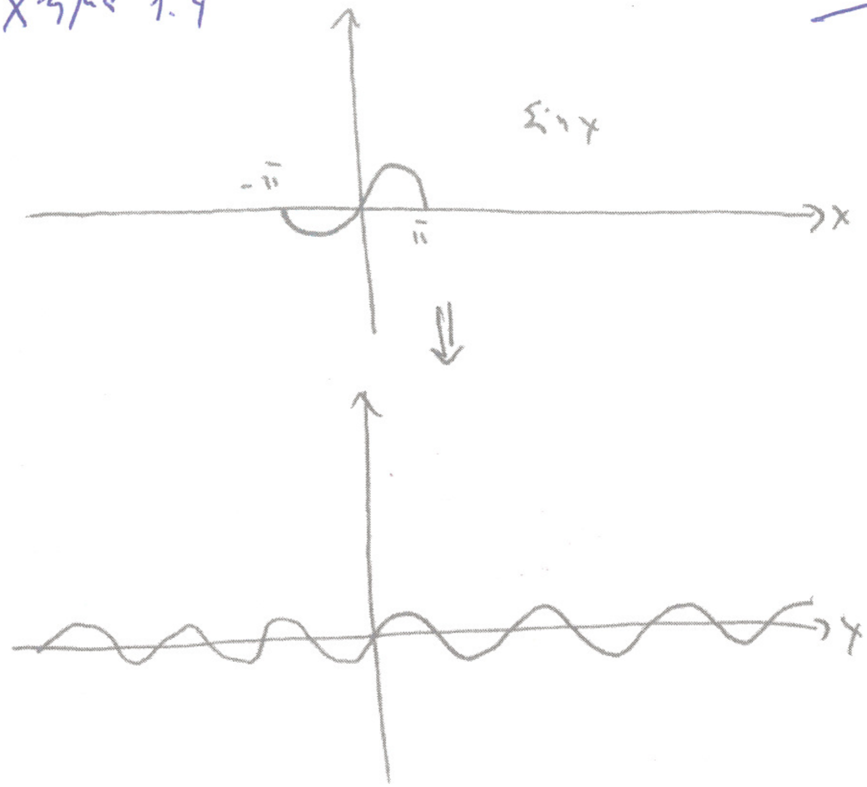
σχήμα 1.3

σχήμα 2.3

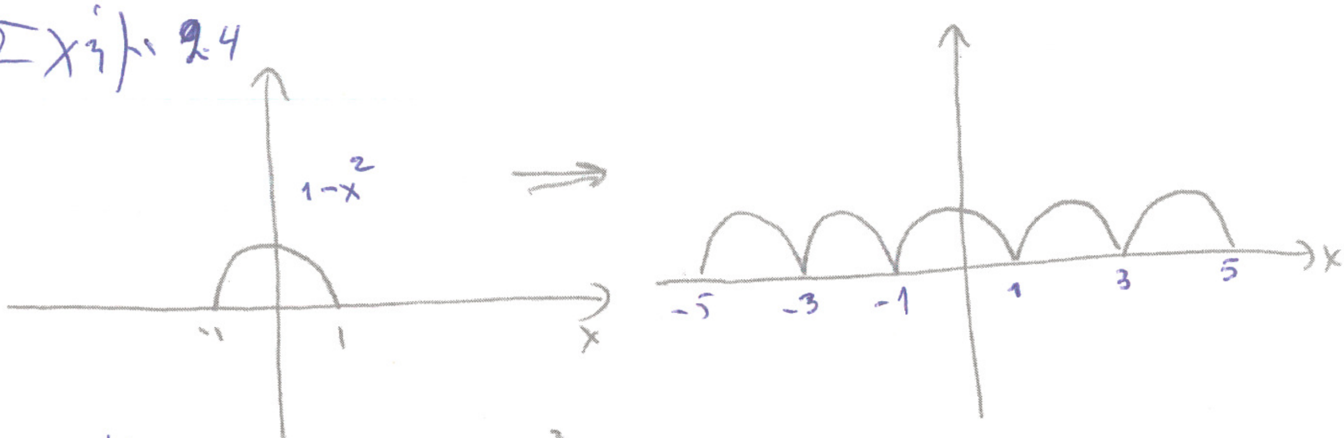


§4

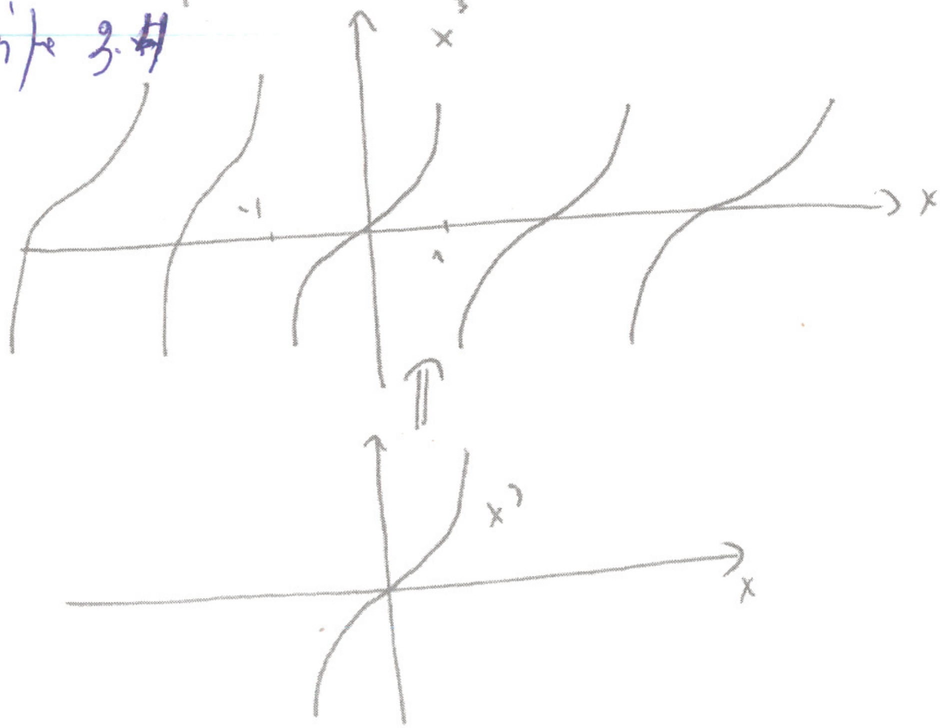
Σχήμα 1.4



Σχήμα 2.4

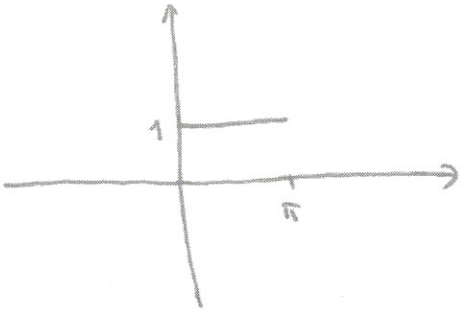


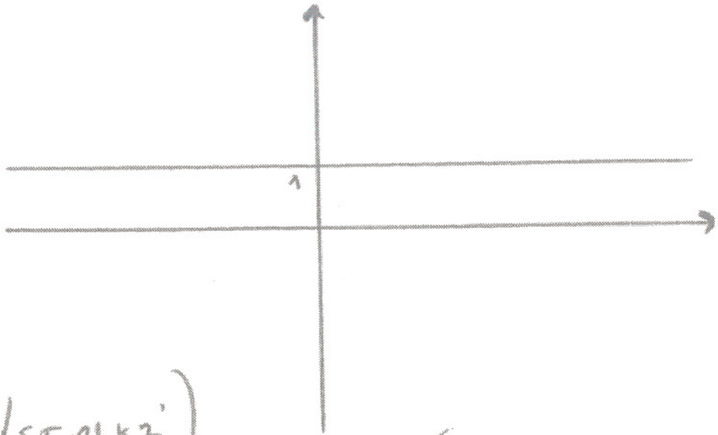
Σχήμα 3.4



Σχήμα 4.4

$f(x) = 1 \quad x \in (0, \pi)$ $\qquad$ $f(x) = 1$ στον $\mathbb{R}$





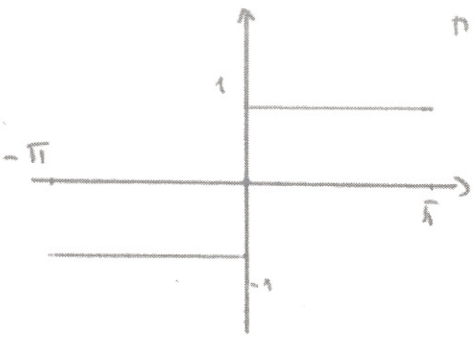
σειρά Fourier (τριγωνομετρική)

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) \qquad \left(\frac{k\pi}{\ell} = k \text{ αφού } \ell = \pi \right)$$

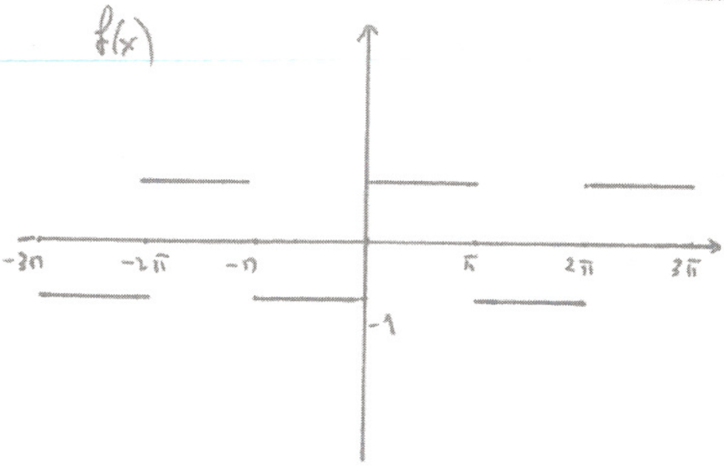
$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2 \qquad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0$$

$$1 = 1 \, !$$

Σχήμα 5.4



περιττή επέκταση



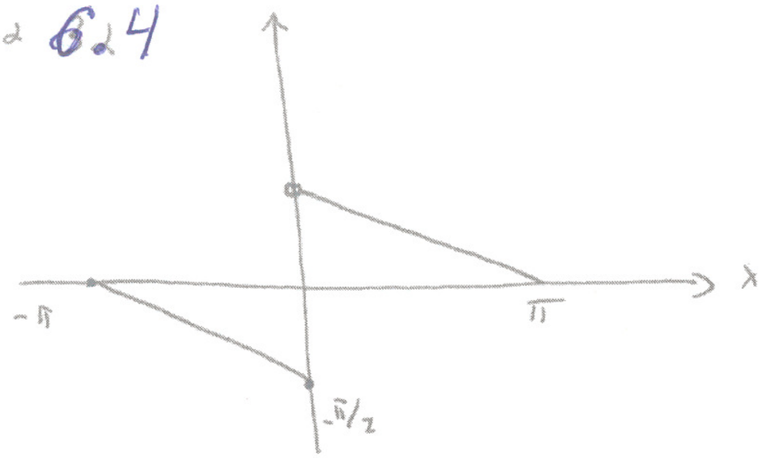
$$\alpha_k = 0$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin kx \, dx$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx \; ?$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$$ εκτός από τα σημεία $k\pi$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

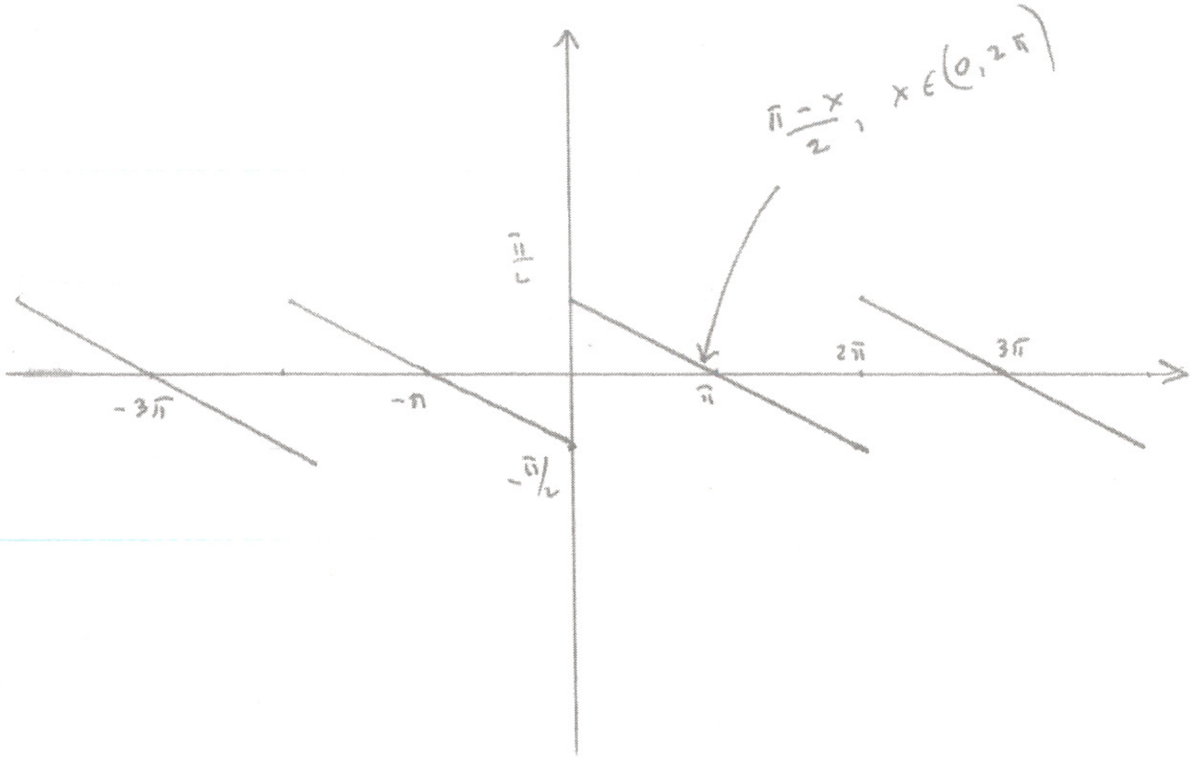
σχήμα 6.4



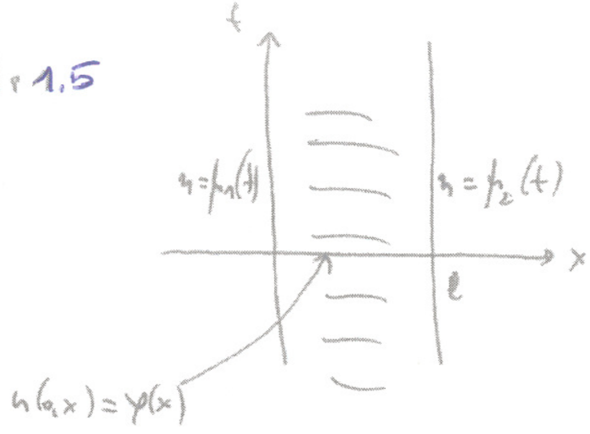
$\frac{\pi - x}{2}, \ x \in (0, \pi)$

$\frac{-\pi - x}{2}, \ x \in (-\pi, 0]$

σχήμα 7.1



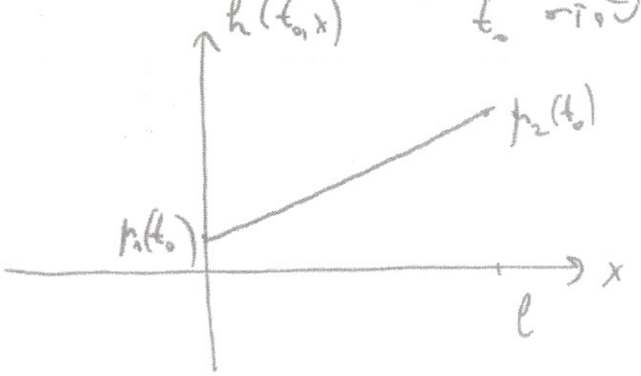
σχήμα 1.5



$u_t(0,x)=\psi(x)$

t_0 σταθεροποιημένο

σχήμα 2.5



σχήμα 3.5