Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόοδος, 10/4/2025

1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y' = y/x + e^{-y/x}$$

και έπειτα λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$y(1) = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση είναι της μορφής

$$y' = f(\frac{y}{x}) \ \text{ με } \ f(z) = z + e^{-z}.$$

Για

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad (y(x) = xz(x))$$

έχουμε

$$xz' + z = z + e^{-z} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = e^{-z}$$

άρα

$$e^z = \ln|x| + C \ \text{ συνεπώς } \ z(x) = \ln(\,\ln|x| + C)$$

και η γενική λύση είναι

$$y(x) = x\ln(\,\ln|x| + C).$$

Η λύση του προβλήματος *Cauchy* είναι

$$y(x) = x\ln(\,\ln|x| + 1).$$

$\star$

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$y' - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}xy^3, \quad y(0) = 1.$$

Λύση. Είναι εξίσωση *Bernoulli*, για την

$$z(x) = y^{-2}(x)$$

έχουμε

$$z' + z = x, \quad z(0) = 1$$

άρα

$$z(x) = 2e^{-x} + x - 1$$

και η λύση (αφού $y(0) = 1$) είναι

$$y(x) = (2e^{-x} + x - 1)^{-1/2}.$$

$\star$

3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$M(x, y)\, dx + dy = 0.$$

Ποια συνθήκη πρέπει να επαληθεύει η συνάρτηση $M(x, y)$ για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\mu = \mu(x \cdot y);$$

Λύση. Για να είναι πλήρης η

$$\mu M\, dx + \mu dy = 0$$

πρέπει

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

συνεπώς, αφού $\mu = \mu(xy)$,

$$\mu' x M + \mu M_y = \mu' y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y}{y - xM}.$$

Άρα $M(x, y)$ πρέπει να είναι τ.ω. το κλάσμα

$$\frac{M_y}{y - xM}$$

να είναι συνάρτηση μόνο του xy, δηλαδή για κάποια ϕ

$$\frac{M_y}{y - xM} = \phi(xy)$$

$\star$

4. Να βρεθεί η γενική λύση $y(x)$ της εξίσωσης

$$y'' + 4\, y = \frac{2}{\sin 2x} + x^3 + x^2.$$

Λύση. Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση

$$y'' + 4\, y = 0.$$

Οι ρίζες του χαρ. πολυωνύμου ($k^2+4=0$) είναι $\pm 2i$ και η γενική λύση της ομογενούς

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Τη μερική λύση y_1 της

$$y'' + 4\,y = \frac{2}{\sin 2x}$$

την ψάχνουμε σε μορφή

$$y_1(x) = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών. Έχουμε

$$c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0,$$

$$-2c_1'(x)\sin 2x + 2c_2'(x)\cos 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Καταλήγουμε στο

$$c_1(x) = x, \quad c_2(x) = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$$

άρα

$$y_1(x) = x\cos 2x + \frac{1}{2}\ln(|\sin 2x|)\,\sin 2x$$

Τη μερική λύση y_2 της

$$y'' + 4\,y = x^3 + x^2$$

την ψάχνουμε σε μορφή

$$y_2(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριζόμενων σταθερών. Αντικαθιστώντας την $y_2(x)$ στην εξίσωση, έχουμε

$$6Ax + 2B + 4Ax^3 + 4Bx^2 + 4Cx + 4D = x^3 + x^2.$$

Άρα

$$A = 1/4, \quad B = 1/4, \quad C = -3/8, \quad D = -1/8$$

και

$$y_2(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}.$$

Η γενική λύση της αρχικής εξίσωσεις είναι

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + y_1(x) + y_2(x) =$$

$$C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \ln|\sin 2x| + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}.$$

$\star$

Αποτελέσματα

Βαθμός	ΑΜ
9.5	3380
8.5	3319, 3306, 6116, 3290
7.5	2870
7.0	3327
6.0	5690
5.5	6532, 6520, 3054
5.0	3242, 3169
4.0	6487, 3291, 2904, 6331, 6452, 4838, 5959
3.5	6508, 6527, 6008, 6381, 3218
3.0	6371
2.5	6463, 2840
2.0	3116, 2565, 6459, 3136, 3172, 3180, 2979