Πρώτη και Δεύτερη Διαστημική Ταχύτητα

Άλκης Τερσένοβ

1. Πρώτη Διαστημική Ταχύτητα και Γεωστατική Τροχιά

Πρώτη Διαστημική Ταχύτητα *ονομάζεται η ελάχιστη ταχύτητα που θα πρέπει να αναπτύξει ένα σώμα που κινείται χωρίς τριβή παράλληλα με την επιφάνεια της Γης (σε απειροελάχιστη απόσταση από αυτή) προκειμένου να μην πέσει πάνω στην επιφάνεια της Γης.*

Η Γη θεωρείται σφαίρα με ακτίνα $\approx 6370km$.

Γεωστατική (ή Γεωσύγχρονη) Τροχιά *ονομάζεται η κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, κατά την οποία το σώμα κινείται με γωνιακή ταχύτητα ίση με τη γωνιακή ταχύτητα της Γης.*

Σε περίπτωση τέτοιας κίνησης το σώμα από τη Γη φαίνεται σταθερό, καθώς βρίσκεται πάντοτε πάνω από το ίδιο σημείο της επιφάνειας της Γης. Το σώμα κινείται πάνω από τον ισημερινό.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με κέντρο στο σημείο $(0,0)$ (βλ. σχήμα 1 σελ. 6). Έστω T η περίοδος περιστροφής. Η παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς είναι:

$$\overline{\sigma}_r(t) = (x(t), y(t)) = \Big(r\, cos\frac{2\pi}{T}t, r\, sin\frac{2\pi}{T}t\Big),$$

εδώ $t \in [0, T)$ είναι ο χρόνος. Η ταχύτητα $\overline{v}_r(t)$ ορίζεται ως

$$\overline{v}_r(t) = \overline{\sigma}'_r(t) = \Big(-\frac{2\pi\, r}{T} sin\frac{2\pi}{T}t, \frac{2\pi\, r}{T} cos\frac{2\pi}{T}t\Big)$$

και η επιτάχυνση $\overline{a}_r(t)$ ως

$$\overline{a}_r(t) = \overline{v}'_r(t) = \overline{\sigma}''_r(t) = \Big(-\frac{4\pi^2\, r}{T^2} cos\frac{2\pi}{T}t, -\frac{4\pi^2\, r}{T^2} sin\frac{2\pi}{T}t\Big).$$

Προφανώς

$$\overline{a}_r(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\overline{\sigma}_r(t).$$

Έχουμε

$$\sigma_r = \|\overline{\sigma}_r(t)\| = r, \quad v_r = \|\overline{v}_r(t)\| = \frac{2\pi\, r}{T}, \quad a_r = \|\overline{a}_r(t)\| = \frac{4\pi^2\, r}{T^2},$$

δηλαδή v_r είναι το μέτρο της ταχύτητας και a_r το μέτρο της επιτάχυνσης αντιστοίχως. Αφού T είναι ο χρόνος μιας περιστροφής, έχουμε

$$T = \frac{2\pi r}{v_r},$$

συνεπώς

$$a_r = \frac{v_r^2}{r} \ \ \text{ή} \ \ v_r = \sqrt{a_r r}. \tag{1}$$

Έστω τώρα R η ακτίνα της Γης και g η επιτάχυνση βαρύτητας πάνω στην επιφάνεια της Γης ($\approx 9.8\ m/sec^2$). Για να περιστρέφεται ένα σώμα πάνω από την επιφάνεια της Γης ($r = R$) χωρίς να πέφτει πάνω της (δεν υπολογίζουμε την τριβή) πρέπει

$$a_R = g,$$

άρα η *Πρώτη Διαστημική Ταχύτητα* v_I είναι ίση με

$$v_I = v_R = \sqrt{gR} \approx 7.9\, km/sec = 28440\, km/h.$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα την ταχύτητα v_r (το μέτρο της ταχύτητας) με την οποία πρέπει να κινείται ένα σώμα σε κυκλική τροχιά σε ύψος $h = r - R$ από την επιφάνεια της Γης (ή σε απόσταση r από το κέντρο της Γης).

Θα βρούμε πρώτα την επιτάχυνση βαρύτητας g_r στο ύψος $h = r - R$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Έστω M μάζα της Γης, m μάζα του σώματος και F_R το μέτρο της δύναμης της βαρύτητας πάνω στην επιφάνεια της Γης. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F_R = \gamma \frac{Mm}{R^2} = \gamma \frac{M}{R^2} m,$$

από την άλλη

$$F_R = g\, m$$

συνεπώς

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Θα υπολογίσουμε τη δύναμη σε ένα ύψος $h = r - R$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F_r = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} m = \gamma \frac{R^2}{r^2} m = g_r m,$$

άρα

$$g_r = g \frac{R^2}{r^2}. \tag{2}$$

Συνεπώς, για να κρατηθεί ένα σώμα σε κυκλική τροχιά σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης (ή σε απόσταση r από το κέντρο της Γης) πρέπει

$$a_r = g_r$$

λαμβάνοντας υπ όψιν την σχέση (1) παίρνουμε

$$v_r = \sqrt{\frac{R}{r}}\sqrt{gR} = \sqrt{\frac{R}{r}}v_R. \tag{3}$$

Π.χ. ένα διαστημόπλιο που βρίσκεται σε κυκλική τροχια σε ύψος $100km$ πάνω από την επιφάνεια της Γης περιστρέφεται με ταχύτητα (μέτρο ταχύτητας) $\approx 28220\ km/h$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την ακτίνα της Γεωστατικής τροχιάς και την ταχύτητα (το μέτρο της ταχύτητας) του σώματος που βρίσκεται πάνω σε αυτή την τροχιά. Από (1), (2) και (3) έχουμε

$$a_r = \frac{v_r^2}{r} = g_r = g\frac{R^2}{r^2} \ \text{ δηλαδή } \ \frac{v_r^2}{r} = g\frac{R^2}{r^2}$$

άρα

$$r = \frac{gR^2}{v_r^2}.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι

$$v_r = \frac{2\pi\, r}{T} \tag{4}$$

παίρνουμε

$$r = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2 r^2} \qquad (T = 24h)$$

ή

$$r = \Big(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\Big)^{1/3} \approx 42400km$$

δηλαδή $\approx 36000\ km$ από την επιφάνεια της Γης. Η ταχύτητα (το μέτρο της ταχύτητας) είναι ίση με $\approx 11000\ km/h$, αυτό προκύπτει από την σχέση (4).

2. <u>Δεύτερη Διαστημική Ταχύτητα ή Ταχύτητα Διαφυγής</u>

Δεύτερη Διαστημική Ταχύτητα *είναι η ελάχιστη ταχύτητα που θα πρέπει να αναπτύξει ένα σώμα προκειμένου να ξεφύγει από τη βαρυτική έλξη που υφίσταται αυτό στην επιφάνεια της Γης.*

Η δύναμη βαρύτητας $\mathbf{F}$ που ασκείται πάνω σε μια μάζα m στη θέση (x, y, z) και που παράγεται από μια μάζα M στη θέση (x_0, y_0, z_0), δίνεται, σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, από την σχέση

$$\mathbf{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) = -\gamma\, M\, m \frac{\mathbf{r}}{r_0^3},$$

όπου $r_0 = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα τοποθετήσουμε το κέντρο της Γης (η οποία θεωρείται όπως και πριν σφαίρα με ακτίνα R και μάζα M) στο σημείο $(x, y, z) = (0, 0, -R)$ (βλ. σχήμα 2 σελ. 6). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{F} = \Big(-\gamma\, M\, m \frac{x}{r_0^3}, -\gamma\, M\, m \frac{y}{r_0^3}, -\gamma\, M\, m \frac{z + R}{r_0^3} \Big),$$

$r_0 = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = (x, y, z + R)$. Θα υπολογίσουμε το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας καθώς ένα σώμα μάζας m μετακινείται από το σημείο $(0, 0, 0)$ στην επιφάνεια της Γης στο σημείο $(0, 0, h)$ που βρίσκεται σε απόσταση $r = h + R$ από το κέντρο της Γης. Εξ ορισμού το έργο W ισούται με

$$W = \int_l \mathbf{F} \cdot ds \equiv \int_l \mathcal{P}\, dx + \mathcal{Q}\, dy + \mathcal{R}\, dz$$

όπου l καμπύλη που συνδέει τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(0, 0, h)$. Αφού το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό, χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα παίρνουμε ως l

$$l: \quad \overline{\sigma}(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (0, 0, s - R), \quad s \in (R, r) \quad (\text{βλ. σχήμα 3 σελ. 6}).$$

Έχουμε

$$\mathcal{R}(\overline{\sigma}(s)) = -\gamma\, M\, m \frac{s - R + R}{(0^2 + 0^2 + (s - R + R)^2)^{3/2}} = -\gamma\, M\, m \frac{1}{s^2}.$$

Συνεπώς

$$W = \int_l \mathcal{P}\, dx + \mathcal{Q}\, dy + \mathcal{R}\, dz = \int_R^r \mathcal{R}(0, 0, s - R) z'(s) ds = -\gamma\, M\, m \int_R^r \frac{ds}{s^2} =$$

$$-\gamma\, M\, m \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \Big) = -\gamma\, M\, m \frac{h}{(h + R) R}.$$

Η δυναμική ενέργεια E_Δ ορίζεται ως

$$E_\Delta = -W = \gamma\, M\, m \frac{h}{(h + R) R} = \gamma \frac{M}{R^2} m\, h \frac{R}{R + h} = g\, m\, h \frac{R}{R + h}.$$

(αφού $g = \gamma\, M\, R^{-2}$). Παρατηρούμε ότι κοντά στην επιφάνεια της Γης $E_\Delta \approx g\, m\, h$. Η ολική ενέργεια E αποτελείται από την κινητική ενέργεια E_K και την δυναμική ενέργεια E_Δ. Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα μάζας m ξεκινάει από το σημείο $(0,0,0)$ (κατά μήκος της l) με αρχική ταχύτητα v και φτάνει (σταματάει) στο σημείο $(0,0,h)$. Στο σημείο $(0,0,0)$ έχουμε

$$E = E_K + E_\Delta = E_K = \frac{m\, v^2}{2}$$

ενώ στο σημείο $(0,0,h)$

$$E = E_K + E_\Delta = E_\Delta = g\, m\, R^2 \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \Big).$$

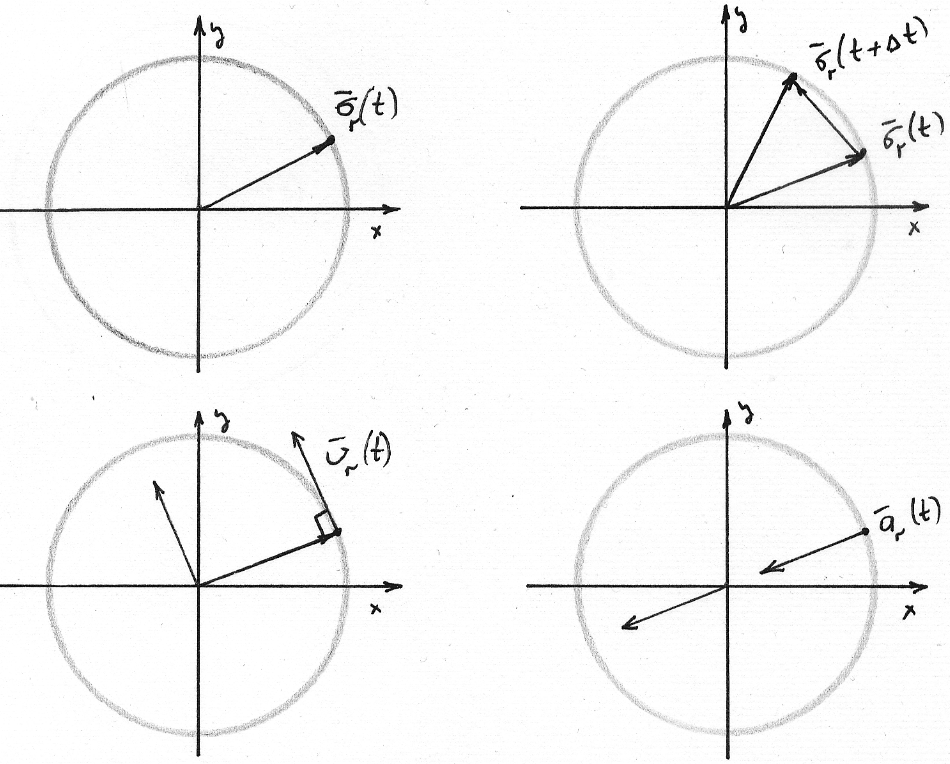
Αφού η ολική ενέργεια παραμένει αμετάβλητη, έχουμε

$$\frac{m\, v^2}{2} = g\, m\, R^2 \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \Big) \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2g\, R^2 \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \Big)}.$$

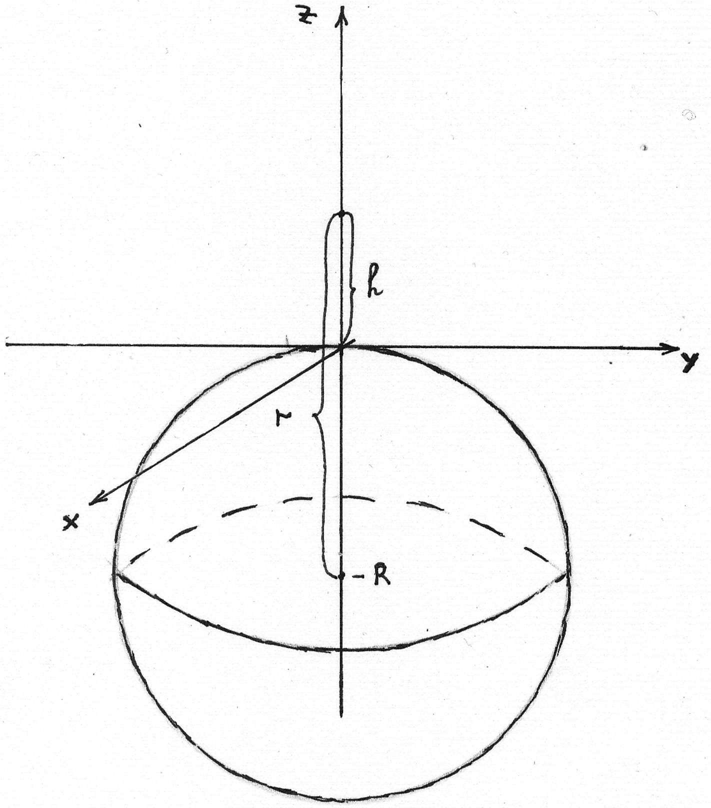
Το σώμα θα ξεφύγει από τη βαρυτική έλξη της Γης αν $r \to \infty$, δηλαδή

$$v_{II} = \lim_{r \to \infty} v = \sqrt{2g\, R} \approx 11.2\, km/sec.$$

Όπως βλέπουμε η διαφορά μεταξύ της Πρώτης Διαστημική Ταχύτητα (v_I) και της Δεύτερης Διαστημικής Ταχύτητας (v_{II}) είναι μικρή $v_{II} = \sqrt{2}\, v_I$.



σχήμα 1



σχήμα 2