Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

1η Εβδομάδα, 1η Διάλεξη

Εισαγωγή.

Όπως γνωρίζεται από το εισαγωγικό μάθημα, το πρόβλημα της πτώσης ενός υλικού σημείο το οποίο επιταχύνει υπό την επίδραση της βαρύτητας g και επιβραδύνει λόγω ατμοσφαιρικής τριβής $-ks'^2(x)$ περιγράφεται από το εξής πρόβλημα $Cauchy$:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = g - k\Big(\frac{ds}{dx}\Big)^2 \quad \big(\text{ή } \; s'' = g - k(s')^2\big),$$
$$s(0) = 0, \;\; s'(0) = 0.$$

Εδώ $s(x)$ είναι η απόσταση από το αρχικό σημείο τη χρονική στιγμή x, συνεπώς $s'(x)$ είναι η ταχύτητα και $s''(x)$ η επιτάχυνση.

Για την ταχύτητα $y(x) = s'(x)$ το ανώ πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

(1) $$\frac{dy}{dx} = g - ky^2 \;\text{ με αρχική συνθήκη }\; y(0) = 0.$$

Προφανώς έχουμε εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές

$$1 = \frac{1}{g-ky^2}\frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{y'}{g-ky^2}$$

και ολοκληρώνουμε απο το 0 εως x (αφού $y(0) = 0$)

$$\int_0^x 1\,d\tau = \int_0^x \frac{y'}{g-ky^2}d\tau = \int_0^y \frac{d\xi}{g-k\xi^2}.$$

Προφανώς $\int_0^x 1\,d\tau = x$ και

$$\int_0^y \frac{d\xi}{g-k\xi^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\int_0^y \Big(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\xi} + \frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\xi}\Big)d\xi =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{|\sqrt{g}+\sqrt{k}y|}{|\sqrt{g}-\sqrt{k}y|}.$$

Αν υποθέσουμε οτι

$$0 \le y < \sqrt{g/k} \;\text{ για }\; 0 \le t < +\infty$$

(αυτό θα το αποδείξουμε αυστηρά) καταλήγουμε στη σχέση

$$2\sqrt{gk}x = \ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}y}{\sqrt{g}-\sqrt{k}y} \quad \text{ή} \quad e^{2\sqrt{gk}x} = \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}y}{\sqrt{g}-\sqrt{k}y}.$$

Συνεπώς

(2) $$y(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}\frac{e^{2\sqrt{gk}x}-1}{e^{2\sqrt{gk}x}+1},$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η λύση σε «κλειστή μορφή» δηλαδή σε μορφή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης ή σύνθεσης συναρτήσεων που λύνει το πρόβλημα. Ακόμα και στο παράδειγμα που μας οδήγησε στο πρόβλημα (1), αν θα πάρουμε τις σταθερές k και g να είναι συναρτήσεις του αρχικού ύψους h (που προφανώς είναι), τότε δεν θα μπορέσουμε να βρούμε τη λύση σε κλειστή μορφή. Η επιτάχυνση βαρύτητας σε ένα ύψος h πάνω απο την επιφάνεια της Γης ισούται με

$$g_h = \frac{R^2}{(h+R)^2} g \quad \text{όπου} \quad R - \text{ακτίνα της Γης},$$

στην επιφάνεια της Γης $h = 0$ και η επιτάχυνση ισούται με g. Όσο πιο χαμηλά βρίσκεται το αντικείμενο τόσο η αντίσταση της ατμόσφαιρας μεγαλώνει λόγω αυξησης της πυκνότητας, άρα k ειναι συνάρτηση του ύψους στο οποίο βρίσκεται το αντικείμενο. Προφανώς τη χρονική στιγμή x το κέντρο μάζας του αντικειμένου βρίσκεται στο ύψος $h - s(x)$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις παρατηρήσεις, το πρόβλημα (1) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{g}(x) - \tilde{k}(x) y^2, \quad y(0) = 0 \tag{3}$$

όπου

$$\tilde{g}(x) = \frac{R^2}{(h - s(x) + R)^2} g \quad \text{και} \quad \tilde{k}(x) = k(h - s(x)).$$

Προφανώς και οι δύο διορθώσεις βελτιώνουν την ακρίβεια της περιγραφής του φαινομένου, όμως δεν μπορούμε να βρούμε την λύση του προβλήματος (3). Όταν δεν μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα $Cauchy$ σε κλειστή μορφή, τίθεται ένα εύλογο ερώτημα αν η λύση αυτού του προβλήματος υπάρχει.

Μερικές φορές η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών υπάρχει παντού δηλαδή για όλες τιμές της μεταβλητής ενώ μερικές φορές όχι, η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1$$

είναι η συνάρτηση $y(x) = e^x$ η οποία ορίζεται για όλα τα x, ενώ η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1, \tag{4}$$

είναι η συνάρτηση

$$y(x) = (1 - x)^{-1}$$

και υπάρχει μόνο για $x < 1$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε παράδειγμα όπου η λύση θα υπάρχει μόνο σε ένα διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ γύρω από το σημείο x_0, ή να μην υπάρχει καθόλου. Έχουμε εδώ ενα εύλογο ερώτημα: πότε συμβαίνει το ένα και πότε το άλλο και γιατί; Μπορεί να πει κανείς ότι αυτό οφείλεται στην μη γραμμικότητα του (4). Εν μέρη αυτό είναι σωστό, όμως μόνο εν μέρει διότι η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2, \quad y(0) = 0, \tag{5}$$

υπάρχει για όλα τα x, και η εξίσωση έχει ίδια μη γραμμικότητα. Προφανώς η λύση του (5) είναι (βλ. (2))

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1}.$$

Επίσης είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν η λύση του προβλήματος είναι μοναδική. Π.χ. το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, την

$$y(x) = \begin{cases} x^2/4, & \text{για } x \geq 0 \\ 0, & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

και την $y(x) \equiv 0$. Θα δείξουμε οτι το προβλημα αυτό έχει άπειρες λύσεις. Η μοναδικότητα παραβιάζεται. Άρα πρέπει να ξέρουμε υπό ποιές προϋποθέσεις η λύση είναι μοναδική.

Τις απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα θα τις δώσουμε στις επόμενες διαλέξεις.

Βοηθητικές έννοιες και εργαλεία

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(0.1) \qquad y' = f(x, y), \quad x \in (c,\, d) \quad \Big(\text{ή } \; \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in (c,\, d)\Big).$$

Πρόβλημα $Cauchy$ (ή πρόβλημα αρχικών τιμών):

Να βρεθεί η λύση $y(x)$ της εξίσωσης (0.1) η οποία στο σημείο $x_0 \in (c,\, d)$ παίρνει δοσμένη εκ των προτέρων τιμή y_0, δηλαδή

$$(0.2) \qquad y(x_0) = y_0,$$

η συνθήκη (0.2) όπως θυμάστε ονομάζεται αρχική συνθήκη.

Για να αποδείξουμε οτι η λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) υπάρχει θα χρειαστούμε μερικά εργαλεία από την Ανάληση τα οποία για την διευκόλυνση της ανάγνωσης θα τα αναφέρουμε.

Ορισμός. *Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην συνάρτηση $\phi(x)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.*

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon \;\; \forall n > n(\varepsilon) \;\; \text{και} \;\; \forall x \in I.$$

Για παράδειγμα η ακολουθία $\phi_n(x) = x^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$, ενώ στο διάστημα $[0, 1-\delta]$ $\forall \delta \in (0, 1)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\phi(x) \equiv 0$.

Κριτήριο $Cauchy$. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.*

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| \leq \varepsilon \;\; \forall n, m > n(\varepsilon) \;\; \text{και} \;\; \forall x \in I.$$

Θεώρημα 0.1. *Αν η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε το όριο είναι συνεχής συνάρτηση.*

Το Θεώρημα αυτό δεν ισχύει αν η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Πράγματι η ακολουθία συνεχών στο $[0, 2]$ συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{για } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{για } x \in [1, 2] \end{cases}$$

συγκλίνει κατα σημείο (οχι ομως ομοιόμορφα) στην συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x \in [0,1) \\ 1, & \text{για } x \in [1,2] \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συναρτησιακή σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(x), \quad x \in I$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο I αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυτης της σειράς. Δηλαδή αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \eta_i(x).$$

Είναι αυτονόητο οτι οι συναρτήσεις η_i θεωρούνται ορισμένες στο I.

Κριτήριο $Weierstrass$**.** *Έστω ότι η αριθμητική σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad a_i \geq 0$$

συγκλίνει, και έστω οτι

$$|\eta_i(x)| \leq a_i, \quad \forall x \in I, i = 0, 1, 2, \dots .$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο I.

Ο τελευταίος ορισμός που θα μας χρειαστεί:

Ορισμός. *Λέμε ότι η $f(x, y)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz (ή αλλιώς είναι Lipschitz συνεχής) ως προς y σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ αν υπάρχει μια σταθερά $K > 0$ τ.ω.*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

Το χωρίο Ω δεν είναι απαραίτητα φραγμένο.

Ας δόσουμε μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

1. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

με φραγμένη συνάρτηση $a(x)$ επαληθευει τη συνθήκη του *Lipschitz* (ως προς y) για κάθε $x \in I$ και για κάθε $|y| < \infty$. Πράγματι εδώ

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |a(x)y_2 - a(x)y_1| \leq K|y_2 - y_1|$$

με $K = \sup_I |a(x)|$.

2. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin y \quad (\text{ή} \quad \cos y)$$

είναι *Lipschitz* συνεχής για κάθε $|y| < \infty$ με $K = 1$. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής $\exists \xi \in [y_1, y_2]$ τ.ω.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |\sin y_2 - \sin y_1| = |\cos \xi||y_2 - y_1| \leq |y_2 - y_1|.$$

3. Οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = y^2 \;\text{ και }\; f(x, y) = 1 - y^2$$

επαληθεύουν τη συνθήκη του *Lipschitz* για κάθε $|y| < l$ με $K = 2l$. Πράγματι,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1| \leq 2l|y_2 - y_1|.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η σταθερά K εξαρτάται από το μέγεθος του χωρίου ως προς το y, δηλαδή αν το χωρίο δεν είναι φραγμένο ως προς y τότε οι συναρτήσεις αυτές δεν ικανοποιούν την συνθήκη του *Lipschitz*. Πράγματι, για οποιαδήποτε σταθερά $K < +\infty$ επιλέγουμε y_2, y_1 έτσι ώστε $|y_2 + y_1| > K$, τότε προφανώς

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1| > K|y_2 - y_1|.$$

4. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = y^{1/3}$$

δεν επαληθεύει τη συνθήκη του *Lipschitz* σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το $y = 0$. Πράγματι, $\exists \xi \in [y_1, y_2]$ τ.ω.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2^{1/3} - y_1^{1/3}| = \frac{1}{3}|\xi|^{-2/3}|y_2 - y_1|$$

(εδώ πάλι χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής). Προφανώς $|\xi|^{-2/3}$ τείνει στο άπειρο καθώς ξ τείνει στο μηδέν.

5. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = x + \alpha|y|, \alpha - \text{σταθερά}$$

είναι *Lipschitz* συνεχής (ως προς y) για κάθε $y \in (-\infty, \infty)$ με $K = |\alpha|$ αφού

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |\alpha||y_2 - y_1|.$$

1η Εβδομάδα, 2η Διάλεξη

Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος **Cauchy** (μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων

Το χωρίο στο οπίο θα μελετάμε το πρόβλημα (0.1), (0.2) θα πάρουμε να είναι παραλληλόγραμμο

$$\mathcal{P} = \{(x, y) : x \in (a,\, b),\, y \in (y_0 - Y_0,\, y_0 + Y_0)\}.$$

Επειδή εξ αρχής δεν ξέρουμε που "ζει" η y, παίρνομε ένα αυθαίρετο $Y_0 > 0$.

Θεώρημα 1.1. ($Picard$) *Έστω οτι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και $Lipschitz$ συνεχής ως προς y στο $\mathcal{P}$. Τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ υπάρχει ένα $h > 0$ τετόιο ώστε στο διάστημα $[x_0 - h, x_0 + h]$ υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος $Cauchy$ (0.1), (0.2).*

Απόδειξη (μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων).

Α.) Ύπαρξη της λύσης. Η απόδειξη της ύπαρξης θα πραγματοποιηθεί σε τρία βήματα.

1. Αναγωγή σε ολοκληρωτική εξίσωση. Αν υποθέσουμε ότι η λύση υπάρχει, τότε ολοκληρώνοντας την ταυτότητα

$$y'(\xi) \equiv f(\xi, y(\xi))$$

από το x_0 έως το x, (λαμβάνοντας υπόψη ότι $y(x_0) = y_0$) θα πάρουμε

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{1.1}$$

Η σχέση (1.1) ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση. Σημειώνουμε ότι το x στη (1.1) μπορεί να είναι μεγαλύτερο και μικρότερο του x_0. Αφού η $y(x)$, ως λύση της (0.1), είναι παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής, έχουμε ότι συνεχής είναι και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x, y(x))$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα στην (1.1) έχει νόημα. Άρα οποιαδήποτε λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) αποτελεί την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.1).

Επίσης οποιαδήποτε *συνεχής* λύση της (1.1) ικανοποιεί την (0.1). Αυτό αμέσως προκύπτει από την (1.1) μετά την παραγώγιση και των δυο μελών της. Η πράξη της παραγώγισης μπορεί να εφαρμοστεί επειδή υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) και συνεπώς το δεξί μέλος είναι παραγωγίσιμο ως προς x. Άρα την παράγωγο ως προς x έχει και το αριστερό μέλος της (1.1), δηλαδή η $y(x)$. Η σχέση $y(x_0) = y_0$ προκύπτει άμεσα θεωρόντας την (1.1) στο $x = x_0$. Επομένως οι (0.1), (0.2) και (1.1) είναι ισοδύναμες.

Θα αποδείξουμε ότι η (1.1) έχει μια και μοναδική λύση και ως συνέπεια θα έχουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα για το πρόβλημα αρχικών τιμών (0.1), (0.2).

2. Κατασκευή διαδοχικών προσεγγίσεων.

Έστω $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ (βλ. σχήμα 1α) και έστω

$$M = \max_{(x,y)\in\overline{\mathcal{P}}} |f(x, y)|.$$

Σχεδιάζουμε δυο ευθείες $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ που περνάν από το σημείο (x_0, y_0) και έχουν κλίσεις $\pm M$ αντίστοιχα. Δηλαδή έχουν τη μορφή

$$y = Mx + (y_0 - Mx_0) \;\text{ και }\; y = -Mx + (y_0 + Mx_0).$$

Σχεδιάζουμε επίσης δυο ευθείες $x = x_0 - h$ και $x = x_0 + h$. Επιλέγουμε το $h > 0$ έτσι ώστε και τα δυο τρίγωνα ADB και AEC να ανήκουν στο $\mathcal{P}$ και

$$2hK < 1. \tag{1.2}$$

Εδώ

$$D = \{x = x_0 - h\} \cap \mathcal{L}_2,\ B = \{x = x_0 - h\} \cap \mathcal{L}_1,$$
$$E = \{x = x_0 + h\} \cap \mathcal{L}_2,\ C = \{x = x_0 + h\} \cap \mathcal{L}_1.$$

Προφανώς $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (a, b)$. Θα διαλέξουμε μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση $\phi_0(x)$ το γράφημα της οποιας στο διάστημα $[x_0 - h, x_0 + h]$ ανήκει εξολοκλήρου στα τρίγωνα ADB και AEC και $\phi_0(x_0) = y_0$. Αντικαθιστούμε την $y(\xi)$ με την $\phi_0(\xi)$ στο δεξί μέρος της (1.1). Είναι προφανές ότι μετά την αντικατάσταση το δεξί μέρος της (1.1) θα είναι συνεχής συνάρτηση του x και στο σημείο $x = x_0$ παίρνει την τιμή y_0. Θα την συμβολίσουμε με

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_0(\xi))d\xi.$$

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι το γράφημα της $\phi_1(x)$ δεν βγαίνει έξω από τα τρίγωνα ADB και AEC. Πράγματι, $|f(\xi, \phi_0(\xi))| \leq M$, αφού το γράφημα της $\phi_0(\xi) \in \mathcal{P}$ και επομένως από την προηγούμενη σχέση προκύπτει οτι

$$|\phi_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \phi_0(\xi))|d\xi \right| \leq M|x - x_0|$$

(θυμίζουμε οτι το x μπορεί να είναι μικρότερο του x_0 και για αυτό βάζουμε απόλυτη τιμή στο ολοκλήρωμα). Θέτουμε

$$\phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_1(\xi))d\xi.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της $\phi_1(x)$ είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι η $\phi_2(x)$ έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με την $\phi_1(x)$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία θα πάρουμε μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής :

$$\phi_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_2(\xi))d\xi.$$
$$\cdots$$
$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))d\xi. \tag{1.3}$$
$$\cdots$$

Οι συναρτήσεις

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), ...$$

ονομάζονται διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης. Έτσι καταλήγουμε σε μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_0(x),\ \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), ... \tag{1.4}$$

με $\phi_i(x_0) = y_0$ ($\forall i$), τα γραφήματα των οποίων βρίσκονται στα τρίγωνα ADB και AEC.

3. Πέρασμα στο όριο $n \to +\infty$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία (1.4) συγκλίνει ομοιόμορφα (καθώς $n \to \infty$) σε μια συνεχής συνάρτηση $\phi(x)$, που είναι η λύση της (1.1). Είναι προφανές ότι

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)].$$

Επομένως για να αποδείξουμε ότι η (1.4) συγκλίνει ομοιόμορφα αρκεί να δείξουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά

$$\phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)] + \cdots$$

δηλαδή η

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(x), \tag{1.5}$$

με

$$\eta_0(x) = \phi_0(x), \quad \eta_i(x) = \phi_i(x) - \phi_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Προφανώς τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής είναι οι συναρτήσεις της ακολουθίας (1.4)

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \eta_i(x).$$

Θα εκτιμήσουμε τους όρους της σειράς, έχουμε

$$|\eta_{n+1}(x)| = |\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi_n(\xi)) - f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))] d\xi \Big| \leq$$

$$\leq K \Big| \int_{x_0}^{x} |\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| d\xi \Big| \leq K \int_{x_0-h}^{x_0+h} |\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| d\xi$$

$$K \max_{x_0-h \leq x_0+h} |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \, 2h = 2hK \max_{x_0-h \leq x \leq x_0+h} |\eta_n(x)|.$$

Η σταθερά K παραμένει ίδια επειδή όλες οι συναρτήσεις $\phi_n(x)$ βρίσκονται στο ίδιο χωρίο, αν το χωρίο θα άλλαζε τότε και η σταθερά K μπορεί να άλλαζε. Έστω $|\phi_0(x)| \leq L$, $|\phi_1(x)| \leq L$ και ορίζουμε

$$m = 2hK$$

και έχουμε

$$\max_{x_0-h \leq x \leq x_0+h} |\eta_{n+1}(x)| \leq m \max_{x_0-h \leq x \leq x_0+h} |\eta_n(x)|.$$

Προφανώς η απόλυτη τιμή των μελών της (1.5) δεν υπερβαίνει τα αντίστοιχα μέλη της σειράς

$$L + 2L + 2Lm + 2Lm^2 + \cdots + 2Lm^n + \cdots$$

η οποία είναι συγκλίνουσα όταν $m < 1$ και ισούται με

$$L + \frac{2L}{1-m}.$$

Ας θυμηθούμε οτι το διάστημα $[x_0 - h, x_0 + h]$ το επιλέξαμε ετσι ώστε $2hK < 1$, άρα (κριτήριο $Weierstrass$) η σειρά (1.5) ομοιόμορφα συγκλίνει και το άθροισμα αυτής της σειράς, δηλαδή η $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ η οποια διαθέτει όλες τις ιδιότητες που έχουν οι $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi$ έχει νόημα. Επειδή

$$\Big|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\phi(\xi))-f(\xi,\phi_{n-1}(\xi))]d\xi\Big| \leq K\Big|\int_{x_0}^{x}|\phi(\xi)-\phi_{n-1}(\xi)|d\xi\Big| \to 0,\ \ n\to\infty$$

μπορούμε να περάσουμε στο όριο όταν $n \to \infty$ στη σχέση (1.3) και επομένως η $\phi(x)$ ικανοποιεί την (1.1).

Αποδείξαμε την ύπαρξη της λύσης.

Β.) Μοναδικότητα. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης θα υποθέσουμε το αντίθετο. Έστω οτι υπάρχει η λύση $\phi(x)$ και καποια άλλη λύση $v(x)$. Τότε

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi$$

και

$$v(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, v(\xi))d\xi.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}|\phi(x) - v(x)| &= |\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\phi(\xi)) - f(\xi, v(\xi))]d\xi| \\ &\leq 2hK \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |\phi(x) - v(x)|\end{aligned}$$

Άρα

$$\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |\phi(x) - v(x)| \leq 2hK \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |\phi(x) - v(x)| \tag{1.6}$$

Αφού $2hK < 1$ η (1.6) μπορεί να ισχύει μόνο στην περίπτωση

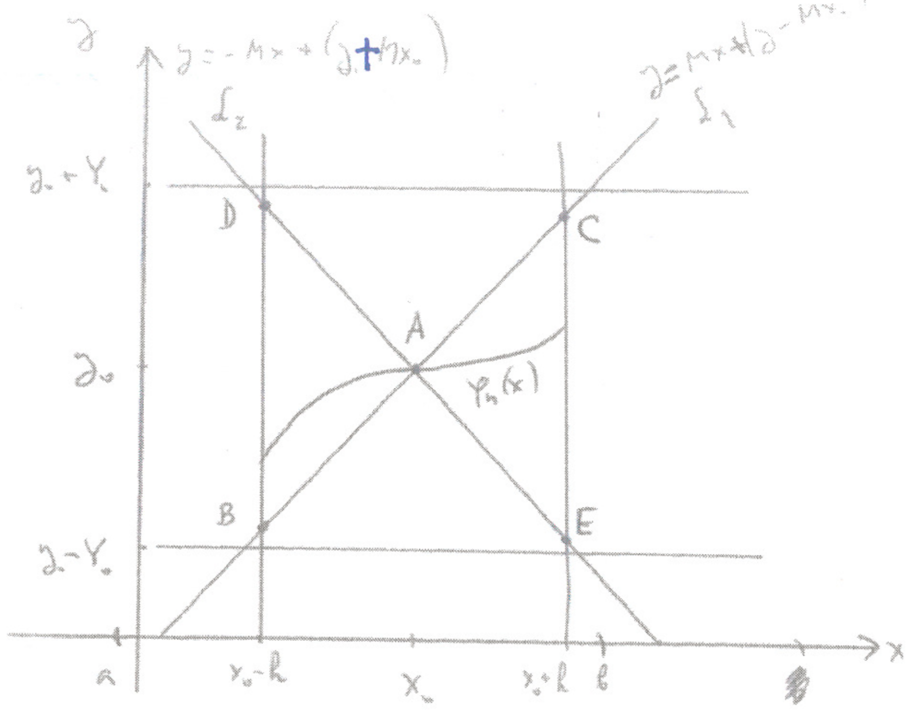
$$|\phi(x) - v(x)| \equiv 0,$$

δηλαδή όταν $\phi(x) \equiv v(x)$.

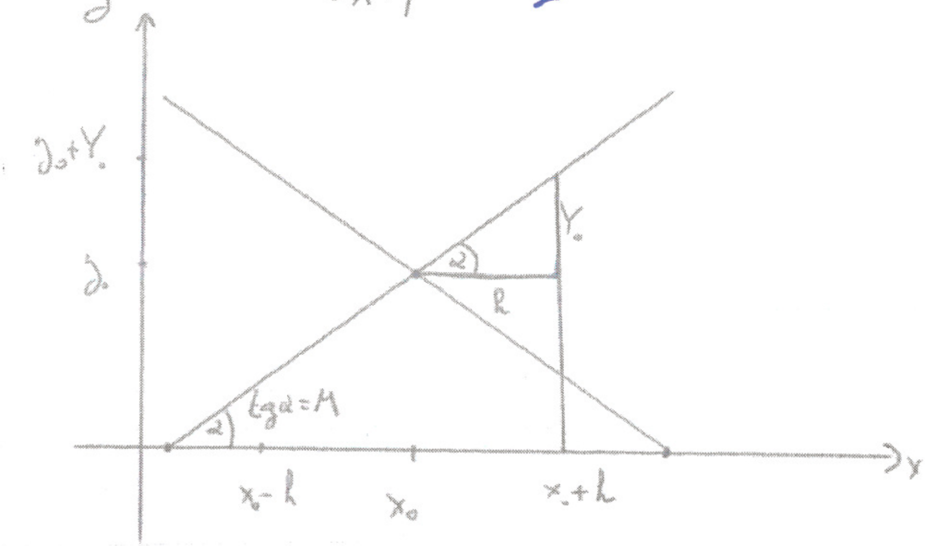
$\square$

Παρατηρούμε ότι το μήκος του διαστήματος $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (a, b)$ (όπου εξασφαλίζεται η ύπαρξη της λύσης) έχει δυο περιορισμούς, ο ένας είναι $2h < 1/K$ και ο άλλος ότι τα γραφήματα όλων των διαδοχικών προσεγγίσεων ανήκουν στα τρίγωνα ADB και AEC. Από τριγωνομετρία άμεσα προκύπτει (βλ. σχήμα 16) ότι ο δευτερος περιορισός μπορεί να γραφεί ως

$$h \leq \frac{Y_0}{M}. \tag{1.7}$$



σχήμα 1α



σχήμα 1β