2η Εβδομάδα, 1η Διάλεξη

Το θεώρημα 1.1 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας (ενδεχομένως μικρής) περιοχής γύρο από το σημείο x_0 όπου υπάρχει λύση του προβλήματος (0.1), (0.2). Τέτοια λύση ονομάζεται *τοπική λύση*. Αν η λύση υπάρχει σε όλο το διάστημα (ως προς τη μεταβλητή x) όπου μελετάμε το πρόβλημα, τότε μιλάμε για *ολική λύση* του προβλήματος (0.1), (0.2). Όπως έχουμε δει το πρόβλημα

$$y' = y, \ \ x \in \mathbf{R}, \ \ y(0) = 1$$

έχει ολική λύση $y = e^x$, επίσης και το πρόβλημα

$$y' = 1 - y^2, \ \ x \in \mathbf{R}, \ \ y(0) = 0$$

έχει ολική λύση

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Αντίθετα το πρόβλημα

$$y' = y^2, \ \ x \in \mathbf{R}, \ \ y(0) = 1$$

έχει τοπική λύση

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

διότι η λύση υπάρχει μόνο για $x < 1$, παρομοίως το πρόβλημα

$$y' = -y^3, \ \ x \in \mathbf{R}, \ \ y(0) = 2$$

έχει τοπική λύση

$$y = \frac{1}{(2x + 1/4)^{1/2}}$$

διότι η λύση υπάρχει μόνο για $x > -1/8$.

Παράδειγμα 1.1 Κατασκευάστε ένα πρόβλημα $Cauchy$ του οποίου η λύση υπάρχει μόνο σε ένα φραγμένο διάστημα.

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y' = f(x)y^2 \ \text{ ή } \ (y^{-1})' = -f(x).$$

Προφανώς

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi \ \text{ ή } \ y = \frac{y_0}{1 - y_0 \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi}.$$

Τώρα αρκεί να επιλέξουμε την $f(x)$ και τα y_0, x_0 έτσι ώστε ο παρανομαστής να είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με δύο πραγματικές ρίζες. Π.χ.

$$y' = (2x + 2)y^2, \ \ y(0) = 1/3.$$

Προφανώς η λύση δίνεται απο τον τύπο

$$y = \frac{1}{3 - 2x - x^2}$$

και υπάρχει μόνο στο διάστημα $(-3, 1)$.

Παράδειγμα 1.2. Κατασκευάστε τις διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = y, \ \ y(0) = 1,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1$.

Λύση. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι έχουμε εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές και προφανώς η λύση του προβλήματος είναι $y(x) = e^x$. Θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Από τον τύπο (1.3) έχουμε

$$\begin{gathered}
\phi_1(x) = 1 + \int_0^x d\xi = 1 + x, \\
\phi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+\xi)d\xi = 1 + x + x^2/2, \\
\phi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+\xi+\xi^2/2)d\xi = 1 + x + x^2/2 + x^3/6, \\
\cdots \\
\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to e^x \ \text{ καθώς } \ n \to \infty.
\end{gathered}$$

Παράδειγμα 1.3 Κατασκευάστε τις τρεις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = e^y, \ \ y(0) = 0,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 0$.

Λύση. Από τον τύπο (1.3) έχουμε

$$\begin{gathered}
\phi_1(x) = \int_0^x d\xi = x, \\
\phi_2(x) = \int_0^x e^{\xi} d\xi = e^x - 1, \\
\phi_3(x) = \int_0^x e^{e^{\xi}-1} d\xi = \frac{1}{e}\int_0^x e^{e^{\xi}} d\xi = \frac{1}{e}\int_1^{e^x} \frac{e^y}{y} dy.
\end{gathered}$$

⋆

Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι ένα χρήσιμο εργαλείο σε πολλά προβλήματα ανάλυσης. Γενικά μπορούμε να ξεκινήσουμε την κατασκευή των προσεγγίσεων από οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $\phi_0(x)$, αρκεί $\phi_0(x_0) = y_0$. Αφού οι συνθήκες του θεωρήματος μας εξασφαλίζουν την μοναδικότητα, πάντα θα καταλήγουμε με την διαδικασία που περιγράψαμε στην λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την (0.1).

Παράδειγμα 1.4. Κατασκευάστε τις διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = y, \ \ y(0) = 1,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1 - x^2$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{gathered}
\phi_1(x) = 1 + \int_0^x (1-\xi^2)d\xi = 1 + x - \frac{x^3}{3}, \\
\phi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+\xi-\xi^3/3)d\xi = 1 + x + x^2/2 - \frac{x^4}{12}, \\
\phi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+\xi+\xi^2/2-\xi^4/12)d\xi = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60}, \\
\cdots
\end{gathered}$$

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 2\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \to e^x \;\text{ καθώς }\; n \to \infty.$$

⋆

§2 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Cauchy, υπο βέλτιστες προϋποθέσεις

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης μπορούν να αποδειχτούν υπό πιο γενικές προϋπόθεσης. Θα διατυπώσουμε τα σχετικά θεωρήματα και θα συζητήσουμε το βέλτιστο των υποθέσεων. Τις αποδείξεις θα τις δώσουμε στο τέλος του Κεφαλαίου.

Θεώρημα 2.1 *(Peano). Έστω η $f(x,y)$ είναι φραγμένη και συνεχής σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Τότε από κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega$ περνάει τουλάχιστον μια τοπική λύση της (0.1).*

Προφανώς ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε το ισχυρισμό ως εξής: Τότε υπάρχει τουλάχιστον μια τοπική λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) όπου $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε το χωρίο Ω να είναι ένα ορθογώνιο (βλ. Θεώρημα 1.1)

Το θεώρημα $Peano$ είναι το ποιό γενικό θεώρημα ύπαρξης της λύσης. Οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι βέλτιστες με την έννοια ότι αν η $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση, τοτε, εν γένει, η λύση δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1. Το πρόβλημα

$$y'(x) = sign\, x, \;\; y(0) = y_0.$$

δεν έχει λύση.

Εδώ

$$sign\, x = \begin{cases} 1, & \text{για } \; x > 0 \\ 0, & \text{για } \; x = 0 \\ -1, & \text{για } \; x < 0 \end{cases}$$

Πράγματι, παίρνοντας περιπτώσεις $x > 0$ και $x < 0$, ευκολα διαπιστώνουμε οτι η μοναδική "υποψήφια" λύση είναι η συνάρτηση

$$y(x) = y_0 + |x|$$

η οποία όμως δεν εχει παράγωγο στο $x = 0$ (λύση ονομάζουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση).

Παράδειγμα 2.2. Το πρόβλημα

$$y'(x) = -sgn\, y, \;\; y(0) = 0$$

με

$$sgn\, y = \begin{cases} 1, & \text{για } \; y \geq 0 \\ -1, & \text{για } \; y < 0 \end{cases}.$$

δεν εχει λύση για $x > 0$.

Πράγματι, έστω οτι η λύση υπάρχει σε ένα διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Θεωρούμε τα σημεία $x > 0$. Έχουμε ότι $y(0) = 0$ και από την εξίσωση $y'(0) = -1$, άρα υπάρχει ένα διάστημα $(0, \varepsilon_1)$ ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$) όπου η $y(x)$ είναι αρνητική . Στο διάστημα αυτό έχουμε

$$-sgn\, y = 1 \;\text{ συνεπώς }\; y'(x) = 1,$$

δηλαδή $y(x) = x$ (αφου $y(0) = 0$). Όμως $x > 0$ στο $(0, \varepsilon_1)$ συνεπώς η $y(x)$ είναι θετική στο $(0, \varepsilon_1)$, άτοπο. Από εδώ καταλήγουμε στο η λύση δεν υπάρχει για κανένα $x > 0$.

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι για $x \leq 0$ η λύση υπάρχει και είναι $y(x) = -x$.

$\star$

2η Εβδομάδα, 2η Διάλεξη

Το Θεώρημα $Peano$ μας δίνει μια ικανή συνθήκη ύπαρξης λύσης, το ότι δεν είναι αναγκαία το βλέπουμε απο το ακόλουθο παράδειγμα όπου η λύση του προβλήματος $Cauchy$ υπάρχει ενώ οι υποθέσεις του θεωρήματος $Peano$ παραβιάζονται.

Παράδειγμα 2.3. α.) Η συνάρτηση $y(x) \equiv 0$, είναι λύση του προβλήματος

$$y'(x) = sign\, y, \quad y(0) = 0.$$

όπου

$$sign\, y = \begin{cases} 1, & \text{για } \ y > 0 \\ 0, & \text{για } \ y = 0 \\ -1, & \text{για } \ y < 0 \end{cases}.$$

β.) Η συνάρτηση

$$y(x) = \left(1 - e^{-x}\right)^{1/3}$$

είναι λύση του προβλήματος

$$y' = \frac{1 - y}{3y^2}, \quad y(0) = 0.$$

$\star$

Τώρα σχετικά με την μοναδικότητα. Η συνέχεια της $f(x, y)$ δεν μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών. Έχουμε αποδείξει τη μοναδικότητα στην περίπτωση που η $f(x, y)$ επιπλέον επαληθεύει τη συνθήκη $Lipschitz$ ως προς τη μεταβλητή y. Ισχύει πιο γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.2 *($Osgood$). Έστω η $f(x, y)$ για οποιαδήποτε σημεία (x, y_1) και (x, y_2) στο Ω ικανοποιεί την συνθήκη*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \phi(|y_2 - y_1|) \tag{2.1}$$

όπου $\phi(u) > 0$ όταν $0 < u \leq 1$. Εδώ η $\phi(u)$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\int_\varepsilon^1 \frac{du}{\phi(u)} \to \infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

Τότε μέσω οποιουδήποτε σημείου (x_0, y_0) από το Ω περνάει το πολύ μια λύση της εξίσωσης (0.1).

Π.χ. ως $\phi(u)$ μπορούμε να πάρουμε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$Ku, \quad Ku|\ln u|, \quad Ku|\ln u|\ln(|\ln u|), \ldots$$

όπου K είναι σταθερά. Όταν $\phi(u) \equiv Ku$ τότε η (2.1) παίρνει την μορφή

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$$

που είναι η συνθήκη $Lipschitz$ ως προς τη μεταβλητή y.

Το θεώρημα $Osgood$ μας δίνει μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη. Το θεώρημα $Osgood$ δεν είναι το ποιό γενικό θεώρημα, υπάρχουν και άλλα τα οποία μας δίνουν άλλες ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα. Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου η μοναδικότητα παραβιάζεται.

Παράδειγμα 2.4. Δείξτε ότι $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0 \tag{2.2}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Λύση. Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι η $f(y) = \sqrt{y}$ δεν επαληθεύει τις συνθήκες του θεωρήματος $Osgood$. Αντικαθιστώντας την γενική λύση της εξίσωσης, η οποία για $x + C \geq 0$ δυνεται από τον τύπο

$$y(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2, \;\; C - \text{αυθαίρετη σταθερά},$$

στην αρχική συνθήκη παίρνουμε ότι η

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - x_0)^2, & \text{για } \; x \geq x_0 \\ 0, & \text{για } \; x_0 < 0 \end{cases}$$

είναι λύση του προβλήματος (2.2). Όμως ταυτόχρονα και η $y(x) \equiv 0$ είναι λύση του προβλήματος (2.2). Η μοναδικότητα παραβιάζεται. Προφανώς και η συνάρτηση

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - C_0)^2, & \text{για } \; x \geq C_0 \\ 0, & \text{για } \; x < C_0 \end{cases}$$

για κάθε σταθερά $C_0 > x_0$ είναι λύση του προβλήματος (2.2), αρα το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις. $\star$

Παράδειγμα 2.5. α.) Πότε το πρόβλημα

$$y' + p(x)y = g(x)y^\nu, \;\; y(x_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση;

β.) Βρείτε δυο λύσεις του προβλήματος

$$y' + 2y = 2y^{1/2}, \;\; y(0) = 0.$$

Λύση. α.) Το δεύτερο μέρος είναι

$$f(x, y) = g(x)y^\nu - p(x)y.$$

Αν $\nu \geq 1$, τότε η $f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς y και συνεπώς έχουμε μοναδικότητα. Αν το $\nu < 1$, τότε η $f(x, y)$ δεν είναι παραγωγίσιμη ως προς y (στο $y = 0$) ούτε επαληθεύει τις προϋποθέσεις του θεωρήματος $Osgood$, συνεπώς η μοναδικότητα μπορεί να παραβιαστεί.

β.) Προφανώς $y \equiv 0$ είναι λύση. Παρατηρούμε ότι εξίσωση είναι $Bernoulli$, άρα με αντικατάσταση $z = \sqrt{y}$ το πρόβλημα ανάγεται στο

$$z' + z = 1, \;\; z(0) = 0$$

η λύση του οποίου είναι $z(x) = 1 - e^{-x}$ συνεπώς έχουμε λύσεις

$$y(x) = (1 - e^{-x})^2 \;\; \text{και} \;\; y(x) = 0.$$

$\star$

Τέλος, θα κάνουμε μια παρατήρηση σχετικά με την γενίκευση της έννοιας της λύσης. Αν θα ονομάσουμε (*γενικευμένη*) *λύση* του προβλήματος

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0$$

την λύση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi,$$

τότε η λύση δεν είναι απαραίτητο να είναι παραγωγίσιμη (ούτε καν συνεχής) συνάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση στο Παράδειγμα 2.1 ευκολα διαπιστώνουμε οτι η

$$y(x) = y_0 + |x|$$

είναι (*γενικευμένη*) *λύση* του προβλήματος

$$y'(x) = sign\, x, \quad y(0) = y_0$$

αφού

$$\int_{x_0}^{x} sign\, \xi d\xi = |x|.$$

Προφανώς αυτό δεν ¨βοηθάει¨ στο Παράδειγμα 2.2 όπου η λύση δεν υπάρχει με οποιαδήποτε εννόια.

§3 **Συνεχής εξάρτηση απο τα δεδομένα**

Μέχρι στιγμής μελετούσαμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$. Είναι προφανές ότι αν μεταβάλλουμε τα σημεία x_0, y_0 θα μεταβληθεί και η λύση του προβλήματος. Εμφανίζεται μια σημαντική ερώτηση: πως θα μεταβάλλεται η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών καθώς μεταβάλλεται το σημείο (x_0, y_0); Αυτή η ερώτηση είναι μεγάλης σημασίας, ιδιαίτερα στις εφαρμογές. Έστω μελετάμε ένα πρόβλημα Φυσικής που ανάγεται στη μελέτη ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται πειραματικά, και επομένως δεν μπορούν να βρεθούν με απόλυτη ακρίβεια. Συνεπώς στις εφαρμογές μια λύση που παίρνει την τιμή y_0 στο σημείο x_0 δεν θα παρουσίαζε κανένα ενδιαφέρον στην περίπτωση που τα σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών τιμών θα μας οδηγούσαν σε μια λύση τελείως διαφορετική από αυτήν που ψάχνουμε. Το ίδιο ισχύει και για το δευτερο μέρος της εξίσωσης. Δηλαδή το πραγματικό φαινόμενο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση μόνο κατά προσέγγιση. Το συμπέρασμα είναι: για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις διαφορικές εξισώσεις στις εφαρμογές οι λύσεις των δυο διαφορετικών προβλημάτων αρχικών τιμών πρέπει να διαφέρουν ελάχιστα, αν ελάχιστα διαφέρουν οι αρχικές συνθήκες και τα δεύτερα μέρη των εξισώσεων. Αυτή η ιδιότητα της λύσης ονομάζεται *συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα.*

Ορισμός. *Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του $Lipschitz$ ως προς y σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ αν από την $y_2 > y_1$ προκύπτει*

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \le K(y_2 - y_1) \;\; \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \tag{3.3}$$

(π.χ. οποιαδήποτε μη αύξουσα συνάρτηση του y). Προφανώς κάθε $Lipschitz$ συνεχής συνάρτηση ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του $Lipschitz$