3-η Εβδομάδα. Διάλεξη 1, 2.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συνάρτηση* $f(x, y)$ *ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του* $Lipschitz$ *ως προς* y *σε ένα χωρίο* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *αν από την* $y_2 > y_1$ *προκύπτει*

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \le K(y_2 - y_1) \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \tag{3.3}$$

(π.χ. οποιαδήποτε μη αύξουσα συνάρτηση του y). Προφανώς κάθε $Lipschitz$ συνεχής συνάρτηση ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του $Lipschitz$

Λήμμα 3.1 *Από την (3.3) προκύπτει ότι*

$$[y_2 - y_1][y_2' - y_1'] \le K(y_2 - y_1)^2$$

για οποιεσδήποτε $y_1(x)$, $y_2(x)$ *που είναι λύσεις της (0.1).*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (0.1) έχουμε ότι

$$[y_2(x) - y_1(x)][y_2'(x) - y_1'(x)] = [y_2(x) - y_1(x)][f(x, y_2) - f(x, y_1)]. \tag{3.4}$$

Αν $y_2 > y_1$ (για κάποια x), τότε από την (3.3) αμέσως προκύπτει ότι το δεξί μέρος της (3.4) έχει ως άνω φράγμα το $K(y_2 - y_1)^2$. Αφού και το δεξί και το αριστερό μέρος της (3.4) μένει αμετάβλητο ως προς την εναλλαγή των ρόλων των y_1 και y_2, η ανισότητα του λήμματος ισχύει και στην περίπτωση $y_1 > y_2$.
$\square$

Λήμμα 3.2. *Έστω ότι η* $\sigma(x)$ *ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα*

$$\sigma'(x) \le K\sigma(x), \quad x \in [a, b], \tag{3.5}$$

όπου K *είναι θετική σταθερά. Τότε*

$$\sigma(x) \le \sigma(a)e^{K(x-a)}, \quad x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την (3.5) με e^{-Kx} και μεταφέρουμε το δεξί μέλος στην αριστερή πλευρά

$$[\sigma'(x) - K\sigma(x)]e^{-Kx} \le 0. \tag{3.6}$$

Το αριστερό μέρος της (3.6) είναι η παράγωγος της σe^{-Kx}. Δηλαδή

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)e^{-Kx}] \le 0.$$

Επομένως η $\sigma(x)e^{-Kx}$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, άρα

$$\sigma(x)e^{-Kx} \le \sigma(a)e^{-Ka} \quad \Rightarrow \quad \sigma(x) \le \sigma(a)e^{K(x-a)}.$$

$\square$

Ας αποδείξουμε πιο γενική μορφη του λήμματος 3.2.

Λήμμα 3.3 ($Gronwall$**)** (απλή μορφή). *Έστω ότι η* $\sigma(x)$ *ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα*

$$\sigma'(x) \le A(x)\sigma(x), \quad x \in [a, b],$$

όπου $A(x)$ *είναι συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο* $[a, b]$. *Τότε*

$$\sigma(x) \le \sigma(a)e^{\int_a^x A(\xi)d\xi}, \quad x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\big(\sigma'(x) - A(x)\sigma(x)\big)e^{-\int_a^x A(\xi)d\xi} \leq 0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dx}\Big(\sigma(x)e^{-\int_a^x A(\xi)d\xi}\Big) \leq 0.$$

Άρα η συνάρτηση $\sigma(x)e^{-\int_a^x A(\xi)d\xi}$ είναι μη αυξουσα, συνεπώς για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει

$$\sigma(x)e^{-\int_a^x A(\xi)d\xi} \leq \sigma(a)$$

απ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

□

Χρησιμοποιώντας τα λήμματα 3.1 και 3.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι λύσεις της (0.1) εξαρτώνται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες με την προϋπόθεση ότι η $f(x,y)$ ικανοποιεί την (3.3).

Θεώρημα 3.1. (συνεχούς εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες) *Έστω ότι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (0.1) σε ενα χωρίο Ω, όπου $f(x,y)$ ικανοποιεί την (3.3). Τότε*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{K(x-a)}|y_1(a) - y_2(a)| \ \text{ για } \ x \geq a.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $\sigma(x) = [y_1(x) - y_2(x)]^2$. Υπολογίζοντας την παράγωγο της $\sigma(x)$ παίρνουμε

$$\sigma'(x) = 2[y_1(x) - y_2(x)][y_1'(x) - y_2'(x)].$$

Από το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι

$$\sigma'(x) \leq 2K\sigma(x).$$

Και επομένως από το Λήμμα 3.2 θα πάρουμε

$$\sigma(x) \leq e^{2K(x-a)}\sigma(a). \tag{3.7}$$

Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα και από τις δυο πλευρές της (3.7) παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 3.1. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτελέσμα για $x < a$ θα υποθέσουμε ότι η f ικανοποιεί την πλήρη συνθήκη του $Lipschitz$, δηλαδή

$$|f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))| \leq K|y_2 - y_1|. \tag{3.8}$$

Θα δείξουμε ότι από την (3.8) προκύπτει η

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{K|x-a|}|y_1(a) - y_2(a)|. \tag{3.9}$$

Πράγματι, αφού ισχύει η (3.8) ισχύει και η (3.3) άρα έχουμε την (3.9) για $x \geq a$. Από την (3.8) έχουμε

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) \geq -K|y_1 - y_2|$$

και

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \geq -K|y_2 - y_1|$$

Αρα έχουμε αν $y_1 \geq y_2$, τότε

$$\sigma'(x) = 2[y_1(x)-y_2(x)][y_1'(x)-y_2'(x)] = 2[y_1(x)-y_2(x)][f(x,y_1)-f(x,y_2)] \geq$$
$$-2K[y_1 - y_2]|y_1 - y_2| \geq -2K(y_1 - y_2)^2 = -2K\sigma,$$

και αν $y_2 \geq y_1$, τότε

$$\sigma'(x) = 2[y_2(x)-y_1(x)][y_2'(x)-y_1'(x)] = 2[y_2(x)-y_1(x)][f(x,y_2)-f(x,y_1)] \geq$$
$$-2K[y_2-y_1]|y_2-y_1| \geq -2K(y_2-y_1)^2 = -2K\sigma.$$

Δηλαδή πάντα ισχύει

$$\sigma'(x) \geq -2K\sigma.$$

Παρομοίως με το Λήμμα 3.2 θα πάρουμε

$$(\sigma'(x) + 2K\sigma)e^{2Kx} \geq 0$$

και

$$\frac{d}{dx}(\sigma e^{2Kx}) \geq 0$$

σε κάποιο διάστημα $[c,a]$ και επομένως $\sigma(x) \leq \sigma(a)e^{2K(a-x)}$. Από όπου αμέσως προκύπτει η (3.9).

Θεώρημα 3.2. *(συνεχούς εξάρτησης από τα δεδομένα). Έστω οι $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι ορισμένες και συνεχείς σε κάποιο Ω και έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις των εξισώσεων*

$$y_1'(x) = f(x,y_1), \quad y_2'(x) = g(x,y_2), \quad x \in [a,b]$$

αντιστοίχως. Έστω $f(x,y)$ είναι $Lipschitz$ συνεχής ως προς y συνάρτηση και

$$|f(x,y) - g(x,y)| \leq \varepsilon, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{3.10}$$

Τότε

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)|e^{K|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{K}[e^{K|x-x_0|} - 1], \tag{3.11}$$

σε ένα διάστημα $[a,b]$, όπου $x_0 \in [a,b]$.

Απόδειξη. Για την παράγωγο της $\sigma(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2$ έχουμε

$$\sigma'(x) = 2[y_1(x) - y_2(x)][y_1'(x) - y_2'(x)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - g(x,y_2)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - f(x,y_2) + f(x,y_2) - g(x,y_2)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - f(x,y_2)] + 2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_2) - g(x,y_2)]$$

Θα εκτιμήσουμε την απόλυτη τιμή της $\sigma'(x)$ χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, το γεγονός ότι η f είναι $Lipschitz$ συνάρτηση και την (3.10)

$$|\sigma'(x)| \leq$$
$$2|y_1(x) - y_2(x)||f(x,y_1) - f(x,y_2)| + 2|y_1(x) - y_2(x)||f(x,y_2) - g(x,y_2)| \leq$$
$$\leq 2K|y_1 - y_2|^2 + 2\varepsilon|y_1 - y_2|.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$\sigma'(x) \leq 2K\sigma(x) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(x)}. \tag{3.12}$$

Χωρίς απόδειξη ισχυριζόμαστε ότι αν η $\sigma(x)$ ικανοποιεί την (3.12) τότε

$$\sigma(x) \leq [\sqrt{\sigma(x_0)}e^{K|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|x-x_0|} - 1)]^2 \tag{3.13}$$

Βλέπουμε ότι η (3.11) αμέσως προκύπτει από την (3.13). Η αυστηρή απόδειξη του ισχυριζμού ότι (3.12) συνεπάγεται (3.13) θα δώσουμε στην περίπτωση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης στην § **2**.

□

Παρατήτηση 3.2. Στις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3 η $Lipschitz$ συνέχεια της f μπορεί να αντικατασταθεί με την $Lipschitz$ συνέχεια της g. Σε αυτη την περίπτωση η μόνη αλλαγή στην απόδειξη θα είναι η προσθαφαίρεση της $g(x, y_1)$ (αντι της προσθαφαίρεσης της $f(x, y_2)$).

Ορισμός. *Λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι καλώς τεθειμένο αν η λύση υπάρχει είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.*

Π.χ. το πρόβλημα $Cauchy$ (0.1), (0.2) υπο τις προϋπόθεσης του Θεωρήματος 1.1 είναι καλώς τεθειμένο (τοπικά).

§4 **Θεώρημα σύγκρισης,** a priori **εκτιμήσεις**

Αφού οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων γενικά δεν μπορούν να παρασταθούν μέσω των στοιχειωδών συναρτήσεων (δηλαδή δεν μπορούν να γραφούν σε κλειστή μορφή), είναι σημαντικό να μπορεί κανείς να συγκρίνει λύσεις διαφορικών εξισώσεων με διαφορετικά δεύτερα μέρη. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να συγκρίνουμε τη λύση μίας διαφορικής εξίσωσης την οποία δεν μπορούμε να τη βρούμε σε κλειστή μορφή με τη λύση μιας άλλης εξίσωσης την οποία μπορούμε να την βρούμε σε κλειστή μορφή.

Λήμμα 4.1. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και ικανοποιεί τη συνθήκη του $Lipschitz$ ως προς y στο Ω. Έστω η $y_1(x)$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί στο Ω την διαφορική ανισότητα

$$y_1'(x) \le f(x, y_1).$$

Υποθέτουμε ότι η $y_2(x)$ είναι λύση της

$$y_2'(x) = f(x, y_2).$$

Αν $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ όπου $(x_0, y_1(x_0)) \in \Omega$, τότε

$$y_1(x) \le y_2(x) \ \text{ για } \ x \ge x_0 \ \text{ και } \ y_1(x) \ge y_2(x) \ \text{ για } \ x \le x_0.$$

(Οι τελευταίες ανισότητες λαμβάνουν χώρα εκεί που οι y_1 και y_2 υπάρχουν.)

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε οτι $y_1(x) \le y_2(x)$ για $x \ge x_0$.

Έστω οτι υπάρχει τέτοιο $x_1 > x_0$ ώστε $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. Λόγω συνέχειας θα υπάρχει ένα $x^* \in [x_0, x_1)$ τέτοιο ώστε για $\sigma(x) \equiv y_1(x) - y_2(x)$ θα ισχύει

$$\sigma(x) \ge 0 \ \text{ για } \ x \in [x^*, x_1] \ \text{ και } \ \sigma(x^*) = 0.$$

Επίσης στο $[x^*, x_1]$ έχουμε

$$\sigma'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) \le f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \le K(y_1 - y_2) = K\sigma.$$

Από το Λήμμα 3.2 παίρνουμε

$$\sigma(x) \le \sigma(x^*)e^{K(x-x^*)} = 0,$$

αφού $\sigma(x^*) = 0$. Επειδή $\sigma(x) \ge 0$ στο $[x^*, x_1]$ αμέσως έχουμε $\sigma(x) \equiv 0$ στο $[x^*, x_1]$ και ως συνέπεια $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$. Αυτό αντιφάσκει με την προϋπόθεση $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. Επομένως $y_1(x) \le y_2(x)$ για οποιοδήποτε $x \ge x_0$ στο Ω.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $y_1(x) \ge y_2(x)$ για $x \le x_0$.

□

Θεώρημα 4.1. *(σύγκρισης). Έστω $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι Lipschitz συνεχείς ως προς y και συνεχείς ως προς x συναρτήσεις ορισμένες στο Ω τ.ω. $g(x,y) \leq f(x,y)$. Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις των εξισώσεων*

$$y_1'(x) = g(x, y_1), \quad y_2'(x) = f(x, y_2)$$

αντίστοιχα. Αν $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ όπου $(x_0, y_1(x_0)) \in \Omega$, τότε

$$y_1(x) \leq y_2(x) \ \text{ για } \ x \geq x_0 \ \text{ και } \ y_1(x) \geq y_2(x) \ \text{ για } \ x \leq x_0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $x \geq x_0$. Αφού

$$y_1'(x) = g(x, y_1) \leq f(x, y_1) \ \text{ και } \ y_2'(x) = f(x, y_2)$$

από το Λήμμα 4.1 αμέσως προκύπτει οτι $y_1(x) \leq y_2(x)$ για $x \geq x_0$.
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $y_1(x) \geq y_2(x)$ για $x \leq x_0$.
□

Παρατήρηση 4.1. Στην περίπτωση όταν μόνο η g είναι *Lipschitz* συνεχής θεωρούμε τις

$$u_1 = -y_1 \ \text{ και } \ u_2 = -y_2.$$

Τότε

$$u_1'(x) = -g(x, -u_1), \quad u_2'(x) = -f(x, -u_2).$$

Αφού $g(x, -u_2) \leq f(x, -u_2)$ τότε $-g(x, -u_2) \geq -f(x, -u_2)$ και

$$u_2'(x) = -f(x, -u_2) \leq -g(x, -u_2).$$

Για τις u_1, u_2 από το Λήμμα 4.1 απορρέει ότι $u_1(x) \geq u_2(x)$ στο $[x_0, b]$ και επομένως $y_1(x) \leq y_2(x)$. Με τον ίδιο τρόπο εξετάζεται το διάστημα $[a, x_0]$.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικά πορίσματα από το θεώρημα σύγκρισης.

Πόρισμα 1. Έστω οτι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκρισης. Τότε για οποιοδήποτε σημείο $x_1 > x_0$ ισχύει ότι

$$\text{ή } \ y_1(x_1) < y_2(x_1) \ \text{ ή } \ y_1(x) \equiv y_2(x) \ \text{ στο } \ [x_0, x_1].$$

(Προφανώς υποθέτουμε οτι οι y_1 και y_2 υπάρχουν σε ενα διάστημα I έτσι ώστε $[x_0, x_1] \subset I$.)

Απόδειξη. Έστω ότι $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ για κάποιο $x_1 > x_0$ και $y_1(x) \not\equiv y_2(x)$ στο $[x_0, x_1]$. Τότε υπάρχει ένα σημείο $x^* \in (x_0, x_1)$ τέτοιο ώστε $y_1(x^*) < y_2(x^*)$. Εισάγουμε την

$$\sigma(x) = y_2(x) - y_1(x).$$

Η $\sigma(x) \geq 0$ στο $[x^*, x_1]$ από το θεώρημα σύγκρισης και

$$\sigma' = y_2' - y_1' = f(x, y_2) - g(x, y_1) \geq g(x, y_2) - g(x, y_1) \geq -K\sigma.$$

Αρα

$$\frac{d}{dx}\big(\sigma\, e^{Kx}\big) \geq 0 \ \text{ στο } \ [x^*, x_1]$$

επομένως η $\sigma(x)e^{Kx}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση στο $[x^*, x_1]$ και

$$\sigma(x) \geq \sigma(x^*)e^{K(x^*-x)} > 0,$$

αφού $\sigma(x^*) > 0$. Συνεπώς $\sigma(x_1) > 0$, όπου αυτή η ανισότητα αντιφάσκει με την προϋπόθεση $y_1(x_1) = y_2(x_1)$.

Από εδώ αμέσως προκύπτει ότι αν για κάποιο x_1 έχουμε $y_2(x_1) > y_1(x_1)$ τότε $y_2(x) > y_1(x)$ για κάθε $x \geq x_1$. Εάν όμως $y_2(x_1) = y_1(x_1)$, τότε $y_2(x) \equiv y_1(x)$ στο $[x_0, x_1]$.

$\square$

Τα επόμενα δυο πορίσματα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Πόρισμα 2. Έστω ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκρισης. Τότε για οποιοδήποτε σημείο $x_1 < x_0$ ισχύει ότι ή $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ ή $y_1(x) \equiv y_2(x)$ στο $[x_1, x_0]$.

Πόρισμα 3. Αν στο Θεώρημα 4.1 θα αντικαταστήσουμε την συνθήκη $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ με την ανισότητα $y_1(x_0) < y_2(x_0)$, τότε

$$y_1(x) < y_2(x) \ \text{ για } \ x > x_0.$$

Παράδειγμα 4.1. Έστω ότι η $y(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y' = -y^2 - |sin\, y^{1/3}|, \ \ y(0) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σύγκρισης αποδείξτε ότι

α) για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $y(x) \leq 1$,

β) υπάρχει $x^* \in [-1, 0)$ τ.ω.

$$\lim_{x \to x^* + 0} y(x) = +\infty.$$

Λύση. α) Έστω $y_2(x)$ λύση του προβλήματος

$$y_2' = 0, \ \ y_2(0) = 1.$$

Προφανώς $y_2 \equiv 1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα σύγκρισης (αφού ισχύει οτι $-y^2 - |sin\, y^{1/3}| \leq 0$) για $x \geq 0$ έχουμε

$$y(x) \leq y_2(x) \equiv 1.$$

β) Έστω $y_1(x)$ λύση του προβλήματος

$$y_1' = -y_1^2, \ \ y_1(0) = 1.$$

Προφανώς

$$y_1 = \frac{1}{1+x}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα σύγκρισης (αφού $-y^2 - |sin\, y^{1/3}| \leq -y^2$) για $x \leq 0$ έχουμε

$$y(x) \geq y_1(x) = \frac{1}{1+x}$$

και

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{1+x} = +\infty$$

απ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 4.2. Έστω ότι η $y_1(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y_1' = e^{y_1} + e^x \sin y_1, \ \ y_1(0) = 1$$

και η $y_2(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y_2' = \frac{1}{2} y_2^2 + e^x \sin y_2, \ \ y_2(0) = 1$$

αντίστοιχα. Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ στο $(0, a)$ (προφανώς υποθέτουμε οτι οι λύσεις υπαρχουν στο $(0, a)$).

Λύση. Αφου
$$e^y + e^x \sin y \geq \frac{1}{2}y^2 + e^x \sin y,$$
απο το Θεωρημα σύγκρισης έχουμε ότι
$$z(x) = y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \;\text{ για }\; x \geq 0.$$

Παράδειγμα 4.3. Έστω ότι οι $k(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε
$$k(x) > 0, \;\; 1 \leq g(x) \leq 10.$$
Αποδείξτε ότι αν το πρόβλημα
$$y'(x) = g(x) - k(x)y^2(x), \;\; y(0) = 0 \tag{4.1}$$
έχει λύση σε ένα διάστημα $(-l, l)$, τότε
$$0 < y(x) \leq 10x, \;\; \forall x > 0,$$
$$10x \leq y(x) < 0, \;\; \forall x < 0.$$

Λύση. Θα δείξουμε πρώτα ότι αν η λύση υπάρχει τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει
$$0 < y(x) \leq 10x.$$
Πράγματι, αφού $y(0) = 0$ άρα $y'(0) = g(0) > 0$ και υπάρχει $x_0 > 0$ τ.ω. $y(x) > 0$ στο $(0, x_0)$. Έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $x^* \geq x_0 > 0$ τ.ω. $y(x) > 0$ στο $(0, x^*)$ και $y(x^*) = 0$, τότε σε αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι μη αύξουσα άρα $y'(x^*) \leq 0$, από την άλλη
$$y'(x^*) = g(x^*) - k(x^*)\, y^2(x^*) = g(x^*) > 0,$$
άτοπο, συνεπώς
$$y(x) > 0 \;\; \forall x > 0.$$
Θεωρούμε την συνάρτηση $z(x) = 10x$, προφανώς
$$z'(x) = 10, \;\; z(0) = 0.$$
Αφού $10 \geq g(x) - k(x)\, y^2$, από το θεώρημα σύγκρισης έχουμε οτι
$$y(x) \leq z(x) = 10x.$$
Συνεπώς η λύση (αν υπάρχει) ικανοποιεί την ανισότητα
$$0 < y(x) \leq 10x, \;\; \forall x > 0.$$

Θα θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση $x < 0$.

Αφού $y(0) = 0$ άρα $y'(0) = g(x) > 0$ και υπάρχει $x_1 < 0$ τ.ω. $y(x) < 0$ στο $(x_1, 0)$. Έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $x_* \leq x_1 < 0$ τ.ω. $y(x) < 0$ στο $(x_*, 0)$ και $y(x_*) = 0$, τότε σε αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι μη αύξουσα άρα $y'(x_*) \leq 0$ από την άλλη
$$y'(x_*) = g(x_*) - k(x_*)y^2(x_*) = g(x_*) > 0,$$
άτοπο, συνεπώς $y(x) < 0 \; \forall x < 0$.

Από το θεώρημα σύγκρισης έχουμε $y(x) \geq 10x$. Συνεπώς η λύση (αν υπάρχει) ικανοποιεί την ανισότητα
$$10x \leq y(x) < 0, \;\; \forall x < 0.$$

⋆

Οπως είχαμε διαπιστώσει (βλ. Εισαγωγή) για σταθερές g και k το πρόβλημα (4.1) έχει ολική λύση και μάλιστα σε κλειστή μορφή

$$y(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} \frac{e^{2\sqrt{gk}x} - 1}{e^{2\sqrt{gk}x} + 1}. \tag{4.2}$$

Ορισμός. *Εκτιμήσεις της λύσης υπο την προϋπόθεση ύπαρξής της ονομάζονται $a\,priori$ εκτιμήσεις ή εκτιμήσεις εκ των προτέρων.*

Τέτοιες εκτιμήσεις, όπως θα το διαπιστώσουμε στην επόμενη παράγραφο, παίζουν καθοριστικό ρόλο να αποδείξουμε την ολική επιλυσιμότητα του προβλήματος $Cauchy$.