Ασκήσεις 1.

1.1. Κατασκευάστε τις δύο πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = cos\, y + y, \ \ y(0) = 0,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 0$.

1.2. Κατασκευάστε τις δύο πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = y^2, \ \ y(0) = 1,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1$.

1.3. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$

$$y' = f(x, y), \ \ y(0) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f(x, y)$ έτσι ώστε η λύση να υπάρχει μόνο στο διάστημα $(-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ για $\varepsilon > 0$.

1.4. Κατασκευάστε τις δύο πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y' = 1 - y^2, \ \ y(0) = 0,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 0$.

1.5. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ανάγετε το πρόβλημα (0.1), (0.2) στο ακόλουθο

$$\frac{dy}{d\xi} = \tilde{f}(\xi, y), \ y(0) = y_0.$$

και έπειτα με κατάλληλη αλλαγή της προσδιοριστέας συνάρτησης στο

$$\frac{dz}{d\xi} = F(\xi, z), \ z(0) = 0.$$

2.1. Αποδείξτε οτι το πρόβλημα

$$y' = -sign\, y + \frac{1}{2}, \ \ y(0) = 0$$

δεν εχει λύση για $x > 0$.

2.2. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα $Cauchy$

$$y' = 1 + y^{2/3}, \ \ y(0) = 0.$$

Διαπιστώστε ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος $Osgood$ δεν πληρούνται, όμως η λύση είναι μοναδική. Προσδιορίστε τη λύση αυτή.

2.3. Αποδείξτε οτι το πρόβλημα

$$y' = sign\, y + x, \ \ y(1) = 3/2$$

στο $[0, +\infty)$ έχει λύση.

Υπόδειξη: κατασκευάστε διαδοχικές προσεγγίσεις.

2.4. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

έχει άπειρες λύσεις.

2.5. Μελετήστε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

2.6. Μελετήστε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}, \quad y(x_0) = 0.$$

2.7. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα (βλ. Παράδειγμα 2.2)

$$\frac{dy}{dx} = -sgn\, y, \quad y(0) = 0.$$

α.) Διαπιστώστε ότι η διαδοχικές προσεγγίσεις (με $\phi_0(x) \equiv 0$) είναι

$$\phi_n(x) = \begin{cases} -x, & \text{για } n = 1, 3, 5, 7, \ldots \\ |x|, & \text{για } n = 2, 4, 6, 8, \ldots \end{cases}$$

β.) Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό:
θεωρούμε την υπακολουθία

$$\phi_k(x), \quad k = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

προφανώς

$$\lim_{k \to \infty} \phi_k(x) = \lim_{k \to \infty} (-x) = -x = \phi(x).$$

Περνάμε στο όριο στην σχέση (1.3) και καταλύγουμε στο οτι η συνάρτηση

$$\phi(x) = -x$$

είναι η λύση του προβλήματός μας σε όλο τον $\mathbf{R}$.