Φυλλάδιο 2.

3.1. Αποδείξτε την ανισότητα $Gronwall$:

Αν η $\sigma(x)$ ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$\sigma'(x) \leq A(x)\sigma(x) + h(x), \quad x \in [a,b],$$

όπου $A(x) \geq 0$ και $h(x) \geq 0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[a,b]$. Τότε

$$\sigma(x) \leq e^{\int_a^x A(\xi)d\xi}\Big(\sigma(a) + \int_a^x e^{-\int_a^\xi A(s)ds} h(\xi)d\xi\Big), \quad x \in [a,b].$$

4.1. Έστω $x(t)$ και $y(t)$ έναι λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = sin^2 x, \qquad \frac{dy}{dt} = e^y + 1$$

στο διάστημα $(a,0)$ αντιστοίχως. Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης $z(t) = x(t) - y(t)$ στο $(a,0)$ αν $x(0) = y(0)$.

4.2. Έστω $y(x)$ λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$y' = e^y + sin^2 y + 1, \;\; y(0) = 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to x^*} y(x) = +\infty$$

για κάποιο $x^* \in (0,1)$.

4.3. Έστω $y(x)$ - λύση του προβλήματος

$$y' = y^2\,(sin\,x + cos\,y + 3), \;\; y(0) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σύγκρισης αποδείξτε ότι $\exists$ ένα $x^* \in (0, 1/3)$ τ.ω.

$$\lim_{x \to x^*} y(x) = +\infty.$$

4.4. Θεωρούμε το πρόβλημα (4.1) με

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1, \;\; 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1,$$

όπου $g_i,\, k_i, i = 0,1$ σταθερές.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το πρόβλημα (4.1) με σταθερές συναρτήσεις $g(x)$, $k(x)$ έχει λύση σε κλειστή μορφή (βλ. (4.2)) αποδείξτε την εκτίμηση

$$\frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{k_1}}\frac{e^{2\sqrt{g_0k_1}x} - 1}{e^{2\sqrt{g_0k_1}x} + 1} \leq y(x) \leq \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}\frac{e^{2\sqrt{g_1k_0}x} - 1}{e^{2\sqrt{g_1k_0}x} + 1} \;\; \text{για} \;\; x \geq 0,$$

$$\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}\frac{e^{2\sqrt{g_1k_0}x} - 1}{e^{2\sqrt{g_1k_0}x} + 1} \leq y(x) \leq \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{k_1}}\frac{e^{2\sqrt{g_0k_1}x} - 1}{e^{2\sqrt{g_0k_1}x} + 1} \;\; \text{για} \;\; x \leq 0.$$

4.5. Αποδείξτε ότι αν στο Θεώρημα σύγκρισης θα πάρουμε γνήσια ανισότητα $g(x,y) < f(x,y)$, τότε

$$y_1(x) < y_2(x) \;\; \text{για} \;\; x > x_0 \;\; \text{και} \;\; y_1(x) > y_2(x) \;\; \text{για} \;\; x < x_0.$$