

Πρόδος Απειροστικός Λογισμός 2

A

03.04.2024

1. (1.5μ.) Υπολογίστε την μεικτή παράγωγο των συναρτήσεων:

α). $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(x^2 + y)$,

β). $f(x, y) = e^{x \sin^3 x} \ln(x^2 + 1) + xy$.

2. (2μ.) Έστω

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$$

α). Προσδιορίστε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια

$$f(x, y, z) = 5$$

στο σημείο $(x, y, z) = (1, 0, -2)$.

β). Βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(1, 0, -2)$ κατά μήκος της κατεύθυνσης όπου η f αυξάνει γρηγορότερα.

3. (6.5μ.) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}.$$

α). Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

β). Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης στα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ και στο σημείο $(0, 0)$.

γ). Είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη ή όχι στο σημείο $(0, 0)$; Είναι η συνάρτηση συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ ή όχι;

δ). Υπάρχουν μερικές παράγωγοι στα σημεία $(0, y)$, $y \neq 0$;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Διάρκεια της εξέτασης 90 λεπτά.

Πρόδος Απειροστικός Λογισμός 2

B

03.04.2024

1. (1.5μ.) Υπολογίστε την μεικτή παράγωγο των συναρτήσεων:

α). $f(x, y) = \sin(xy^2) + \cos(x + y)$,

β). $f(x, y) = e^{x^2 \sin^2 x} \ln(x^4 + 1) + xy$.

2. (2μ.) Έστω

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$$

α). Προσδιορίστε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια

$$f(x, y, z) = 2$$

στο σημείο $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

β). Βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(-1, 0, 1)$ κατά μήκος της κατεύθυνσης όπου η f αυξάνει γρηγορότερα.

3. (6.5μ.) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin \frac{1}{y}, & \text{για } y \neq 0 \\ 0, & \text{για } y = 0 \end{cases}.$$

α). Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

β). Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης στα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ και στο σημείο $(0, 0)$.

γ). Είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη ή όχι στο σημείο $(0, 0)$; Είναι η συνάρτηση συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ ή όχι;

δ). Υπάρχουν μερικές παράγωγοι στα σημεία $(x, 0)$, $x \neq 0$;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Διάρκεια της εξέτασης 90 λεπτά.