Συνέχεια συναρτήσεων δυο μεταβλητών.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$(*) \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a\, y^b}{x^2+y^2} \text{ για } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 \quad \text{ για } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$a \geq 0$, $b \geq 0$. Στην περίπτωση που x^a δεν ορίζεται ($x^a \notin \mathbf{R}$) παίρνουμε $|x|^a$, όμοιως για y^b.

I. Θα αποδείξουμε οτι αν $a+b > 2$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,0)$, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0.$$

(Το ότι είναι συνεχής σε άλλα σημεία είναι προφανές)

1. Έστω $a > 2$, $b = 0$:

$$f(x,y) = \frac{x^a}{x^2+y^2}.$$

Προφανώς

$$|f(x,y)| = |x|^{a-2}\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|^{a-2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|^{a-2} \to 0 \ \text{ καθώς } \ x \to 0.$$

Παρομοίως αν $a = 0$, $b > 2$ έχουμε

$$|f(x,y)| \leq |y|^{b-2} \to 0 \ \text{ καθώς } \ y \to 0.$$

2. Έστω τωρα $a > 0$, $b > 0$ ($a+b > 2$). Θα χρειαστούμε την ανισόητα $Young$ (ειδική περίπτωση):

$$|\xi||\eta| \leq \frac{1}{p}|\xi|^p + \frac{1}{q}|\eta|^q, \ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \ \ p > 0,\, q > 0.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $Young$ είναι γενίκευση της γνωστής ανισότητας

$$|\xi||\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2,$$

η οποία προκύπτει από την $Young$ αν πάρουμε $p = q = 2$.

Γράφουμε τα a, b ως εξής:

$$a = \alpha + \varepsilon_1, \ \ b = \beta + \varepsilon_2$$

ε.ω.

$$\alpha+\beta = 2,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \varepsilon_1 \geq 0,\ \varepsilon_2 \geq 0,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2 > 0.$$

Έχουμε

$$|f(x,y)| = |x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leq |x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\frac{\frac{\alpha}{2}\left(|x|^\alpha\right)^{2/\alpha} + \frac{\beta}{2}\left(|y|^\beta\right)^{2/\beta}}{x^2+y^2} =$$

$$|x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\frac{\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}y^2}{x^2+y^2} \leq \gamma|x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} =$$

$$\gamma|x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2} \to 0 \ \text{ καθώς } \ (x,y) \to (0,0),$$

όπου
$$\gamma = \max\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\}.$$
Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $Young$ με
$$p = \frac{2}{\alpha}, \ \ q = \frac{2}{\beta}.$$

Παράδειγμα 1. $a = 2, b = 3$
$$\Big|\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\Big| = |x|y^2\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|y^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{|x|y^2}{2} \to 0.$$
Άρα εδώ $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $p = 2$, $q = 2$.

Παράδειγμα 2. $a = 4/3, b = 5/3$
$$\Big|\frac{x^{4/3}y^{5/3}}{x^2+y^2}\Big| = |y|\frac{x^{4/3}y^{2/3}}{x^2+y^2} \leq |y|\frac{\frac{2}{3}\big(x^{4/3}\big)^{3/2} + \frac{1}{3}\big(y^{2/3}\big)^3}{x^2+y^2} =$$
$$|y|\frac{\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{2}{3}|y| \to 0.$$
Αρα εδώ $\alpha = 4/3$, $\beta = 2/3$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $p = 3/2$, $q = 3$. $\square$

II. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν $a + b \leq 2$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, δηλαδή
$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) \neq 0.$$
(Σε άλλα σημεία προφανώς είναι σηνεχής)

1. Έστω $a + b = 2$. Θέτουμε $y = \kappa\, x$ με $\kappa \in \mathbf{R}^+$, έχουμε
$$f(x, y) = \frac{x^a\kappa^b x^b}{x^2 + \kappa^2x^2} = \frac{x^{a+b}}{x^2}\frac{\kappa^b}{1+\kappa^2} = \frac{\kappa^b}{1+\kappa^2},$$
δηλαδή οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, άρα το όριο
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f \ \text{ δεν υπάρχει.}$$

2. Έστω $0 < a < 2$, $b = 0$:
$$f(x, y) = \frac{x^a}{x^2+y^2}.$$
Για $y = 0$ και $x \to 0$ έχουμε
$$\frac{x^a}{x^2} = x^{a-2} \to \infty,$$
ενω για $x = 0$ και $y \to 0$ έχουμε
$$\frac{0}{y^2} = 0 \to 0.$$
Εδώ προφανώς το όριο είναι μηδέν, όχι η τιμή της συνάρτησης $0/y^2$ στο μηδέν (που δεν ορίζεται).

Συνεπώς η $f(x, y)$ δεν έχει όριο καθώς $(x, y) \to (0, 0)$.

Παρομόιως για $a = 0$, $0 < b < 2$.

3. Έστω τωρα $a > 0$, $b > 0$ $(a + b < 2)$. Θέτουμε

$$\delta = \frac{2-a}{b} > 1,$$

προφανώς

$$a + \delta b = 2.$$

Παίρνουμε $y = \kappa x^{\delta}$ (ή, αν δεν ορίζεται, $y = \kappa |x|^{\delta}$) με $\kappa \in \mathbf{R}^{+}$. Έχουμε

$$f(x,y) = \frac{x^a \kappa^b x^{\delta b}}{x^2 + \kappa^2 x^{2\delta}} = \frac{x^{a+\delta b}\kappa^b}{x^2(1+\kappa^2 x^{2\delta-2})} =$$

$$\frac{\kappa^b}{1+\kappa^2 x^{2\delta-2}} \to \kappa^b \ \text{ καθώς } \ x \to 0 \ \big(\text{αφου}\, 2\delta - 2 > 0\big).$$

Τουτέστιν το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3. $a = 1/3, b = 2/5$ συνεπώς $\delta = 25/6$, αρα παίρνουμε $y = \kappa x^{25/6}$ και έχουμε

$$\frac{x^{1/3}\kappa^{2/5}x^{5/3}}{x^2+\kappa^2 x^{25/3}} = \frac{x^2\kappa^{2/5}}{x^2+\kappa^2 x^{25/3}} = \frac{\kappa^{2/5}}{1+\kappa^2 x^{19/3}} \to \kappa^{2/5}.$$

□

Παρομοίως για την

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a\, y^b}{x^4+y^4} \text{ για } x^2+y^2 \neq 0 \\ \;\; 0 \quad \text{ για } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$a \geq 0$, $b \geq 0$ (και εδώ στην περίπτωση που x^a δεν ορίζεται ($x^a \notin \mathbf{R}$) παίρνουμε $|x|^a$, όμοιως για y^b) μπορούμε να αποδείξουμε οτι

αν $a + b > 4$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,0)$

αν $a + b \leq 4$, τότε η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Πως αντιμετωπίζουμε τις περιπτώσεις όταν ο παρονομαστής δεν έχει ίδιες δυνάμεις; Δηλαδή

$$\frac{x^a\, y^b}{x^2+y^4}, \ \frac{x^a,\, y^b}{x^2+y^6}, \ \frac{x^a\, y^b}{x^4+y^6}\cdots$$

Ας πάρουμε την περίπτωση

$$\frac{x^a\, y^b}{x^2+y^6}.$$

Κάνουμε την εξής αντικατάσταση $\eta = y^3$ $(y = \eta^{1/3})$ έχουμε

$$\frac{x^a\, y^b}{x^2+y^6} = \frac{x^a\, \eta^{b/3}}{x^2+\eta^2}.$$

Άρα η ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a\, y^b}{x^2+y^6} \tag{1}$$

ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,\eta)\to(0,0)} \frac{x^a\, \eta^{b/3}}{x^2+\eta^2}.$$

Το τελευταίο υπάρχει (και ισούται με μηδέν) αν $a+b/3>2$ και δεν υπάρχει αν $a+b/3\le 2$. Συνεπώς και το όριο (1) υπάρχει για $a+b/3>2$ και δεν υπάρχει για $a+b/3\le 2$.

Θεωρούμε την

$$\frac{x^a\, y^b}{x^4+y^6}.$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $\eta = y^{3/2}$ ($y=\eta^{2/3}$) έχουμε

$$\frac{x^a\, y^b}{x^4+y^6} = \frac{x^a\, \eta^{b/3}}{x^4+\eta^4}.$$

Αρα η ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a\, y^b}{x^4+y^6} \tag{2}$$

ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,\eta)\to(0,0)} \frac{x^a\, \eta^{2b/3}}{x^4+\eta^4}.$$

Το τελευταίο υπάρχει αν $a+2b/3>4$ και δεν υπάρχει αν $a+2b/3\le 4$. Συνεπώς και το όριο (2) υπάρχει για

$$a+\frac{2b}{3}>4$$

και δεν υπάρχει για

$$a+\frac{2b}{3}\le 4.$$

Ας πάρουμε τώρα την

$$\frac{x^a\, y^b}{x^2+y^4}.$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $\eta=y^2$ ($y=\eta^{1/2}$) έχουμε

$$\frac{x^a\, y^b}{x^2+y^4} = \frac{x^a\, \eta^{b/2}}{x^2+\eta^2}.$$

Αρα η ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a\, y^b}{x^2+y^4} \tag{3}$$

ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,\eta)\to(0,0)} \frac{x^a\,\eta^{b/2}}{x^2+\eta^2}.$$

Συνεπώς και το όριο (3) υπάρχει (και ισούται με μηδέν) για $a+b/2>2$ και δεν υπάρχει για $a+b/2\le 2$.

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}.$$

Εδώ $a=1$, $b=2$ δηλαδη $a+b/2=2$. Συμφωνα με τα παραπάνω το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}$$

δεν υπάρχει.

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και ως εξής. Ας παρουμε το όριο κατα μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, έχουμε

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Ας παρουμε το όριο κατα μήκος της τυχαίας ευθείας $y=\kappa x$, $\kappa\in\mathbf{R}$, έχουμε

$$\lim_{x\to0}\frac{\kappa x^3}{x^2+\kappa^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\kappa x}{1+\kappa^4x^2}=0.$$

<u>Συμαντική παρατήρηση</u>! Αν και κατα μήκος <u>όλων</u> των ευθειών η τιμή είναι ίδια (μηδέν) αυτό δεν αρκεί για να υπάρχει το όριο, $\lim_{(x,y)\to0} f(x,y)$, το όριο πρεπει να είναι ίδιο κατα μήκος οποιασδήποτε καμπύλης (συμπεριλαμβανομένων και όλων των ευθειών).

Με τον ίδιο τροπο αντιμετωπίζονται οι περιπτώσεις

$$\frac{x^a\,y^b}{x^4+y^2},\ \frac{x^a\,y^b}{x^6+y^2},\ \frac{x^a\,y^b}{x^6+y^4}\dots$$

Παραγωγισιμότητα συναρτήσεων δυο μεταβλητών.

Θα περιοριστούμε με συναρτήσεις δυο μεταβλητών, στην περίπτωση περισσότερων μεταβλητών τα πράγματα είναι όμοια.

Ορισμός 1. *Έστω $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$. Το όριο*

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

αν υπάρχει ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0,y_0) και συμβολίζεται

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \text{ ή }\ f_x(x_0,y_0).$$

Παρομοίως ως προς y, δηλαδή μερική παράγωγος της ως προς ονομάζουμε το όριο (εφ όσων υπάρχει)

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

και συμβολίζεται

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \ \text{ή} \ f_y(x_0, y_0).$$

Ορισμός 2. *Λέμε ότι η $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) αν η μεταβολή της f μπορεί να γραφτεί ως*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Εδώ οι σταθερές A και B εξαρτώνται μόνο από (x_0, y_0) και

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\alpha(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Εύκολα καταλήγουμε στο

$$A = f_x(x_0, y_0) \ \text{και} \ B = f_y(x_0, y_0).$$

Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής η ύπαρξη της παραγώγου ισοδυναμεί με την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης, στις περισσότερες μεταβλητές η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εξασφαλίζει της παραγωγισιμότητα, το αντίστροφο ισχύει (μόλις το έχουμε διαπιστώσει). Επίσης η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια, αυτό ισχύει για όλες τις διαστάσεις.

Παράδειγμα 5. Θα διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{για } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{για } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

έχει μερικές παραγώγους.

Πράγματι, για $x^2 + y^2 > 0$ έχουμε

$$f_x = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Τις μ.π. στο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ θα υπολογίσουμε βάσει ορισμού:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(f(\Delta x, 0) - f(0, 0)) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0\Big) =$$

Άρα

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{(\Delta x)^3} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

ήτοι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Παρομοίως
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$
Δηλαδή οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και ορίζονται από
$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{για } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{για } x^2+y^2=0\end{cases},$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{για } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{για } x^2+y^2=0\end{cases}.$$

Όμως η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ (δεν είναι καν συνεχής στο $(0,0)$ αφού εδώ $a+b=2$).
□

Αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς τότε η συνάρτηση είναι όχι απλώς παραγωγίσιμη αλλά συνεχώς παραγωγίσιμη. Όμως υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες όχι όμως συνεχώς παραγωγίσιμες. Στο Παράδειγμα 5 οι μ.π δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

Θα δούμε τώρα παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης της οποίας οι μ.π. δεν είναι συνεχείς δηλαδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη όχι όμως συνεχώς παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα 6. Θα διαπιστώσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση
$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{για } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{για } x=y=0\end{cases}$$
είναι παραγωγίσιμη. Προφανώς το μόνο ¨προβληματικό¨ σημείο είναι το $(0,0)$.

Έχουμε για $x^2+y^2>0$
$$f_x=y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f_y=x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$
Για $x=y=0$ έχουμε
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big(\Delta x\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+0^2}-0\Big)=0,$$
παρομόιως
$$f_y(0,0)=0.$$

Προφανώς οι μ.π. δεν είναι συνεχείς (στο (0,0)) παρ όλα ταύτα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Πράγματι,
$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$
$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0 \ \text{ καθώς } \ (\Delta x,\Delta y)\to(0,0).$$

Το τελευταίο προκύπτει άμεσα από την εκτίμηση

$$\frac{\left|\Delta x \Delta y\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\left|\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

□

Εύκολα κατασκευάζουμε παρόμοιο παράδειγμα και για $n = 1$.

Παράδειγμα 7. Θα διαπιστώσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{για } x \neq 0, \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη όχι όμως συνεχώς παραγωγίσιμη.

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

προφανώς λόγο του $\cos 1/x$ η $f'(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$.

Υπολογίζουμε την παράγωγο στο $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\big((\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x} - 0\big) = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$