

Φυλλάδιο 1

7.10.2022

1. Έστω

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx.$$

Σχεδιάστε το χωρίο D και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης.

2. Έστω

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Σχεδιάστε το χωρίο D και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης.

3. Υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x y dy \right) dx$$

και με τη δοσμένη σειρά και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

4. Υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr \right) d\theta$$

και με τη δοσμένη σειρά και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

5. Έστω $R = [-1, 1] \times [-1, 2]$, αποδείξτε ότι

$$1 \leq \int \int_R \frac{dA}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \int_D \sqrt{x} y^2 dA$$

όπου το χωρίο D ορίζεται από τις σχέσεις $x > 0$, $y > x^2$ και $y < 10 - x^2$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \int_D x(1+y) dA$$

όπου το χωρίο D βρίσκεται μεταξύ $\sin x$ και $3 \sin x$ με $x \in (0, \pi)$.

8. Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) dz dy = \int_c^d f(x, x, z) dz + \int_a^x \int_c^d f_x(x, y, z) dz dy.$$