

Φυλλάδιο 10 (21.12.2022)

1. Έστω $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και F_r η ακτινική συνιστώσα του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} . Αποδείξτε ότι

$$\int_S \mathbf{F} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

2. Έστω S μια κλειστή επιφάνεια, αποδείξτε ότι

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot ds = 0$$

όπου \mathbf{F} είναι ένα C^2 διανυσματικό πεδίο.

3. Ποιά από τα παρακάτω δ. πεδία είναι συντηρητικά, γι αυτά που είναι βρείτε το δυναμικό

α) $\mathbf{F} = (y^2, -z^2, x^2),$

β) $\mathbf{G} = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y, z).$

4. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \mathbf{F} \cdot dS,$$

όπου $S : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z > 0$ και

$$\mathbf{F} = (x^2y, xy^2, 1 - 4xyz).$$

5. Έστω S το κομμάτι του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = x + 3$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{108} \int_S (x^2 + y^2 + z^2) ds.$$