

Φυλλάδιο 2

14.10.2022

1. Έστω ότι το χωρίο Ω ορίζεται από την σχέση

$$\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

και

$$\iiint_{\Omega} f dV = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Προσδιορίστε τα όρια a , b , $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ και $\gamma_1(x, y)$, $\gamma_2(x, y)$.

Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης προς y και x .

2. Έστω Ω το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq xy.$$

(α) Βρείτε τον όγκο του Ω ,

(β) υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\Omega} xy dV.$$

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$$

και σχεδιάστε το χωρίο όπου γίνεται η ολοκλήρωση.

4. Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στο

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

και βρείτε πέντε ακόμα διαφορετικές μορφές του ολοκληρώματος αυτού.

Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης και βρείτε τον όγκο του.

5. Έστω $f(x, y, z) \in C^0(B_\varepsilon(0))$ όπου $B_\varepsilon(0)$ μπάλα με ακτίνα $\varepsilon > 0$ και κέντρο στο σημείο $(0, 0, 0)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{B_\varepsilon(0)} f dV = \frac{4\pi}{3} f(0, 0, 0).$$