

### Φυλλάδιο 3

21.10.2022

1. Έστω  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$  και η απεικόνιση

$$T : (u, v) \rightarrow (-u^2 + 4uv, v).$$

Δηλαδή

$$T : (u, v) \rightarrow (x, y), \text{ όπου } x = x(u, v) = -u^2 + 4uv, \quad y = y(u, v) = v.$$

Έστω  $D = T(D^*)$ . Διαπιστώστε ότι η  $T : D^* \rightarrow D$  δεν είναι ένα προς ένα.

2. Ορίζουμε την  $T(r, \theta) = (x, y)$  να είναι

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Υποθέτουμε ότι  $T(D^*) = D$ , όπου

$$D = \{(x, y) : x < 0, y < 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Προσδιορίστε το χωρίο  $D^*$ .

3. Έστω  $T$  γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον πίνακα  $A$ . Δείξτε ότι ο  $T$  είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν

$$\det A \neq 0.$$

4. Έστω  $\Omega$  το χωρίο που ορίζεται από την σχέση

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4, \quad z \leq 0$$

και έστω  $T(\Omega^*) = \Omega$  όπου

$$T : (\rho, \theta, \phi) \in \Omega^* \rightarrow (x, y, z) \in \Omega$$

με

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Προσδιορίστε το  $\Omega^*$  και δείξτε ότι η απεικόνιση είναι ένα προς ένα.

5. Έστω  $D^*$  το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις ευθείες

$$y = 3x - 4, \quad y = 3x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{x + 4}{2}$$

και έστω  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Προσδιορίστε μια απεικόνιση  $T$  ε.ω.  $D = T(D^*)$ .

6. Η απεικόνιση

$$T : (u, v) \rightarrow (u^2 - v^2, 2uv).$$

μετασχηματίζει το ορθογώνιο  $D^* = [1, 2] \times [1, 3]$  του επιπέδου  $(u, v)$  σε ένα χωρίο  $D$  του επιπέδου  $(x, y)$ .

α.) δείξτε ότι η  $T : D^* \rightarrow D$  είναι ένα προς ένα,

β.) βρείτε το εμβαδόν του  $D$  χρησιμοποιώντας τον τύπο της αλλαγής μεταβλητών.