

Φυλλάδιο 5

9.11.2022

1. Έστω $D \subset \mathbf{R}^2$ χωρίο που ορίζεται από τις καμπύλες $y = \ln x$, $y = 2 \ln x$ και $x = e$.

α). Σχεδιάστε το χωρίο.

β). Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x, y) = xe^y$ πάνω στο D ανάγοντας το διπλό ολοκλήρωμα σε διαδοχικό.

γ). Άλλαξτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

2. Βρείτε τον όγκο του στερεού που ορίζεται από

$$z \geq x^2 + y^2 \text{ και } z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Έστω

$$\Omega = \{(x, y, z) : \frac{1}{2} < z < 1 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Προσδιορίστε τα a , b , $\phi_i(x)$ και $\gamma_i(x, y)$ ε.ω.

$$\int_{\Omega} f dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f dz dy dx,$$

εδώ $f = f(x, y, z)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

4. Έστω D το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που ορίζεται από τις καμπύλες $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ και $x^2 - y^2 = 4$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Υπόδειξη: $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

5. Υπολογίστε το ακόλουθο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\sigma} \frac{x+y}{x+z} ds$$

όπου

$$\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t), \quad t \in [1, 2].$$