

Φυλλάδιο 6

25.11.2022

1. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\bar{\sigma}} f ds$$

όπου $\bar{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $f = x + y + z$.

2. Βρείτε το μήκος της καμπύλης

$$\bar{\sigma}(t) = (t^2, t, -t), \quad t \in [0, 1].$$

3. Βρείτε τη μάζα του σύρματος που έχει το σχήμα της τομής της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ με το επίπεδο $x + y + z = 0$, αν η πυκνότητα μάζας είναι $\rho = x^2$.

4. Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $g(x, y)$ κατά μήκος της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες $r = \phi(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ισούται με

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\phi(\theta) \cos \theta, \phi(\theta) \sin \theta) \sqrt{\phi^2(\theta) + \phi'^2(\theta)} d\theta.$$

5. Έστω l μια καμπύλη μήκους $|l|$ και $\bar{\sigma}(t)$ η παραμετρική αναπαράστασή της. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_l \frac{\bar{\sigma}'(t)}{\|\bar{\sigma}'(t)\|} \cdot ds.$$

6. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\bar{\sigma}} x^2 dx - xy dy + dz,$$

όπου $\bar{\sigma}(t)$ είναι η παραβολή $z = x^2$, $y = 0$ από $(-1, 0, 1)$ ως $(1, 0, 1)$.

7. Υπολογίστε το έργο που παράγει η δήναμη $\mathbf{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ για να μετακινήσει ένα σωματίδιο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$, $z = 0$ από $x = -1$ ως $x = 2$.

8. Έστω l μια καμπύλη μήκους $|l|$ και $\|\mathbf{F}\| \leq M$, αποδείξτε ότι

$$\left| \int_l \mathbf{F} \cdot ds \right| \leq M|l|.$$