

Φυλλάδιο 8

9.12.2022

1. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που έχει ως σύνορο την πολυγωνική γραμμή η οποία ενώνει τα σημεία

$$(1, 1), (1, -1), (3/2, 5/4), (3, 1), (2, 2).$$

2. Έστω D ένα χωρίο για το οποίο ισχύει το θεώρημα *Green*. Δείξτε ότι αν $f(x, y) \in C^2$ και

$$f_{xx} + f_{yy} = 0,$$

τότε

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

3. Υπό τις υποθέσεις του θεωρήματος *Green* διαπιστώστε ότι

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} (QP_x - PQ_x) dx + (PQ_y - QP_y) dy = \int \int_D (PQ_{xy} - QP_{xy}) dx dy.$$

4. Έστω S μια επιφάνεια και $\mathbf{F}$ ένα πεδίο κάθετο στο ∂S . Βρείτε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

5. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

όπου

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\},$$

και

$$\mathbf{F} = (x^3, -y^3, 0).$$

6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{F} = (x, y, z) \times (1, 1, 1),$$

και η επιφάνεια S ορίζεται από

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{και} \quad x + y + z \geq 1.$$