Φυλλάδιο 9

(19.12.2022)

1. Διαπιστώστε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$ είναι συντηρητικό και βρείτε το δυναμικό του.

2. Δείξτε ότι το δ. πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_l \mathbf{F} \cdot ds$$

α) $\mathbf{F} = (xy^2 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x+y)x^2\mathbf{j}$, η καμπύλη l αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $(1,1)$, $(0,2)$ και $(3,0)$,

β)

$$\mathbf{F} = \frac{2x}{1+y^2}\mathbf{i} - \frac{2y(1+x^2)}{(1+y^2)^2}\mathbf{j},$$

η καμπύλη l παραμετρικοποιείται απο $\sigma(t) = (t^3 - 1, t^6 - t)$, $t \in [0,1]$.

3. Είναι κάποιο από τα παρακάτω δ. πεδία $\mathbf{F}$ ο στροβιλισμός κάποιου δ. πεδίου $\mathbf{G}$; Αν ναί, βρείτε το $\mathbf{G}$

α) $\mathbf{F} = (x,\, y,\, z)$,

β) $\mathbf{F} = (x^2 + 1,\, z - 2xy,\, y)$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_S \mathbf{F} \cdot dS,$$

όπου S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας και

$$\mathbf{F} = (\frac{x^3}{3} - xy^2, yz^2 - 2, 2y^2z + 2xy).$$

5. Έστω $\mathbf{F} = (y,\, z,\, xz)$. Υπολογίστε το

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot dS$$

για

α) Ω: $x^2 + y^2 < z < 1$,

β) Ω: $x^2 + y^2 < z < 1$, $x > 0$.

6. Έστω $f,\, g \in C^2$. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες $Green$

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV.$$

Εδώ

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, \;\; \Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}.$$