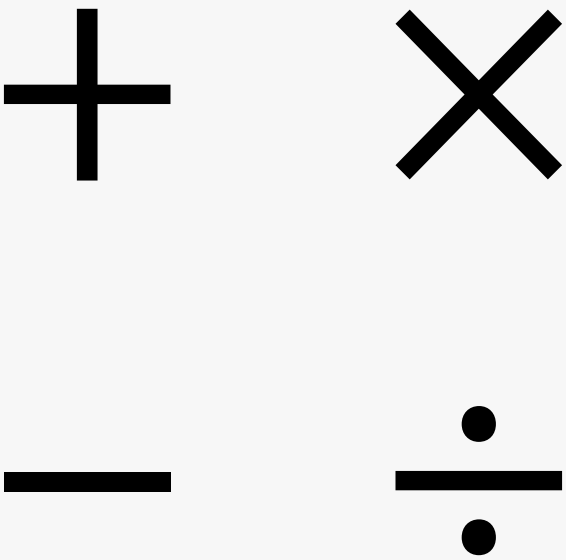


ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (Calculus)

tertikos @ uoc.gr
users.math.uoc.gr/tertikos

Finney-Weir-Giordano (Thomas George)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (Calculus):

Συναρτήσεις μιας μεταβλητής:

↳ Πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ (real number)

↳ Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ $\{1, 2, 3, \dots\}$

↳ Ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$: οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με φυσικούς όρους

$\frac{m}{R}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $R \in \mathbb{N}$

↳ Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z}$: $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$

Σύνολα:

$A \subseteq \mathbb{R}$

$\emptyset$ κενό σύνολο

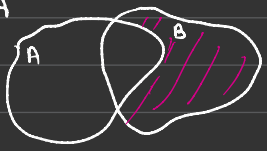
$A = \mathbb{N}$

$A = \{0, 1, -1\}$

* $A \subseteq B$
  ↓
  υποσύνολο

* $\forall\ a \in A \Rightarrow a \in B$
  ↓ για ↓ κάθε ↓ στοιχείο

* $B - A$



* $A \cap B$



* $A \cup B$



Πράξεις: $+$, $\cdot$

$$a, b \in \mathbb{R} \xrightarrow{+} a+b$$
$$\xrightarrow{\cdot} a \cdot b$$

$\exists!$ υπάρχει αμοιβαίος ένας δείκτης

Ιδιότητες:

↳ $a+b = b+a$ (αντιμεταθετική)

↳ $a \cdot b = b \cdot a$ (αντιμεταθετική)

↳ $a+(b+\gamma) = (a+b)+\gamma$

↳ $a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \cdot b) \cdot \gamma$

↳ $a \cdot (b+\gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$

↳ $a+b=0$ όταν $b=-a$

↳ $a_1+(a_2+(a_3+\dots+(a_n)+\dots)) = a_1+\dots+a_n$

Διάταξη στους πραγματικούς:

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ είτε

$x < 0$ είτε

$x \leq 0$

Άμεσα συμπεράσματα:

$x>0$, $y>0 \Rightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ xy>0 \end{cases}$

$x \geq 0$, $y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \cdot y \geq 0 \end{cases}$

$x>y \Leftrightarrow x-y>0$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x>y$: $\quad \alpha x > \alpha y$ αν $\alpha>0$; $\quad \alpha x < \alpha y$ αν $\alpha<0$

Απόδειξη:

Έχουμε $\left.\begin{array}{l} x>y \Leftrightarrow \\ x-y>0 \\ \alpha>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(x-y)>0$

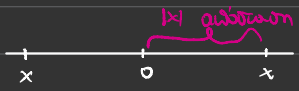
$\Leftrightarrow \alpha x - \alpha y > 0$

$\Leftrightarrow \alpha x > \alpha y$

Έννοια - Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών:

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



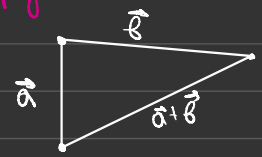
Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών:

Αλγεβρικός αριθμός $\exists\ \theta > 0$

$|x| = \theta \Leftrightarrow$ είτε $x = \theta$ ή είτε $x = -\theta$

- $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$
- $\beta \neq 0 \quad \left|\frac{a}{\beta}\right| = \frac{|a|}{|\beta|}$
- $|a+\beta| \leq |a| + |\beta|$

Τριγωνική Ανισότητα



$|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

$0 < \alpha, \beta, \gamma$

$\alpha < \beta + \gamma$

$\beta < \alpha + \gamma$

$\gamma < \alpha + \beta$

* $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$

Πότε το Α το λέμε άνω φραγμένο σύνολο;

Όταν $\exists\ M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\forall\ a \in A,\ a \leq M$

$A = \{x \in Q,\ x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$

Το $\sqrt{2}$ είναι ένα από φράγματα για το Α, διότι $a \in A$

$\Rightarrow a \in Q$ & $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

* Το $\sqrt{2}$ είναι άνω φράγμα χωρίς να είναι στοιχείο του συνόλου Α.

Αν $M \in [-\sqrt{2}, +\infty) \Rightarrow$ Μ άνω φράγμα του Α.

*Όταν $\exists\, m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε, $\forall\, a \in A \quad a \geq m$

$A = \{ x \in \mathbb{Q} \;\&\; x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \}$

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ:

Αν $\emptyset \neq A \leq \mathbb{R}$ ένα $\epsilon \mathbb{Q}$ ανω φραγμα, τοτε υπαρχει αριθμος $\sup A$ (supre είναι ανω φραγμα και ταυτοχρονα το μικροτερο απο τα ανω φραγματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\emptyset \neq A \leq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \leq \mathbb{R}$ είναι ανω φραγμενα συνολα. Τοτε είναι τα ακολουθα συνολα.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ είναι ανω φραγμενα συνολα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

1) Ευθεία αποδειξη: Χρηση δεδομενων $\Rightarrow$ Συμπερασμα.

2) Αναγωγη σε Ατοπο (Αντιθετοαντιστροφη)

Λογικης: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\infty \Rightarrow Q$ αληθευει

Άρνηση της $Q \Rightarrow$ Άρνηση των δεδομενων

$\neg \quad Q \Rightarrow \neg \quad (\Pi_1 \cap \Pi_2)$

$\neg\, (\Pi_1 \cap \Pi_2) := $ είτε $\neg \Pi_1$ είτε $\neg \Pi_2$) αληθευει

$\neg\, (\Pi_1 \overset{\text{είτε}}{\vee} \Pi_2) \quad \neg \Pi_1 \cap \neg \Pi_2$

Αναγωγη σε ατοπο: Υποθετουμε οτι δεν ισχυει το συμπερασμα και ο ενδιαφερομενος στοχος να δειξουμε οτι τουλαχιστο μια απο τις υποθεσεις δεν αληθευει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα χρησιμοποιησουμε ευθεια αποδειξη.

(Π_1) Επειδη το A είναι ανω φραγμενο $\exists\; M_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall\, a \in A \quad a \leq M_1$

(Π_2) Επειδη το B είναι ανω φραγμενο $\Rightarrow \exists\; M_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall\, b \in B \quad b \leq M_2$

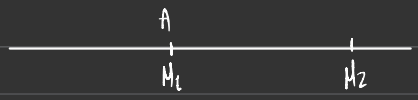
Θα αποδειξουμε οτι ο (μεγιστος) $\max(M_1, M_2)$ είναι ένα ανω φραγμα του $A \cup B$.

Έστω $x \in A \cup B$ $\nearrow$ είτε $x \in A$ $\searrow$ είτε $x \in B$

Πραγματι αν $x \in A$ $\overset{\text{τοτε}}{\Rightarrow} x \leq M_1 \leq \max(M_1, M_2)$

αν $x \in B$ τοτε $x \leq M_2 \leq \max(M_1, M_2)$

και επομενως αν $x \in A \cup B \Rightarrow x \leq \max(M_1, M_2)$



Για το μεγ το $\min(M_1, M_2)$

Πρόταση: Αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a+b|}{2}$$

$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Αρχιμήδεια Ιδιότητα των Πραγματικών Αριθμών:

Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $\exists\ n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \le n$

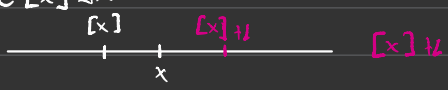
Ακέραιο μέρος πραγματικών αριθμών:

$x \in \mathbb{R}$ $[x]$

$[1,3] = 1$

Ορισμός: Το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$ είναι ακέραιος και μικρότερος ή ίσος του x.

$$\mathbb{Z} \ni [x] \le x$$



$$[x] \le x < [x]+1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Πυκνότητα των Ρητών στους Πραγματικούς)

Έστω $a < b$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < x < b$

Απόδειξη:



$a < \frac{m}{n} < b$

ΜΚΕΕΙΜ

$m \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{N}$

$$na < m < bn$$

Πρέπει να εισάγω n: $bn - an > 1$

$$n(b-a) > 1 \iff n > \frac{1}{b-a}$$

Για $\left[\frac{1}{b-a}\right]+1$

$$na < m = [bn] \le nb$$

Επειδή $b>a \Rightarrow b-a>0 \Rightarrow \frac{1}{b-a}>0$

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα $\exists\, n\in\mathbb{N}$ ώστε

$$n>\frac{1}{b-a}$$

$\Leftrightarrow n(b-a)>1$

$\Leftrightarrow nb-na>1$

$\Leftrightarrow nb>na$

Επιλέγω $m\in\mathbb{Z}$ $(m=[nb])$

$na<[nb]\leq nb$

$\Rightarrow b-a>\frac{1}{n}$

$\Rightarrow na<m<nb$

$\Rightarrow a<\frac{m}{n}<b$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Πυκνότητα Άρρητων)

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, τότε $\exists\, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $a<x<b$

* Γνωρίζουμε $\mathbb{Q}$ κλειστό ως προς

ρητός + ρητός = ρητό

Γιατί: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+pn}{n\cdot q}$ $\quad m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}$

$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

άρρητος + ρητός = άρρητος (ωάστε)

Απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι υπάρχει ο άρρητος ως $\frac{m}{n}\in\mathbb{N}$ ώστε

$$a+\frac{m}{n}=\frac{p}{q},\quad p\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a=\frac{p}{q}-\frac{m}{n}=\frac{pn-mq}{qn}\in\mathbb{Q}$$ ΑΤΟΠΟ

ΕΡΩΤΗΜΑ: Γιατί $\sqrt{2} \in Q$?

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ: Έστω το $\sqrt{2} \in Q$ τότε εφόσον $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 = m^2$$

Ο $2n^2$ άρτιος $\Rightarrow m^2$ άρτιος

$\Rightarrow m$ άρτιος, διότι αν ήταν περιττός $m = 2k+1$ $k \in \mathbb{Z}$

$m^2 = (2k+1)^2$

$m^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$m^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Δεν ισχύει

$m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}$

$2n^2 = (2m_1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4m_1^2$

$\Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2$

$\Rightarrow$ Αντιστοίχα n άρτιος οπότε $n = 2n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$

Καταλήγουμε ότι $n = 2n_1 \Rightarrow 2$ κοινός διαιρέτης των m, n

$m = 2m_2$ ΑΤΟΠΟ.

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ:

Έαν p/n $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$

Τι μπορούμε να πούμε

$p/n_1 n_2 \dots n_k$ $n \in \mathbb{Z}$ $i = 1, 2, \dots, k$

$\Downarrow$

$\exists\, i \in \mathbb{N}$ ώστε p/n_i ? Όταν το p είναι πρώτος αριθμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Πυκνότητα Άρρητων, συνέχεια...)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα βρούμε ρητό $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < b \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow n\frac{a}{\sqrt{2}} < m < \frac{b}{\sqrt{2}}n$$

Αυτό γίνεται $\frac{b}{\sqrt{2}}n - a\frac{n}{\sqrt{2}} > 1 \Leftrightarrow n\left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right) > 1$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$$

και τότε επιλέγεται $m = \left[n\frac{a}{\sqrt{2}}\right] + 1 < \frac{bn}{\sqrt{2}}$

* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ:

Παράμετρος: $(n \in \mathbb{N})$

$\Pi(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n \in \mathbb{N}$

1) Αρχικά αποδεικνύουμε το $\Pi(1)$

2) Υποθέτουμε ότι ισχύει $\Pi(k)$

Πρόταση: Αν $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $(1+x)^n \geq 1+nx$
(Ανισότητα Bernoulli)

Απόδειξη: Για $n=1$, η ανισότητα γράφεται:
$(1+x)^1 \geq 1+x \Leftrightarrow 0 \geq 0$ ισχύει

Έστω $k \in \mathbb{N}$ $(1+x)^k \geq kx$

* Στόχος να αποδείξουμε ότι ισχύει $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Εφείδη $(1+x)^k \geq 1+kx \Leftrightarrow (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$ (Πολ/ζω με $(1+x)$)

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2$

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x(1+k)+kx^2$

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x(1+k+kx) \geq 0$

* $a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

Για ? (Να ορίζεται τον μη αρνητικό αριθμό)

$a \geq 0$ τι είναι το $\sqrt[n]{a}$?

$\sqrt[n]{a} : x$

Είναι ευθείας ο μη αρνητικός αριθμός του $\boxed{x^2 = a}$

$n \in \mathbb{N}$

$x^{2n} = a$

$a \geq 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{2n}}$

$\sqrt[2n]{a}$

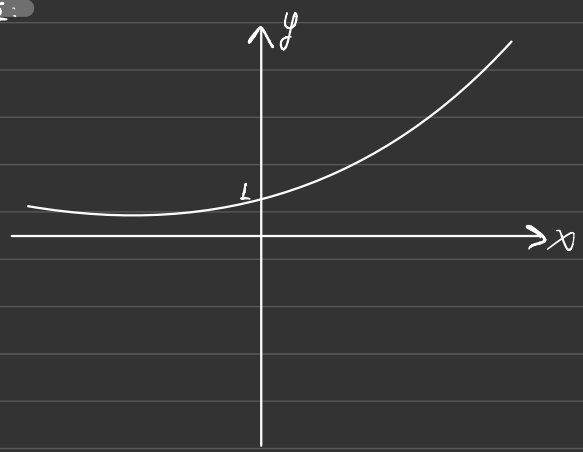
Αν $\sqrt[2n]{a}$, $a \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ: Αν $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$n^2 < m < (n+1)^2$$

τότε $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$

ΕΚΘΕΤΗΣ:



ΑΥΞΟΥΣΑ: $f \uparrow$ στο $A \subseteq \mathbb{R}$

Η f είναι αυξουσα $\forall\, x, y \in A \quad x < y$

$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$

* Η f είναι γνησίως αυξουσα αν $\forall\, x, y \in A$

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

ΦΘΙΝΟΥΣΑ: $g : A \to \mathbb{R}$ είναι φθινουσα $(\downarrow) \quad \forall\, x, y \in A, \; x < y$

$\Rightarrow g(x) \geq g(y)$

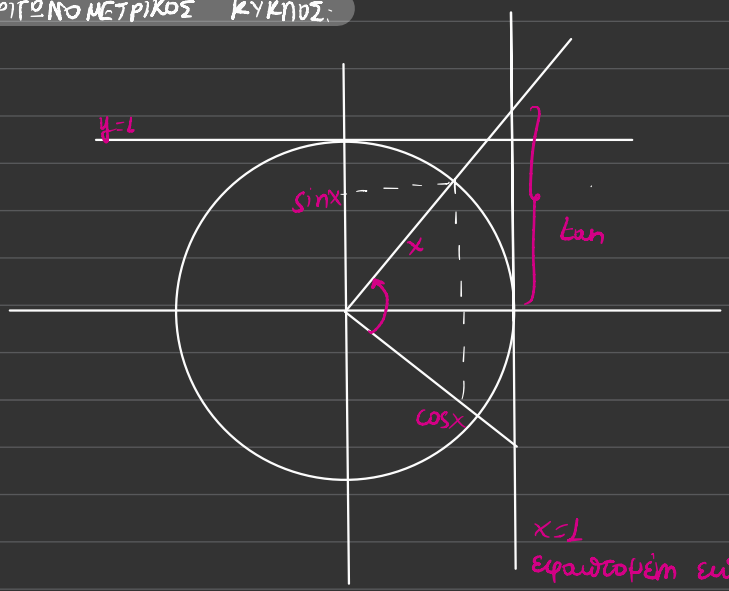
$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, με $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(y) = \ln y$, $y > 0$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ:



$0 < x < \pi/2$

$\sin x$

$\cos x$

$\tan x$

$\cot x$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

Υποθέτουμε από εδώ και πέρα ότι $a \in \mathbb{R}$

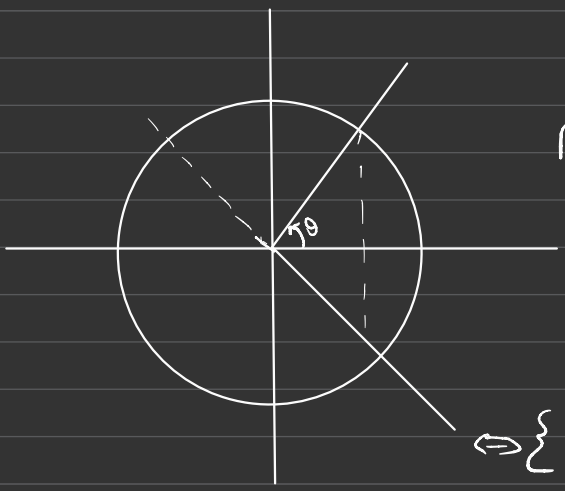
Βρείτε τα τόξα x ώστε: $\sin x = a$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: α) $|a| > 1$, η εξίσωση είναι αδύνατη

β) $|a| \leq 1$, η εξίσωση έχει λύσεις.

Αν θ κάποιο τόξο ώστε $\sin\theta = a$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\theta$



$(0, 2\pi)$

$\theta,\ \pi - \theta$

ΛΥΣΗ: $\sin x = \sin\theta$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{είτε } x = 2k\pi + \theta & k \in \mathbb{Z} \\ \text{είτε } x = 2k\pi - \theta & k \in \mathbb{Z} \end{bmatrix}$

$\cos x = \alpha = \cos\theta$

$|\alpha| \le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{είτε } x = 2k\pi + \theta, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{είτε } x = 2k\pi - \theta, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\tan x = \tan\theta$

$\Leftrightarrow x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ:

Να βρεθούν τα τόξα για τα οποία $\cos x > \frac{1}{2}$

Αν $x \in [-\pi, \pi]$

$\cos x > \frac{1}{2}$

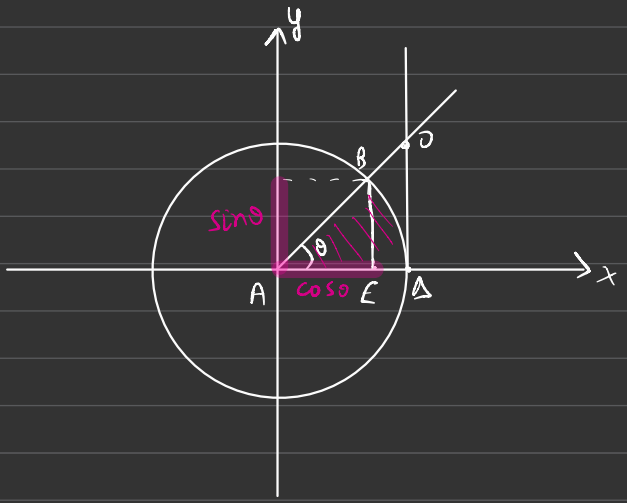
$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

ΑΣΚΗΣΗ: Θεωρούμε το τεταρτημόριο



Αποδείξτε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $(\tan\theta)$

Εμβαδόν τριγώνου: $\frac{1}{2}\cdot b\cdot v$

$\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$

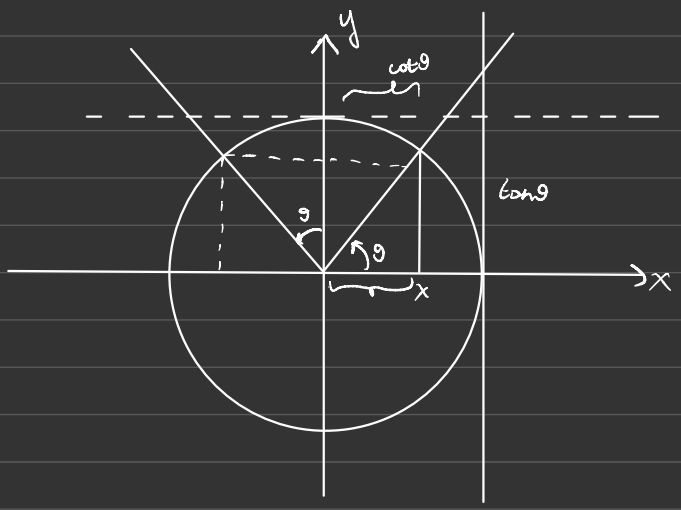
Εμβαδόν $A\hat{B}E$ < Εμβαδόν τομέα ABD < Εμβαδόν ACD

$\theta = 2\pi \longrightarrow \pi$

$\theta \qquad x?$

$\frac{2\pi}{\theta} = \frac{\pi}{x} \iff \boxed{x = \frac{\theta}{2}}$

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ:



$\cos\theta = x$

$\sin\theta = x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

ΧΡΗΣΗ ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΩΝ:

$\exists$ $\forall$ & είτε

Ακολουθίες:

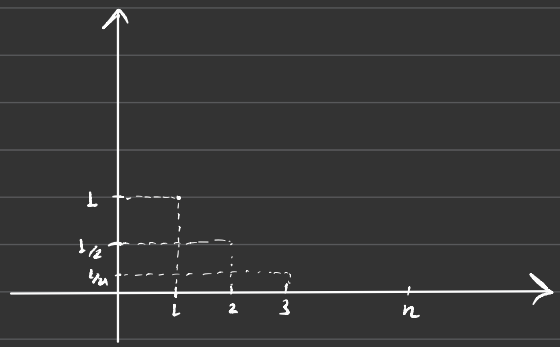
Ορισμός: Ακολουθίες είναι συναρτήσεις διηλαδή έχουν πεδίο ορισμού $\mathbb{N}$.

Διαφοροποίηση στον συμβολισμό:

αν $a(n)$ γράφουμε a_n, $n \in \mathbb{N}$

Γραφική παράσταση ακολουθίας:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$



Σύγκλιση ακολουθίας:

Πότε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Δηλώνουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ είτε $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Όταν $\exists\, a \in \mathbb{R}$, ώστε $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0$$

Παράδειγμα: Η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0.

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε

$|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$, $\forall\ n\geq n_0$

$\frac{1}{n}<\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}<n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου δηλαδή:

Για $\varepsilon>0$, θα βρούμε $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε

$|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$

Επιλέγω $n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, τότε για $n\geq n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$

δηλ. $[\frac{1}{\varepsilon}]\leq\frac{1}{\varepsilon}<[\frac{1}{\varepsilon}]+1$

έχουμε $n\geq[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow \varepsilon n>1\iff\varepsilon>\frac{1}{n}$, $\forall\ n\geq n_0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Βρείτε το όριο της ακολουθίας.

$$\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα αποδείξουμε ότι είναι μηδενική ακολουθία και ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

$\left|\frac{n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$, $\forall\ n\geq 0$

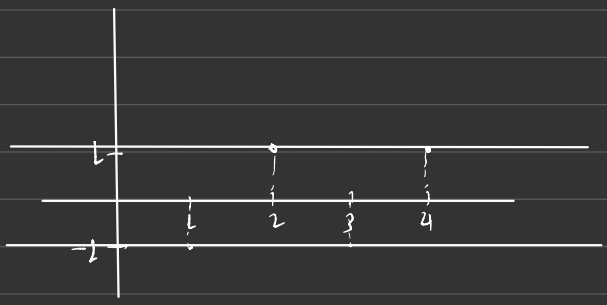
Μήπως μπορώ $\frac{n+1}{n^2+1}\leq\frac{2}{n}<\varepsilon$

$\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{n+n}{n^2}$

Επιπλέον για $\varepsilon>0$, επιλέγω $n_0=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$ και τότε για $n\geq n_0=[\frac{2}{\varepsilon}]+1>\frac{2}{\varepsilon}$

$n>\frac{2}{\varepsilon}\iff\varepsilon>\frac{2}{n}>\frac{n+1}{n^2+1}$ (διότι $\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{n+n}{n^2}=\frac{2}{n}$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Η ακολουθία $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα αποδείξουμε ότι δεν συγκλίνει θα χρησιμοποιήσουμε Άτοπο γιατί σε άτοπο. Ειδικότερα υποθέτουμε ότι στο $a\in\mathbb{R}$ Ολότε θα έχουμε:

$\forall \quad \varepsilon>0 \quad \exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $|(-1)^n-a|<\varepsilon \quad \forall\, n\geq n_0$

ΕΡΩΤΗΜΑ:

Πότε η ακολουθία δεν συγκλίνει στο α?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$\forall\ a>0,\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ ώστε $|a_n-a|<\varepsilon$, $\forall\ n\geq n_0$

$\exists\ \varepsilon_0>0\ \forall\ n_0=n_0(\varepsilon)$

$|a_n-a|\geq\varepsilon_0\ \exists\ n\geq n_0$

ΕΡΩΤΗΣΗ: Πότε μια ακολουθία συγκλίνει;

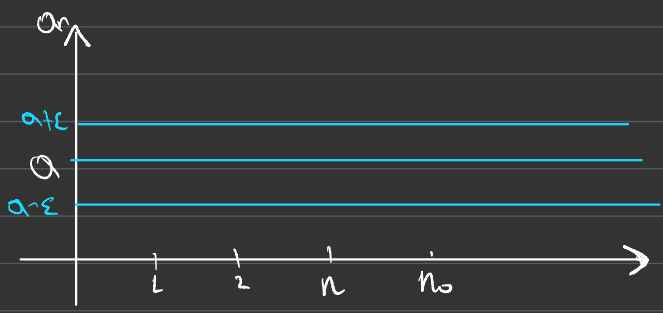
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν $\exists\ a\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $(\lim_{n\to\infty} a_n=a)$ $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε: $|a_n-a|<\varepsilon$ $\forall\ n\geq n_0$.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ:

Θεωρ.: Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε συγκλίνει σε μόνο ένα όριο.

Θεωρ.: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

*Τι σημαίνει ότι $\lim a_n=a$?



ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν $\exists\ m<M$ ώστε $m\leq a_n\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists\ M>0$, ώστε $|a_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Λόγω του ορίου έχουμε: $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ ώστε $|a_n-a|<\varepsilon$, $\forall\ n\geq n_0$

Διαλέγουμε $\varepsilon=1$, τότε $\exists\ n_1\in\mathbb{N}$ $|a_n-a|<1$, $\forall\ n\geq n_1$.

$(|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1)$

$\Leftrightarrow -1<a_n-a<1$, $\forall\ n\geq n_1$

$\Leftrightarrow -1+a<a_n<a+1$, $\forall\ n\geq n_1$

Διαλέγω $m=\min(-1+a, a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ $M=\max(1+a, a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ $m\leq a_n\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$a_n - a \le |a_n - a| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n_1$

$a - a_n \le |a_n - a| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n_1$

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ:

$|a_n| - |a| \le |a_n - a| \le |a_n| + |a|$

ΘΕΩΡ: Έστω οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim b_n = b$

Τότε: 1) Η $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) Η $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

3) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τ.ω. $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim(\lambda a_n) = \lambda \cdot a$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2:

Επειδή η b_n συγκλίνει είναι αυτόματα φραγμένη, έστω $|b_n| \le M$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ θα υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ $\forall\ n \ge n_1$ & $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$ αν $a \neq 0$

Τότε για $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)|$, $n \ge n_0$

Τριγωνική Ανισότητα:

$\le |a_n - a||b_n| + |a|\,|b_n - b|$

$< \frac{\varepsilon}{2M} M + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|}$ $\forall\ n \ge n_0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοιες ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία

τότε η $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε

$$\lim a_n = a \neq 0$$

$$\lim b_n = b$$

και $a_n \neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται και είναι συγκλίνουσα ακολουθία και μάλιστα $\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n} = \frac{b}{a}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Κριτήριο Παρεμβολής - Κριτήριο Συγκλινουσων Ακολουθιών).
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε $a_n \le b_n \le \gamma_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και οι ακολουθίες a_n, γ_n είναι συγκλίνουσες ακολουθίες

$$\lim a_n = \lim \gamma_n = a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής αποδείξτε ότι

$$\lim \frac{3n^2 - 5n + 7}{n^2+1} = 3$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left|\frac{3n^2-5n+7}{n^2+1} - 3\right| = \left|\frac{3n^2-5n+7-3(n^2+1)}{n^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{3n^2-5n+7-3n^2-3}{n^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{-5n+4}{n^2+1}\right|$$

$$\le \frac{5n+4}{n^2+1} \le \frac{5n+4n}{n^2} = \frac{9n}{n^2} = \frac{9}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$|a_n - a| \le \frac{9}{n} \iff -\frac{9}{n} \le \frac{3n^2-5n+7}{n^2+1} - 3 \le \frac{9}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$3 - \frac{9}{n} \le \frac{3n^2-5n+7}{n^2+1} \le 3 + \frac{9}{n}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ / ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ:

$a_n \le b_n \le \gamma_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \ge n_0)$

& $\exists \lim a_n = \lim \gamma_n$

$\Rightarrow \exists \lim b_n$ & $\lim b_n = \lim a_n$

a_n μηδενική $\Leftrightarrow |a_n|$ είναι μηδενική για βρούμε

$0 \le |a_n| \le b_n \quad (\Leftrightarrow -b_n \le a_n \le b_n)$

να βρούμε μια μεγαλύτερη μηδενική ακολουθία.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσες ακολουθίες. Εαν ισχύει $a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \ge n_0) \Rightarrow \lim a_n \le \lim b_n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $a > b$



Αρκεί: $b + \varepsilon < a - \varepsilon$

$0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$

Παρατήρηση: 1) Έστω $a_n < b_n \Rightarrow \frac{a \le b}{\frac{1}{n} < \frac{2}{n}}$

2) Αντίστροφα: αν $\lim a_n < \lim b_n$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, a_n < b_n, \quad n \ge n_0$

Ποιοτικό Αποτέλεσμα:

Θεώρημα: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Έστω $a_1 \le a_n \uparrow$, $a_n \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$

$A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$

$\sup A = \lim a_n \le M$

Εφαρμογή / Παράδειγμα:

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $|a|<1$ η ακολουθία $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$. είναι μηδενική ακολουθία.

Υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Παράδειγμα 1: Αν $a_n = \frac{1}{n}$, τότε οι:

α) $a_{2n} = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

β) $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

γ) $a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

δ) $a_{n+4} = \frac{1}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$

Πρόταση: Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, τότε κάθε υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει $\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = \lim_{n \to +\infty} a_n$

Απόδειξη: Έστω a_n $\lim a_n = a$, ώστε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε

$|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$

Επιλέξαμε N_0 ώστε $k_{N_0} \ge n_0$ και τότε για $n \ge N_0$

$k_n \ge k_{N_0} \ge n_0$

Έχουμε $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα αποδείξουμε ότι η $|a_n| = |a|^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη δενική ακολουθία.

1ος τρόπος: Θα αποδείξω αρχικά ότι η $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Πράγμα $|a|^n - |a|^{n+1} = |a|^n(1-|a|) \geq 0$

$\Rightarrow |a|^n \downarrow$ όμως επειδή $0 \leq |a|^n \leq |a|$, προκύπτει ότι είναι φθίνουσα επειδή.

Άλλο το θεώρημα προκύπτει ότι $\exists \lim_{n\to+\infty} |a|^n = x$

Παρατηρούμε ότι: $b_n = |a|^n$, τότε

$$b_{n+1} = |a|\, b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (|a|\, b_n) = |a| \lim_{n\to+\infty} b_n = |a|x$$

$$x = |a|x \Leftrightarrow x(1-|a|) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

2ος τρόπος:

{ Bernulli
$(1+a)^n \geq 1+na \quad n \in \mathbb{N},\ a > -1$
$\left(\frac{1}{a}\right)^n \geq \frac{1}{n}$ }

Επειδή $|a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1$ άρα

$\frac{1}{|a|} = 1+\theta$ με $\theta > 0$

Αν. Bernulli

Οπότε $\frac{1}{|a|^n} = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta > 0$

$$\Rightarrow |a|^n \leq \frac{1}{1+n\theta} \leq \frac{1/\theta}{n}$$

$\Rightarrow |a|^n$ είναι μηδενική ακολουθία.

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η ακολουθία $a_{1}=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η a_n είναι αυξουσα ακολουθία και βρείτε το όριο αυτής.

Θα αποδείξουμε ότι η a_n ↑, δηλαδή $a_{n+1}>a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$a_n>2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$a_1=1$

$a_2=\sqrt{2}$

$a_3=\sqrt{2\sqrt{2}}$

Θα χρησιμοποιήσουμε **Μαθηματική Επαγωγή**:

Για $n=1$, θα αποδείξουμε ότι:

$a_2>a_1 \Leftrightarrow \sqrt{2}>1$

$a_1<2 \Leftrightarrow 1<2$ αληθής ευθύς

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ δηλαδή

$a_{k+1}>a_k$

$a_k<2$

και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=k+1$ δηλαδή

$a_{k+2}>a_k$

$a_k<2$

$a_{k+1}>a_k \Rightarrow 2a_{k+1}>2a_k$

$\Rightarrow \sqrt{2a_{k+1}}>\sqrt{2a_k}$

$\Leftrightarrow a_{k+2}>a_{k+1}$

$a_k<2>1$ $\quad 2a_k<2^2 \Rightarrow 2a_k<\sqrt{2}^2$

$\Rightarrow a_{k+1}<2$

Εισαγουμε e :

$$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Για τη ν ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αρχικοποιημένη ακολουθία
$(a_n=(1+\frac{1}{n})^n \quad a_n=2$

$a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{64}{27}>\frac{9}{4} \Leftrightarrow 4\cdot 64>9\cdot 27$

$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$ $\qquad \Leftrightarrow 256>243$)

Θα αποδείξουμε ότι η $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή,

$\forall\, n\in\mathbb{N} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n>\frac{n+1}{n+2} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$

Bernulli: $(1+x)^n\geq 1+nx$

$1+x=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Leftrightarrow x=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}-1$

$=-\frac{1}{(n+1)^2}$

Αν Bernulli: $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\geq 1+n\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$=\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}$

$=\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$ αρκεί $\boxed{\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}>\frac{n+1}{n+2}}$

$(n+2)(n^2+n+1)>(n+1)^3 \Leftrightarrow \underbrace{n^3+n^2+n}\ 2n^2+2n+2>n^3+3n^2+3n+1$

$\Leftrightarrow n^3+3n^2+3n+2>n^3+3n^2+3n+1$

Αληθεύει.

Άνω φράγμα της $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ΣΚΕΨΕΙΣ: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le M \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \ln$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \ge \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \ge \frac{1}{3}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n = 1$

Β) $\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n \ge 1-\frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+n}$

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1+x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$(1+x)^n = 1+nx$$
$$x \geq 0$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (1^n)

Θέτουμε $\sqrt[2n]{n} = 1+\vartheta_n, \quad \vartheta_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (\sqrt[2n]{n})^n = (1+\vartheta_n)^n \geq n+n\vartheta_n$$

$$\sqrt{n} \geq 1+n\vartheta_n \geq n\vartheta_n$$

$$\Rightarrow \vartheta_n < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad 0 \leq \vartheta_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt[2n]{n} = 1+\vartheta_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+\vartheta_n)^2$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = 1+2\vartheta_n+\vartheta_n^2 \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

Από κριτήριο παρεμβολής, αφού $1 = \lim\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (2^n)

$$\sqrt[n]{n} = 1+k_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = (1+k_n)^n \qquad 0 \leq k_n$$

Στόχος απο φράγμα - ανισότητα αποδεικτέα, όμως για $x \geq 0$ έχουμε $n \in \mathbb{N}$
$(n+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

οπότε $n = (1+k_n)^n \geq 1+nk_n+\frac{n(n-1)}{2}k_n^2 >$

* Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ είναι απο φραγμένη *.
(Ξανά απόδειξη)

ΠΡΟΧΕΙΡΟ:

Bernulli: $(1+x)^n \geq 1+nx \qquad n\in\mathbb{N},\ 1+x>0$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq M$

$\Updownarrow$

$\left(\frac{n}{1+n}\right)^n \geq \frac{1}{m}$

$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq \frac{1}{m}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1+n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n = \left(1 - \underbrace{\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{x}\right)^n \geq 1 - \frac{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= 1 - \frac{n\left(\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= 1 - \frac{(n+1-n)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= 1 - \frac{n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)-n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{n+1+\sqrt{n(n+1)}-n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \geq \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{n(n+1)} \geq n+1+\sqrt{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} \geq n-1$

διότι $\sqrt{n(n+1)} \geq \sqrt{n^2} = n > n-1$

Εισαγόμενος,

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = l$ & $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} = l$

Τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και μάλιστα $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή $a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon)$ ώστε

$$|a_{2n-1} - l| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_1$$

Αντίστοιχα επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} = l$

Άρα υπάρχει $n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_{2n-1} - l| < \varepsilon, \quad \forall\, 2n-1 \geq 2n_2 - 1$$

* Εισαγόμενος n_0 να είναι το μέγιστο $(n_0 = \max)\,(2n_1, 2n_2-1)$, έχουμε

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

⊛ Διευρύναμε την υπερίσχυση:

$n = 2m \geq 2n_1 \Leftrightarrow m \geq n_1$

$|a_{2m} - l| < \varepsilon$

$n = 2m-1 \geq 2n_2 - 1 \Leftrightarrow m \geq n_2$

$\Rightarrow |a_{2n-1} - l| < \varepsilon$, $\forall\, m \geq n_2$

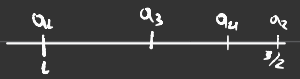
ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{3n-2} = l$ τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω η αναδρομική ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνεται από $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η a_n συγκλίνει και βρείτε $\lim a_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα αποδείξαμε αρχικά ότι
$(*)$ $1 \le a_n \le \frac{3}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
το οποίο θα αποδείξαμε με **επαγωγή**
Αποδεικνύουμε την $(*)$ για $n=1$.
Πράγματι $1 \le \underset{\parallel}{a_1} \le \frac{3}{2}$ ισχύει.
1

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι αληθεύει για $n=k \in \mathbb{N}$ δηλαδή $1 \le a_k \le \frac{3}{2}$
και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για $n = k+1$
δηλ. $1 \le a_{n+1} \le \frac{3}{2}$
Όμως $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_k}$
και επειδή $1 \le a_k \le \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \le 1+a_k \le \frac{3}{2}$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{1+a_k} \ge \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3}{2} \ge 1 + \frac{1}{1+a_k} \ge 1 + \frac{2}{5}$
$\Rightarrow \frac{3}{2} \ge a_{k+1} \ge 1$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ:



Θα αποδείξουμε ότι $a_{2n+2} \le a_{2n}$

$a_{2n+1} \ge a_{2n-1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Πράγματι για $n=1$: $a_4 \le a_2$

$\frac{13}{12} \quad \frac{3}{2}$

$a_3 \ge a_1$

$7/3 \ge 1$ ✓

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$ δηλ:

$a_{2k+2} \le a_{2k}$

$a_{2k+1} \ge a_{2k-1}$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει έπειτα για $n=k+1$ δηλ

$a_{2k+4} \le a_{2k+2}$

$a_{2k+3} \ge a_{2k+1}$

& $a_{k+1} = 1 + \frac{1}{1+a_{k+1}} = \frac{2+a_k}{1+a_k}$ $a_{k+2} = f(a_k)$?

Έχουμε $a_{k+2} = 1 + \frac{1}{1+a_{k+1}}$

$= 1 + \frac{1}{1+\frac{2+a_k}{1+a_k}} = 1 + \frac{1+a_k}{3+2a_k}$

$a_{2k+2} \le a_{2k}$

$\Downarrow$

$a_{2k+4} \le a_{2k+2} \iff 1 + \frac{1+a_{2k+2}}{3+2a_{2k+2}} \le 1 + \frac{1+a_{2k}}{3+2a_{2k}}$

$\iff (1+a_{2k+2})(3+2a_{2k}) \le (1+a_{2k})(3+2a_{2k+2})$

$\iff 3 + 2a_{2k} + 3a_{2k+2} + 2a_{2k}a_{2k+2} \le 3 + 2a_{2k+2} + 3a_{2k} + 2a_{2k}a_{2k+2}$

$\iff 3a_{2k+2} - 2a_{2k+2} \le 3a_{2k} - 2a_{2k}$

$\iff a_{2k+2} \le a_{2k}$

Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι $a_{2n-1} \uparrow$.

Επομένως οι ακολουθίες a_{2n}, a_{n-1} είναι συγκλίνουσες ακολουθίες

Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = x$ αναδρομική σχέση

$$\left(a_{k+2} = 1 + \frac{1+a_k}{3+2a_k}\right) \Rightarrow a_{2n+2} = 1 + \frac{3a_{2n}}{3+2a_{2n}}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Τι σημαίνει $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\lim a_n = l$

$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$|a_n - l| < \varepsilon\ ,\ \forall\ n \geq n_0$

⊛ Πότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$a_n > \frac{1}{\varepsilon}\ ,\ \forall\ n \geq n_0$

Αντίστοιχα $\lim a_n = -\infty$ $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$: $a_n < -\frac{1}{\varepsilon}\ ,\ n \geq n_0$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ:

$b_n \leq a_n \leq \gamma_n\ ,\ n \geq n_1$

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \qquad \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n$

$\Rightarrow \exists \lim a_n$ & μάλιστα $a_n = \lim \gamma_n$

Αντίστοιχα κριτήριο παρεμβολής για $\lim a_n = +\infty$.

Έστω ότι $b_n \leq a_n \quad n \geq n_1$

και $\lim b_n = +\infty$

Τότε $\lim a_n = +\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n+1}\right) = +\infty$ διότι $\frac{n^2+1}{2n+1} \geq \boxed{\frac{n}{4}} \Leftrightarrow 4(n^2+1) \geq n(2n+1)$

$\Leftrightarrow 4n^2+4 \geq 2n^2+n$

$\Leftrightarrow 2n^2 - n + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow n^2 + \underbrace{n^2 - n}_{\geq 0} + 4 \geq 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$

$\left(\frac{n}{4} < \frac{n}{2}\right)$ σημαίνει ότι τόσο όσο και η άλλη σημαίνει

Γιατί $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{4} = +\infty$,

διότι $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon}\ ,\ \forall\ n \geq n_0 \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}\ \forall n \geq n_0$

Επιλέγουμε $n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$

Τότε για $n \geq n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ n \geq n_0$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

$f: A \longrightarrow B$

A: Π.Ο B: Π.Τ

D_f: Πεδίο ορισμού της f.

$\forall a \in A \quad a \longrightarrow f(a)$

R_f: Πεδίο τιμών της f

$R_f = \{f(a), \forall a \in A\}$ σύνολο τιμών

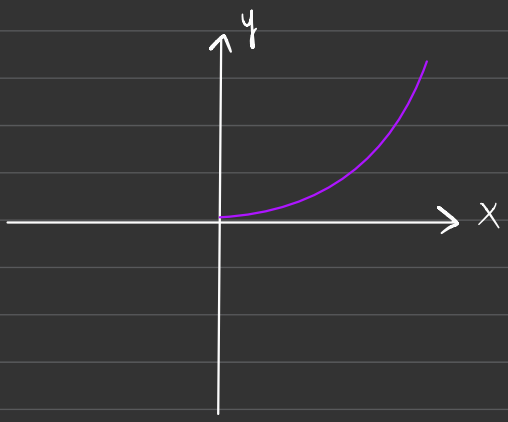
$f: [0, +\infty) \longrightarrow$ να έχει τύπο

↳ $f(x) = x^2 \quad x \in [1, +\infty)$

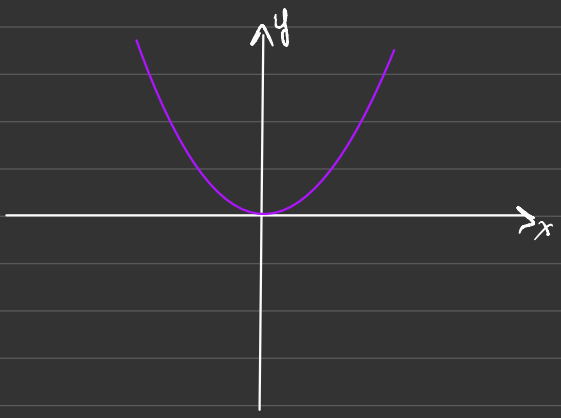
$D_f = [1, +\infty)$

$R_f = [0, +\infty)$ (διότι αν εισάγω έναν τυχαίο αριθμό στο ΣΤ μπορεί $f(x) = y$.

$y = x^2 \begin{cases} \nearrow x = \sqrt{y} \\ \searrow x = -\sqrt{y} \text{ Απορ.} \end{cases}$



$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με κανόνα $g(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$



ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$f: A \to B$

$g: \Gamma \to \Delta$
R_g

Πότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$?

$f \circ g: \chi \to y$
$\Gamma \to B$

$R_g \subseteq A$ $\Gamma\Delta \subseteq A$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\forall x \in \Gamma$

Αντίστροφη συνάρτηση:

Έστω $f: A \to B$, πότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση?

f^{-1} $B \to A$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Μόνο όταν η f είναι 1-1 & επί.

⊛ Πότε είναι 1-1?

Όταν $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A$

Όταν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

⊛ Πότε είναι επί?

$\forall\, y \in B \Rightarrow \exists\, x \in A$ ώστε $f(x)=y$.

$f^{-1}(f(x))=x \quad \forall x \in A$ } ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ.
$f(f^{-1}(y))=y \quad \forall y \in B$ }

Έστω $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$

Πότε $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$?

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

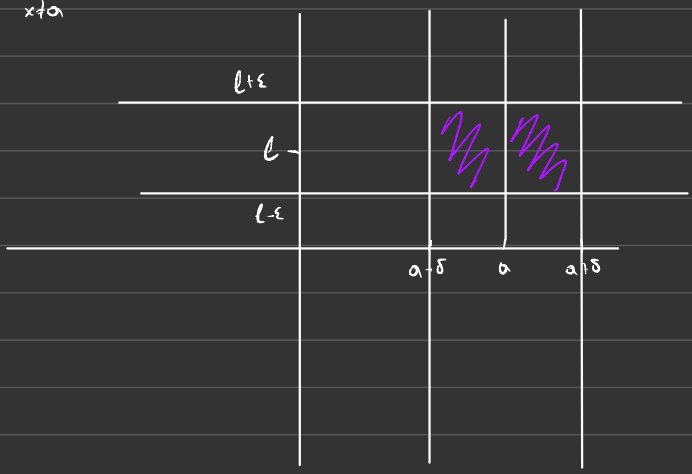
$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-\ell < \varepsilon$

$\Rightarrow \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$-\delta < x-a < \delta$

$a-\delta < x < a+\delta$

$x \neq a$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

Θα αποδείξαμε ότι δοθέντος του $\varepsilon>0$, το $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ικανοποιεί ότι: $0<|x-1|<\delta$ τότε $|f(x)-1|<\varepsilon$

Πράγματι: $|f(x)-1| = \frac{|x-1|}{|x|}$

άρα $|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

$x>\frac{1}{2} \quad 0<\frac{1}{x}<2$

$|f(x)-1| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1| < 2\delta \le 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ΣΚΕΨΕΙΣ:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta \quad |f(x)-1|<\varepsilon$

$0<|x-1|<\delta_1 \quad \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon$

$\Updownarrow \quad \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|<\varepsilon$

$-\delta_1 < x-1 < \delta_1$

$1-\delta_1 < x < \delta_1 \quad \Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{2} \le 1-\delta_1 < x < 1+\delta_1$

Διαλέγω αρχικά $\delta_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \Rightarrow 2>\frac{1}{x}>\frac{2}{3}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Πότε $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) = e$?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν $\exists \varepsilon_0>0$ ώστε $\forall \delta>0 \ \exists x \quad 0<|x-a|<a$ τέτοιο ώστε $|f(x)-\ell| \ge \varepsilon_0$

Η βολική επιλογή του $\delta = \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$0<|x_n-a|<\frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \& \quad |f(x_n)-\ell| \ge \varepsilon_0$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΟΡΙΩΝ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$

$g \in \mathbb{R}$

Τότε η gf έχει όριο

Τι είναι το όριο συνάρτησης:

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

* Πότε $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$?

Απ: Όταν $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$\forall\ 0 < |x - a| < \delta$ ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

* Πότε $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell$?

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$|a_n - \ell| < \varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0$

* Πότε δεν είναι $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ x$, $0 < |x - a| < \delta$

τέτοιο ώστε: $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$

Εφαρμόζοντας $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ $\exists\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$

τέτοια ώστε

$|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ και για κάθε δεν υπάρχει;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι:

α) $\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ και στη συνέχεια ότι αν $a \in \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

β) τότε $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

α) Θα κάνουμε χρήση του ορισμού του ορίου.

Ειδικότερα για $\varepsilon > 0$, θα βρούμε $\delta > 0$.

$0 < |x-0| < \delta$, έχουμε $|f(x)-0| < \varepsilon$

Ειδικότερα η επιλογή $\delta = \varepsilon$ έχει την ιδιότητα

$x \in \mathbb{Q}$, $0 < |x| < \delta (= \varepsilon)$

τότε $|f(x)-0| > |x-0| > |x| < \varepsilon$

αν $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, για $\alpha < |x| < \delta > (\varepsilon)$

τότε $|f(x)-0| > |0-0) = \alpha < \varepsilon$



β) Αν $a \in \mathbb{R}$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

→ αν επιλέξουμε $x \in \mathbb{Q}$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

είναι αν επιλέξουμε $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| = |0 - \ell| < \varepsilon$

$0 < |x| < \delta$, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Πρέπει $|\ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell = 0$.

Όμως αν $x \in \mathbb{Q}$ $\alpha < |x-a| < \delta$

τότε θα έπρεπε $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Πότε $\nexists$ το όριο $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$

Όταν $\exists$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιοι ώστε $0 < |x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, $0 < |y_n - \alpha| < \frac{1}{n}$

αλλά $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = l$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = m$ με $l \neq m$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: (Συνάρτηση Dirichlet)

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

είναι τέτοια ώστε, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\nexists \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ: (Αμφιβώς αντίστοιχες των ιδιοτήτων ορίων ακολουθιών)

ΘΕΩΡΗΜΑ: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

ii) $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\neq a\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $\lim x_n=a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Πότε η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a\in\mathbb{R}$;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Όταν $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon,a)>0$:

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Η συνάρτηση $f:\{0\}\cup[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} l, & x\geq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής (σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού).

Τότε η $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορίζεται και είναι πάλι συνεχής συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Θα αποδείξουμε ότι $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n)=(g\circ f)(a)$

Όμως $(g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))$

Λόγω της συνέχειας της f στο a έχουμε $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$

Αντίστοιχα της g στο $f(a)$, έχουμε:

↳ $(z_n)\xrightarrow{n\to\infty} f(a)$

↳ $g(z_n)\xrightarrow{n\to\infty} g(f(a))$

Επιλέξαμε: $z_n=y_n=f(a)$

ώστε $g(f(x_n))\xrightarrow{n\to\infty} g(f(a))$

$\downarrow$ $\qquad$ $\parallel$

$(g\circ f)(x_n)$ $\qquad$ $(g\circ f)(a)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano:



Έστω $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε είναι τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ τότε $\exists\, \xi \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω $f:[0,2] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση.

και $g:[0,2] \to [0,1]$ συνεχής τέτοια ώστε

$g(0) = 0$, $g(2) = 1$

τότε $\exists\, \xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε

$f(\xi) = g(\xi)$.

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

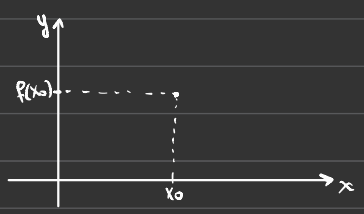
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μονότον. Έστω $f\uparrow$ τότε, $\forall\, x_0\in(a,b)$ υπάρχουν τα μονόπλευρα όρια.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$x<x_0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\le f(x_0)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\ge f(x_0)$





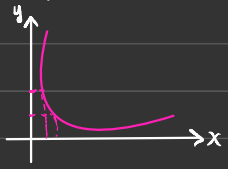
Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ a, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

$-1\le a\le 1$

Αν $a\in(-1,1)$ τότε η f είναι συνεχής στο 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad x\in(0,1)$

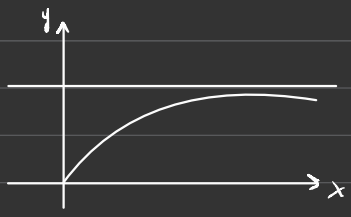


ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή $\exists\ m,n\in\mathbb{R}$, ώστε:
$m\le f(x)\le M$, $\forall\, x\in[a,b]$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε η f παίρνει μέγιστη & ελάχιστη τιμή. Δηλαδή $\exists\ x_1,x_2\in[a,b]$ τέτοια ώστε $\forall\, x\in[a,b]$
$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$

Έστω $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ φραγμένη

$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ φραγμένη



ΘΕΩΡΗΜΑ (Ενδιάμεσων Τιμών):

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $f(a) < f(b)$, τότε $\forall\ l \in (f(a), f(b))$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = l$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η απεικόνιση $g=[a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - l$ ικανοποιεί την υποθέσεις του Θ.Bolzano: $g(a) = f(a) - l < 0$

$g(b) = f(b) - l > 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ μονότονη και συνεχής τότε το σύνολο τιμών $R_f = \{ f(x),\ \forall\ x \in [a,b] \}$

Είναι το διάστημα των οποίων τα $f(a)$, $f(b)$.

Ειδικότερα, αν $f \uparrow$ τότε $R_f = [f(a), f(b)]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι 1-1. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι γνησίως μονότονη (έστω $f \uparrow$), τότε $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$ είναι συνεχής συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ:

1) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε f^3 είναι συνεχής συνάρτηση. Είναι η συνάρτηση f συνεχής;

2) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε f^2 είναι συνεχής. Είναι η f αναγκαστικά. Ποια είναι το σκεπτικό αυτού του ερωτήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

Μάλιστα $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Ισχυριζόμαι ότι η $|f|$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$|x|=\sqrt{x^2}$

Η $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής αφού $|f(x)|=g(f^2(x))$

1) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής: $=\sqrt{f^2(x)}$

Η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=x^{1/3}=(\sqrt[3]{x})$ είναι συνεχής συνάρτηση και

$$f(x)=(h\circ f^3)(x)=h(f^3(x))=\sqrt[3]{f^3(x)}$$

Η σύνθεση της h με την f^3 (είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) είναι συνεχής συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f:[a,b]\to[\gamma,\delta]$ συνεχής και

$g:[a,b]\to[\gamma,\delta]$ συνεχής

Επιπρόσθετα $g(a)=\gamma$ & $g(b)=\delta$. Τότε $\exists\ \xi\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αν $f(a)=g(a)$ είτε $g(b)=f(b)$ η ισότητα είναι εμφανή.

Ουσιαστικά έστω χωρίς $f(a)>g(a)$ και $f(b)<g(b)$

Τότε η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$h(x)=f(x)-g(x)\quad x\in[a,b]$$

Είναι συνεχής και επιπρόσθετα

$$\left.\begin{aligned}h(a)&=f(a)-g(a)>0\\ h(b)&=f(b)-g(b)<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(a)\,h(b)<0$$

Άρα Θ. Bolzano $\exists\ \xi\in(a,b): h(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=g(\xi)$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Να αποδειχτεί ότι κάθε θετικός αριθμός, έχει θετική τετραγωνική ρίζα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\theta>0$ τότε θα αποδείξουμε ότι $\exists\ x>0$ ώστε $x^2=\theta$

Αυτό θα το αποδείξουμε με τη χρήση θ. Bolzano.

Ειδικότερα θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-\theta$, που $\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Επιπρόσθετα $f(0)=-\theta<0$.

$f(1+\theta)=(1+\theta)^2-\theta=\theta^2+\theta+1$

$=(\theta+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

Οπότε από θ. Bolzano $\exists\ x\in(0,1+\theta)$ που λύνει την εξίσωση $f(\xi)=\xi^2-\theta=0$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ:

Έστω $\theta>0$, τότε $\exists\ x>0$ με την ιδιότητα $x^2=\theta$.

$\theta+1$

$f(\theta+1)=(\theta+1)^2-\theta$

$=\theta^2+2\theta+1-\theta$

$=\theta^2+\theta+1>0$

$f(2\theta)=4\theta^2-\theta$

$=\theta(4\theta-1)$

i) $\theta>\frac{1}{2}$

ii) $\theta<\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\theta>0$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο a?

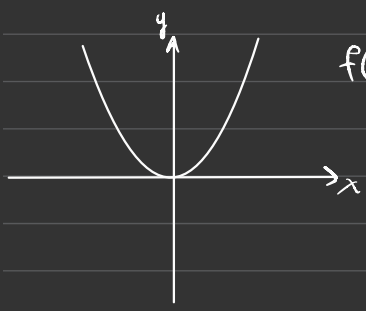
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

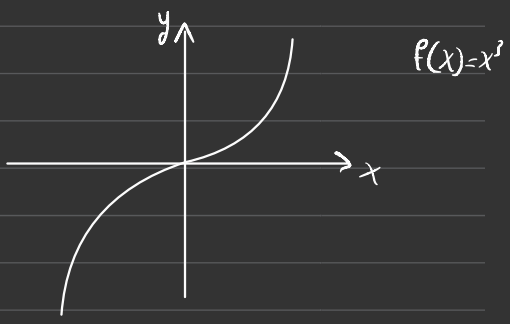
Όταν $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} := f'(a)$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{}$

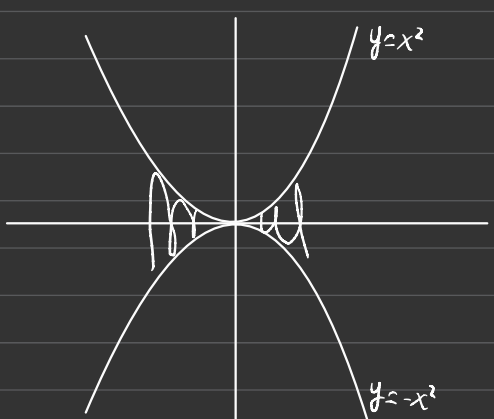
* Ρυθμός Μεταβολής $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ *

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ:





* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Ορισμός:

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Όταν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε,

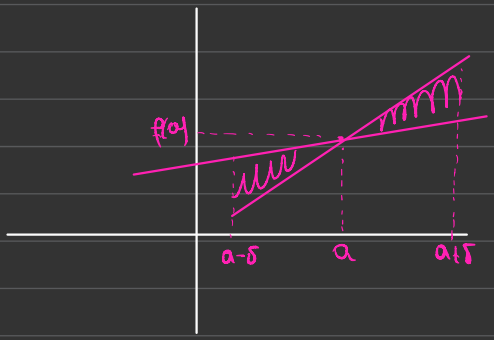
$\forall \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} \right| < \varepsilon \iff |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| < \varepsilon |x-a|$$

$$\iff -\varepsilon |x-a| < f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) < \varepsilon |x-a|$$

$$\iff f(a)+f'(a)(x-a)-\varepsilon|x-a| < f(x) < f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon|x-a|$$

i) $a < x < a+\delta \Rightarrow f(a)+(f'(a)-\varepsilon)(x-a) < f(x) < (f'(a)+\varepsilon)(x-a)$



$|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$

$|x| = |x+y-y| \le |x+y|+|y|$

Θεώρημα 1:

Αν f παραγωγίσιμη στο a, τότε η f είναι συνεχής στο a δηλ. $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

Τριγωνική Ανισότητα $|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$

$$\Rightarrow |f(x)-f(a)|-|f'(a)(x-a)| \le |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| < c|x-a|$$

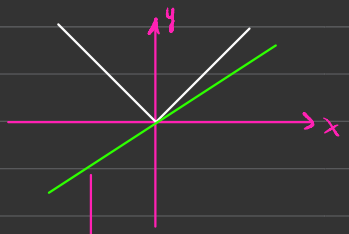
$$\Rightarrow |f(x)-f(a)| < (\varepsilon + |f'(a)|)\,|x-a|$$

$\Rightarrow f(x)=|x|$, $x \in \mathbb{R}$, δεν παραγωγίζεται στο 0. $f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

ΠΛΕΥΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Η ευθεία που να εφάπτεται και στις δύο μερίες

$-1 < l < 1$

$y = lx$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f παραγωγίζεται στο ξ όταν

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} := f'(\xi) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : 0 < |x-\xi| < \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi) \right| < \varepsilon$$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να είναι παραγωγίσιμες στο ξ.

(i) Τότε $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda f)'(\xi) = \lambda \cdot f'(\xi)$

(iii) Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $(fg)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) g'(\xi)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)g(x)-f(\xi)\cdot g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(\xi)\cdot g(x) - f(\xi) g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= g(x) \frac{(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} + f(\xi) \frac{(g(x)-g(\xi))}{x-\xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{(fg)(x)-(fg)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} \left(g(x) \cdot \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \right) + \lim_{x \to \xi} f(\xi) \frac{(g(x)-g(\xi))}{x-\xi}$$

$$= \lim_{x \to \xi} g(x) \cdot \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + f(\xi) \cdot \lim_{x \to \xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= g(\xi) \cdot f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

* Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ. Θέλουμε να μελετήσουμε για την $\frac{1}{g}$.

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι $g(\xi) \neq 0$.

Αρχικά από την παραγωγισιμότητα της g στο ξ προκύπτει ότι η g είναι συνεχής στο ξ. Οπότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$0 < |x - \xi| < \delta, \quad |g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < g(x) - g(\xi) < \varepsilon \Rightarrow g(\xi) - \varepsilon < g(x) < g(\xi) + \varepsilon$$

(i) Έστω $g(\xi) > 0$

$$g(\xi) - \varepsilon = \frac{g(\xi)}{2} \iff \varepsilon = \frac{g(\xi)}{2}$$

Επιλέγεται $\varepsilon = \frac{g(\xi)}{2} > 0$ τότε $\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta$

$$0 < \frac{g(\xi)}{2} < g(x) < \frac{3g(\xi)}{2}$$

(ii) Αντίστοιχα, $\varepsilon = -\frac{g(\xi)}{2} > 0$, τότε $\exists \delta_1 > 0 : g(x) < \frac{g(\xi)}{2} < 0 : 0 < |x - \xi| < \delta_2$

Επομένως $\exists \delta > 0 : |x - \xi| < \delta \iff g(x) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ ορίζεται και στο $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ και τότε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$

τότε:

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(\xi)}{x - \xi} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\xi)}}{x - \xi}$$

$$= \frac{g(\xi) - g(x)}{g(x) \cdot g(\xi)(x - \xi)}$$

$$= \frac{-1}{g(x) \cdot g(\xi)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(\xi)}{x - \xi} = -\lim_{x \to \xi} \frac{1}{g(x) \cdot g(\xi)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$= -\frac{1}{g(\xi)} \cdot \lim_{x \to \xi} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \to \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$= \frac{1}{g^2(\xi)} \cdot g'(\xi)$$

$$= \frac{-g'(\xi)}{g^2(\xi)}$$

* Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ με $g(\xi) \neq 0$, τότε.
$\exists\, \delta > 0 : \frac{f}{g} (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ να ορίζεται
Ώστε η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με: $\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κανόνας Αλυσίδα):

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ και $g : (f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \to \mathbb{R}$, $\exists\, \delta > 0$
$(f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \subseteq B_f = F(R)$ με g να παραγωγίζεται στο $f(\xi)$
$\exists\, \delta > 0$:
Τότε $g \circ f : (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1) \to \mathbb{R}$ να ορίζεται
Είναι μάλιστα παραγωγίσιμη στο ξ με $(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ορίζουμε τη συνάρτηση $G : (f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \to \mathbb{R}$
με τύπο: $G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(\xi))}{y - f(\xi)}, & y \neq f(\xi) \\ g'(f(\xi)) \end{cases}$

Η G είναι συνεχής στο $y = f(\xi)$ επειδή η g παραγωγίζεται $y = f(\xi)$
$\Rightarrow g(y) - g(f(\xi)) = G(y) \cdot (y - f(\xi))$
για $y = f(x)$, $0 < |x - \xi| < \delta$
$g(f(x)) - g(f(\xi)) = G(f(x)) \cdot (f(x) - f(\xi))$
$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{G(f(x))(f(x) - f(\xi))}{x - \xi}$$

και εφόσον

$$\lim_{x \to \xi} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} G(f(x)) \cdot \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω f αύξουσα $f:[a,\beta]\to[f(a),f(\beta)]$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\xi\in(a,\beta)$

Τότε η $f^{-1}:[f(a),f(\beta)]\to[a,\beta]$ ορίζεται:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(\xi))}{y-f(\xi)}$$

$$y=f(x)\Leftrightarrow \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}=\frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)}$$

$$=\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

ΣΚΕΨΕΙΣ: $f:x\to f(x)$

$f^{-1}\circ f=1_x \quad f^{-1}(f(x))=x$

$f\circ f^{-1}=1_{f(x)}$

$[f^{-1}(f(x))]'=1$

$(f^{-1})'(f(\xi))\cdot f(\xi)=1$

$$\lim_{y\to f(\xi)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(\xi))}{y-f(\xi)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}=\frac{1}{f(\xi)}$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=e^x+1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι 1-1 και επ. Μάλιστα $f^{-1}:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in(1,+\infty)$ με $(f^{-1})'(x)=;$

$y=e^x+1\Leftrightarrow e^x=y-1\Leftrightarrow \ln(y-1)$

$f^{-1}(y)=\ln(y-1)$, $y>0$

$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{y-1}\cdot 1=\frac{1}{y-1}\quad y>1$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Παρατηρούμε ότι η f παραγωγίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα $f'(x) = e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα τε η $f^{-1}: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Αν $f(x) = y \Rightarrow f'(x) = e^x$, $e^x + 1 = y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y-1} \quad , \ y > 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f: \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ με τύπο $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι η $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη διότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και επειδή $f'(x) = e^x + 1 > 0$ $(f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$.

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση $f^3(x) + f(x)$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι η f παραγωγίσιμη συνάρτηση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Θέτουμε $g(x) = f^3(x) + f(x)$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη.

$$= G(f(x)) = (G \circ f)(x)$$

με $G(y) = y^3 + y$, $y \in \mathbb{R}$

$$g(x) = (G \circ f)(x) \Leftrightarrow (G \circ f)^{-1}(x) = \underbrace{G^{-1}}_{f(x)} (G \circ f)(x)$$

$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί, είναι παραγωγίσιμη με $G'(y) = 3y^2 + 1 > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow G^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

Άρα σ. σύνθεσης: $f = G^{-1} \circ f$ είναι παραγωγίσιμη.

Θ. (ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ):

f παραγωγίσιμη στο ξ
g παραγωγίσιμη στο $f(\xi)$
$\Rightarrow$ $g \circ f$ παραγωγίσιμη στο ξ

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν $f:[a,b] \to \Gamma$, 1-1, επί, συνεχής, παραγωγίσιμη στο $\xi \in (a,b)$ με $f'(\xi) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ $\Gamma \to (a,b)$ παραγωγίσιμη $f(\xi)$ και μάλιστα

$$(f^{-1})'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

e^x $x \in \mathbb{R}$, $\cos x$ $x \in \mathbb{R}$, $\sin x$ $x \in \mathbb{R}$, $\tan x$ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

x^a $x \geq 0$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\log x$ $x > 0$, a^x $a > 0$

$(e^x)' = e^x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \left(= \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Τύποι Euler:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$(e^{\sin x^2})' = e^{\sin x^2} (\sin x^2)'$

$= e^{\sin x^2} \cdot (\cos (x^2)')$

$= 2x \cos x \cdot e^{\sin x^2}$

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ:

Θεώρημα Fermat:

Τοπική ακρότατα $\xi \in (a,b)$

Είναι τοπικό μέγιστο

$\exists\ \delta>0:\ (\xi-\delta,\ \xi+\delta)$ $\quad f(\xi) \geq f(x)\ ,\ \forall\ x \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$

Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ το a είναι τοπικό μέγιστο αν $\exists\ \delta>0, [a, a+\delta]$

$f(a) \to f(x)\ \ \forall\ x \in [a,\ a+\delta]$

(α) Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $\xi \in (a,b)$ τοπικό ακρότατο της f.
Εαν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε $f'(\xi)=0$.

(β) Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ και το a είναι τοπικό ελάχιστο της f με f παραγωγίσιμη στο a. Τότε $f'(a) \geq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (α):

Επειδή ξ είναι τοπικό ακρότατο (έστω μέγιστο) $\exists\ \delta>0$:

$(\xi-\delta) \subseteq (a,b)$ και ισχύει

$f(\xi) \geq f(x)\ ,\ \forall\ x \in (\xi-\delta,\ \xi+\delta)$

$\Rightarrow f(x)-f(\xi) \leq 0$

(i) $\xi-\delta < x < \xi \Rightarrow x-\xi<0$

$\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^-} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$



(ii) $\xi < x < \xi+\delta \Rightarrow x-\xi>0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^+} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \iff f'(\xi) \leq 0$

Απόδειξη (Β):

$\exists\ \delta>0 : [a, a+\delta] \subseteq [a,b] \Rightarrow f'(\xi)=0$

$f(a) \le f(x) \quad \forall\ x \in (a, a+\delta)$

$\Rightarrow f(x)-f(a) \ge 0 \quad x-a>0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$

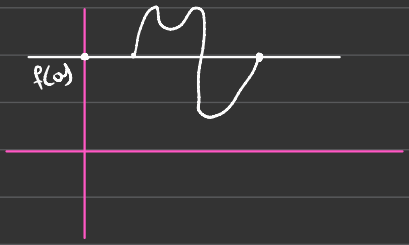
$\Rightarrow f'(a) \ge 0$

Θεώρημα Rolle:

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και ισχύει ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b)
- $f(a)=f(b)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (a,b)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.



Θ.Μ.Τ (Lagrange):

Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- Η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,β)

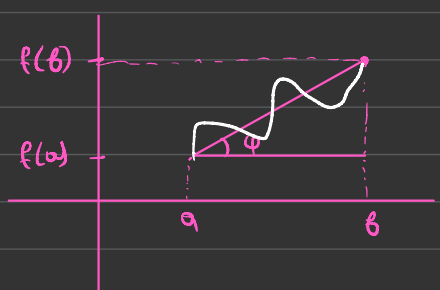
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$

$$\left((f(\beta)-f(a))=f'(\xi)(\beta-a)\Rightarrow\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}=\frac{f'(\xi)\cdot(\beta-a)}{\beta-a}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}\right)$$

Υποδειξη: Η $g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=(f(\beta)-f(a))x-f(x)(\beta-a)$

$g(a)=g(\beta)\Rightarrow\exists\ \xi\in(a,\beta):g'(\xi)=0$

Γεωμετρική Ερμηνεία:



$$\tan\varphi=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$$

Θεώρημα Cauchy:

Έστω $f,g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο (a,β).

Τότε $\exists\ \xi\in(a,\beta)$ $(f(\beta)-f(a))g'(\xi)=(g(\beta)-g(a))f'(\xi)$

Απόδειξη:

Η $h:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο $(f(\beta)-f(a))g(x)-(g(\beta)-g(a))f(x)$

ικανοποιεί την υπόθεση $h(a)=(f(\beta)-f(a))g(a)-(g(\beta)-g(a))f(a)=g(\beta)$//

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

Αποδείξτε ότι $\exists\,(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$ που είναι τέτοια ώστε

$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n f'(\xi_n)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θ.Μ.Τ: $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$ $\quad\xi\in(\alpha,\beta)$

Έστω $\beta=2n$, $\alpha=n$ $\quad n\in\mathbb{N}$

$\xi\in(n,2n)$

$f'(2n)-f(n)=f'(\xi_n)n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(f(2n)-f(n))=\lim\limits_{n\to+\infty} f'(\xi_n)n$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)-\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$

$\Rightarrow \exists\ \xi_n,\ n<\xi_n<2n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$

Τέτοια ώστε

$\lim\limits_{n\to\infty} n f'(\xi_n)=0$

Όμως $n|f'(\xi)|\le\xi_t|f'(\xi_n)|\le 2n|f'(\xi_n)|$

$\Rightarrow$ υπάρχει ώστε εμβόλιος $\lim\limits_{n\to\infty}\xi|f'(\xi_n)|=0\iff\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n f'(\xi_n)=0$