

Ανεξαρτηστικός Λογισμός 1 - Calculus 1

$\mathbb{R}$ (real numbers) Οι πραγματικοί αριθμοί

$\mathbb{N}$ $0 \in \mathbb{N}$ Φυσικοί αριθμοί $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ Ακέραιοι $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$

$\mathbb{Q}$ Ρητοί $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{I}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ Αρρητών αριθμών

Σύνολα $A \subseteq \mathbb{R}$

$\emptyset$ κενό σύνολο

$A = \mathbb{N}$

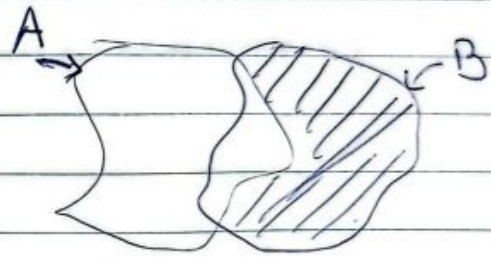
$A = \{0, 1, -1\}$

$A \subseteq B$ (αληθής υποσύνολο του B) (αληθής υποσύνολο του B)

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$
πρέπει

$(B-A)$ ή $(B-A)$

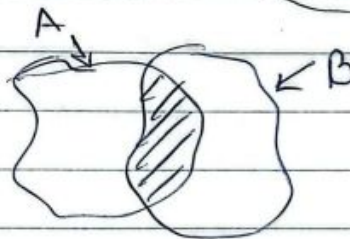
τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο σύνολο A



τομή

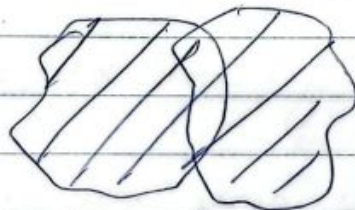
$A \cap B$

κοινά στοιχεία



ένωση

$A \cup B$



$a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, n \in \mathbb{N}$

$\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε $a \in A_k$
υπάρχει κάποιος δείκτης

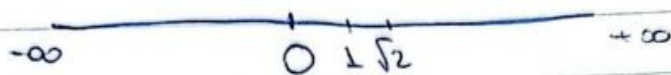
$(\exists!)$ = υπάρχει ακριβώς ένας δείκτης

Πράξεις : + , ·

$$a, b \in \mathbb{R} \xrightarrow{+} a+b$$
$$\xrightarrow{\cdot} a \cdot b$$

αρνητικά

θετικά



Ιδιότητες

Πρόσθεση

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $\exists 0 \quad a + 0 = a$
- $\exists b \quad a + b = 0$

Πολλαπλασιασμός

- $a \cdot b = b \cdot a$
 - $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 - $\exists 1, a \cdot 1 = a$
 - $\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \exists a^{-1} \quad a \cdot a^{-1} = 1$
- ◻ $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - ◻ $a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_n) = a_1 + \dots + a_n$

* Δεν μπορούμε να προσθέσουμε άπειρους αριθμούς

Διάταξη στους πραγματικούς

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ είτε $x > 0$ είτε $x < 0$ είτε $x = 0$

ΑΜΕΣΑ

$$x > 0, y > 0 \left\{ \begin{array}{l} x + y > 0 \\ x \cdot y > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 0 \\ x \cdot y \geq 0 \end{array} \right.$$

Ερ. Πότε για $x \in \mathbb{R} \quad x > y \xrightarrow{\text{αφαιρώ}} x - y > 0$;

Αποδ. $x > y \xrightarrow{a > 0} a \cdot x > a \cdot y$ διότι $x > y \Leftrightarrow x - y > 0 \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ a(x - y) > 0 \end{array} \right.$

$$a \cdot x - a \cdot y > 0 \Leftrightarrow a \cdot x > a \cdot y$$

αντίστοιχα $x \geq y \xrightarrow{a < 0} a \cdot x < a \cdot y$

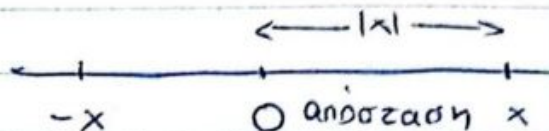
$$\begin{array}{l} x > y > 0 \quad (1) \\ a > b > 0 \quad (2) \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow ax > by$$

Απόδ

$$\begin{array}{l} (1) \stackrel{x a > 0}{\Rightarrow} ax > ay \quad | \text{ } (2), ax + ay > ay + by \Leftrightarrow ax > by \\ (2) \stackrel{x y > 0}{\Rightarrow} ay > by \end{array}$$

Εννοια: Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



$$\text{Αλγεβρικό αριθμό } \exists \theta > 0 \quad |x| = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = -0 \end{array}$$

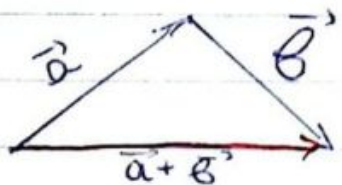
Ιδιότητες Απόλυτων τιμών

$$\bullet |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\bullet b \neq 0 \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\bullet |a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Τριγωνική Ανεξισότητα})$$

* Μόνο όταν a, b είναι ομόσηλα



$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

Ερ. Με $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Πότε το A το λέμε άνω φραγμένο σύνολο?

Αν. Όταν $\exists M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $\forall a \in A, a \leq M$

$$\text{π.χ. } A = \{x \in \mathbb{Q}, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

Το $\sqrt{2}$ είναι ένα άνω φράγμα για το A διότι

$$a \in A \Rightarrow a \in \mathbb{Q} \ \& \ a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Ερ. Πότε λέμε κάτω γραγμένο σύνολο
Αν. Όταν $\exists m \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\forall a \in A, a \leq m$

Αξίωμα της πραγματικότητας:

Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι άνω φραγμένο, τότε υπάρχει αριθμός $\sup A$ (supremum)

Είναι άνω φραγθέντα ταυτόχρονα το μικρότερο από
το άνω φραγμα.

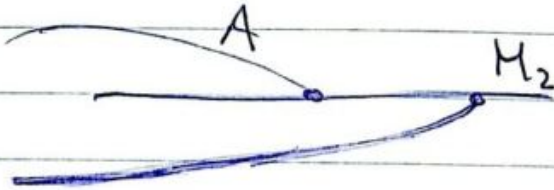
Πρόταση

Πρόταση Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ είναι
 άνω φραγμένα σύνολα. Τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$
 είναι άνω φραγμένα σύνολα.

Απόδ. Θα χρησιμοποιήσουμε την ευθεία απόδειξη.
 (Π.1) Επειδή το A είναι άνω φραγμένο, $\exists M_1 \in \mathbb{R}$
 ώστε $\forall a \in A, a \leq M_1$.

(Π₂) Επειδή το B είναι άνω φραγμένο, $\exists M_2 \in \mathbb{R}$
 ώστε $\forall b \in B \Rightarrow b \leq M_2$

ΣΚΕΨΕΙΣ



Οπότε $M_2 \rightarrow \text{άνω}$
φραγή

(AUB) Θα αποδείξουμε ότι $\max(M_1, M_2)$ είναι ένα γράφηκο του AUB. Πράγματι:

Εστω $x \in A \cup B$, — είτε $x \in A$

$$- \varepsilon \tau \varepsilon \quad x \in A$$

Es sei $x \in B$

αν $x \in A$ τότε

$$x \leq M_1 \leq \max(M_1, M_2)$$

αν $x \in B$ τότε

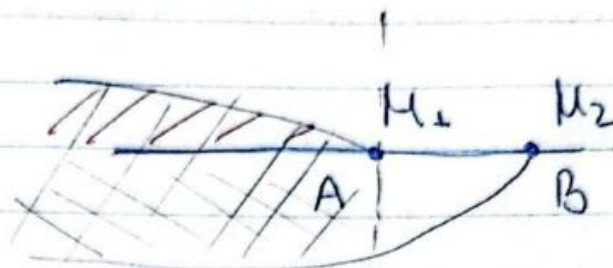
$$x \in M_2 \leq \max(M_1, M_2)$$

εμφέρως αν $x \in A \cup B$ $x \leq \max(M_1, M_2)$

(A ∩ B)

Απόδ

ΣΚΕΨΕΙΣ



Για την ελ. το $\min(M_1, M_2)$ είναι άνω φραγή

Για (A-B) το άνω φραγή είναι το M_1

Για (B-A) το άνω φραγή είναι το M_2

Πρόταση : Αν $a, b \in \mathbb{R}$ τότε
 $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

$$\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Τρόποι Απόδειξης

Ευθεία απόδειξη

χρήση των δεδομένων $\Rightarrow$ Συμπέρασμα

$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{100}$ αληθείς
 $\Downarrow$ άρα

Φ αληθείς

Απαγωγή σε άτοπο

Αντιθετοαντιστροφή

Άρνηση του Q $\Rightarrow$ Άρνηση των δύο

$$\neg Q \Rightarrow \neg (\Pi_1 \wedge \Pi_2)$$

$$\left(\begin{array}{c} \Pi_1 \text{ και } \Pi_2 \\ \wedge \\ \text{ε} \end{array} \right) \Rightarrow Q$$

$$\neg (\Pi_1 \wedge \Pi_2) := \text{είτε } \neg \Pi_1 \text{ είτε } \neg \Pi_2$$

$$\neg (\Pi_1 \vee \Pi_2) := \neg \Pi_1 \text{ και } \neg \Pi_2$$

$\Uparrow$
είτε

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα και ο επιδιωκόμενος στόχος να πετύχουμε ότι τουλάχιστον μία από τις υποθέσεις δεν αληθείς

Αρχική Δεξα Κοινότητα των Πραγματικών Αριθμών

Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \leq n$

(Αρα το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν έχει άνω φράγμα)

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού $x \in \mathbb{R}$, $[x]$

Ορισμός: Το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$ είναι ο ακέραιος και μικρότερος ή ίσος του x .

$$\mathbb{Z} \cap [x] \leq x$$

Οπότε $[x] \leq x \leq [x] + 1$ ①

Θεώρημα (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς)

Έστω $a < b$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < x < b$

** Απόδειξη

Επειδή $b > a \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b-a} > 0$

Από την Αρχική Δεξα

διόγντα $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε ώστε

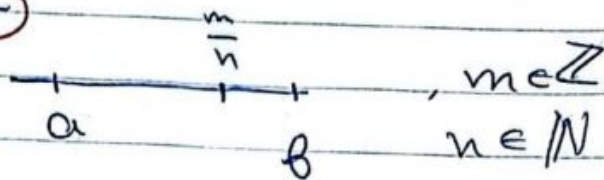
$$n > \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow n(b-a) > 1 \Rightarrow n \cdot b - n \cdot a > 1$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hline \Rightarrow b-a > \frac{1}{n} & & [nb] \\ \hline & na & nb \end{array} \right.$$

Επιλέγω $m \in \mathbb{Z}$ ($m = [nb]$)

$$na < [nb] \leq nb \Rightarrow na < m < nb \Rightarrow a < \frac{m}{n} < b$$

ΣΚΕΨΕΙΣ



$a < \frac{m}{n} < b \Leftrightarrow n \cdot a < m < b \cdot n$
 πρέπει να επιλέξω $n : b \cdot n - a \cdot n > 1$
 $n(b-a) > 1 \Rightarrow n > \frac{1}{b-a}$

Από (L) $\xrightarrow[\text{παράδ.}]{\text{για}}$ $\left\lceil \frac{1}{b-a} \right\rceil + 1$

$$na < m = \lfloor bn \rfloor \leq bn$$

Θεώρημα (Πυκνότητα Αρρήτων)

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ τότε $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοιος
 ώστε $a < x < b$

4/10/22

Απόδειξη

ΣΚΕΨΕΙΣ

Γνωρίζουμε να κάνουμε πράξεις με $\mathbb{Q}$

Ρητός + ρητός = ρητός
 Διότι $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Αρρητός + ρητός = Αρρητός

Αρα 1.ε αναγωγή στο άτοπο:

Έστω πως υπάρχουν a άρρητος & $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ τότε

$$a + \frac{m}{n} = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$a = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - mq}{qn} \in \mathbb{Q} \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

* μέγιστος κοινός διαιρέτης $=: (m, n)$

ΣΚΕΨΕΙΣ

Γιατί $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

Απόδειξη σε άτοπο

Έστω πως $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ και επομένως $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ ^{*(m,n)=1}

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow$$

$$2n^2 = m^2$$

Ο $2n^2$ είναι άρτιος άρα και ο m^2 είναι άρτιος άρα m -άρτιος διότι αν περιττός

$$m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$m^2 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow$$

$$m^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \text{ ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Οπότε $m = 2m_1, m_1 \in \mathbb{N}$

$$2n^2 = (2m_1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2$$

$\Rightarrow$ Αντιστοιχα n άρτιος οπότε $n = 2n_1, n_1 \in \mathbb{N}$

Καταλήγουμε ότι $n = 2n_1 \Rightarrow 2$ κοινός διαιρέτης τα m, n
 $m = 2m_1$

ΑΤΟΠΟ

Θεωρία Αριθμών

Εάν $p/n, p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$

Τι μπορούμε να πούμε;

$$p/n_1 \cdot n_2 \cdots n_k, n_i \in \mathbb{Z}, i=1,2,\dots,k$$

$$π.χ. \quad 2/4$$

$$\text{αρα } π.χ. \quad 2/6 = 2 \cdot 3, \quad 4/2 \cdot 6$$

Όπως $\exists i \in \mathbb{N}$ $p \nmid i$ όταν το p είναι πρώτος αριθμός

* Πρώτος αριθμός ^{λέγονται} (είναι) οι αριθμοί που διαιρούνται με το 1 και τα πολλαπλάσια του εαυτού τους

Τελική Απόδειξη (Θεωρήματος της πυκνότητας άρρητων)

Θα βρούμε ρητό $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a < \frac{m}{n} \sqrt{2} < b \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow n \frac{a}{\sqrt{2}} < m < \frac{b}{\sqrt{2}} n$$

Απαιτούμε $\frac{b}{\sqrt{2}} n - \frac{a}{\sqrt{2}} n > 1 \Leftrightarrow n \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}} \right) > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{b-a} \quad \text{και τότε επιλέγω } m = \left[n \frac{a}{\sqrt{2}} \right] + 1 < \frac{b}{\sqrt{2}} n$$

Μαθηματική ΕΠΑΓΩΓΗ

Παράμετρος $(n \in \mathbb{N})$
 $n \geq n_0$

$\Pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Αρχικά αποδεικνύουμε το $\Pi(n_0)$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η $\Pi(k)$

(Ανισότητα Bernoulli)

(Άσκηση) Αν $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$

Απόδ Για $n=1$, η ανισ. γράφεται: $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x \Leftrightarrow 0 \geq 0$ ισχύει.
Έστω $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $(1+x)^k \geq 1+k \cdot x$

Στόχος να αποδείξουμε ότι ισχύει επίσης :

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

Οπως επείδη $(1+x)^k \geq 1+kx$ $\xrightarrow{\text{πολ/ω με } (1+x) \geq 0}$ $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 = 1+(1+k)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x \geq 0$$

$$a^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$$

Ο $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται σαν πραγματικός αριθμός, $a \geq 0$.

Ε.π. Τι είναι το $\sqrt[n]{a}$?

Αν $\sqrt[n]{a} = x$ είναι εκείνος ο μη αρνητικός αριθμός του οποίου $x^n = a$.

06/10/22

Πολλάδιο 1^ο

1^ο) α) -3 , $-3 \leq -2 < -1$
 β) 1 , $1 < \sqrt{2} < 2$ άρα από τη θεωρία
 γ) -2 , $-2 \leq -\sqrt{2} < -1$ $[x] \leq x < [x] + 1$

2^ο) OK

3) $\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Έστω ότι είναι ρητός $(m, n) = 1$

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{3}n = m \xrightarrow{\text{υψώνω στα τετρα}} 3n^2 = m^2$$

$\Rightarrow$ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$m = 3k$$

$$m = 3k+1 \Rightarrow m^2 = (3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$$

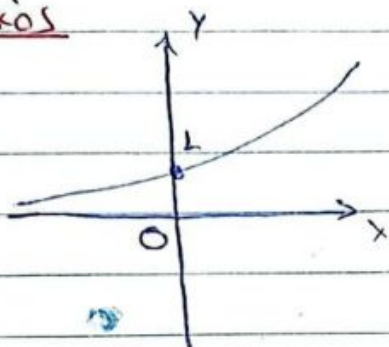
$$m = 3k+2 \Rightarrow m^2 = (3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n^2 < m < (n+1)^2$
 τότε $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$

$$4^{\circ}) a < b \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$a < \sqrt{3} \frac{2m}{n} < b \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{3}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{3}} \text{ Θέλουμε να βρούμε τις } P_{\text{HIV}} \text{ } a < b \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{3}} < \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

Εκθετικός



Αύξουσα $f \uparrow \text{ στο } A \subseteq \mathbb{R}$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Ορισμός: Η f είναι αύξουσα
α $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Η $f \uparrow$ γνησίως αύξουσα αν
 $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Η $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα $\downarrow$ όταν $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow g(x) > g(y)$
(γνησίως φθίνουσα) $\downarrow$ ($g(x) > g(y)$)

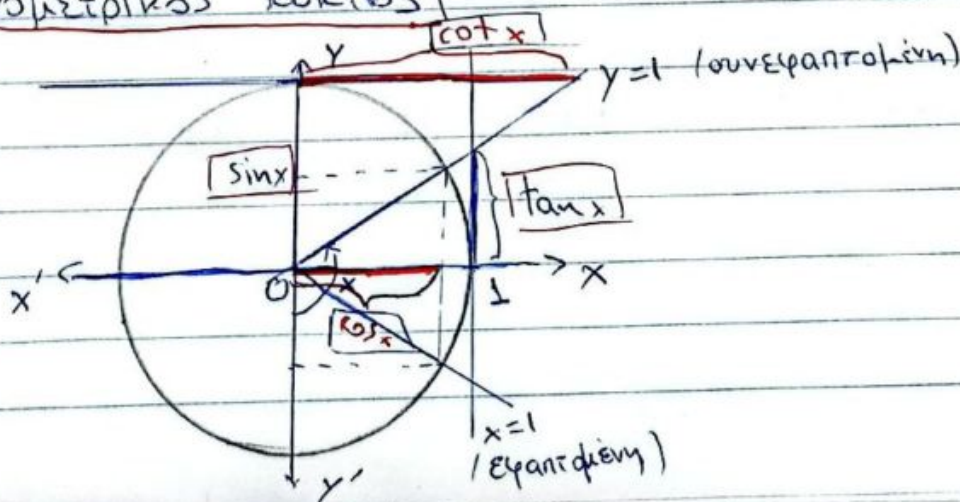
$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \text{ με } f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με την } f^{-1}(y) = \ln y, y > 0$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$

Τριγωνομετρικός κύκλος



Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων

Δοθέντα, $a \in \mathbb{R}$, βρείτε τα τόξα x ώστε: $\sin x = a$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α) $|a| > 1$, η εξίσωση είναι αδύνατη

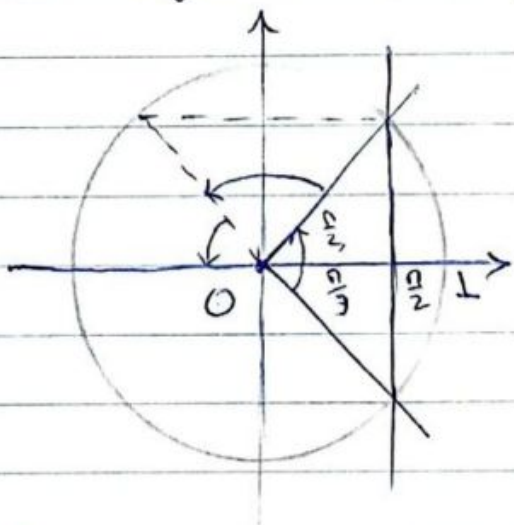
β) $|a| \leq 1$, η εξίσωση έχει λύση
Αν θ κάνει τόξο ώστε $\sin \theta = a$
 $\cos x = a = \cos \theta$

$\sin x = \sin \theta$	$ a \leq 1 \Leftrightarrow$
$x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$	
$x = 2k\pi + \pi - \theta, k \in \mathbb{Z}$	
είτε	$x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$
είτε	$x = 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan \theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$$

Ανισώσεις

Να βρεθούν τα τόξα x , για τα οποία: $\cos x > \frac{1}{2}$



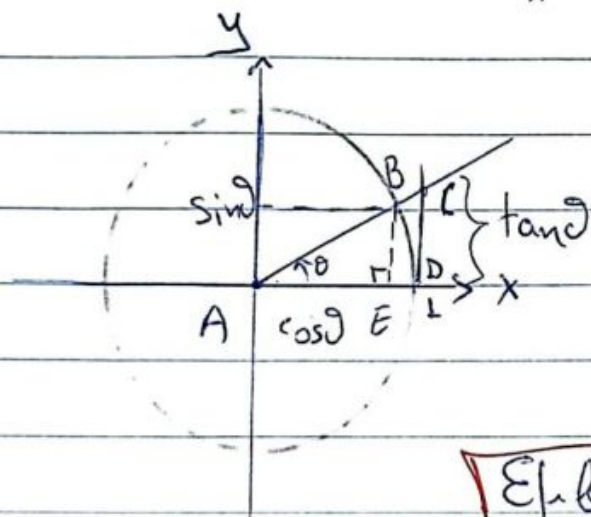
$$\text{Αν } x \in [-\pi, \pi] \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \end{array} \right\}$$

Άσκηση

Θεωρούμε το τεταρτημόριο, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

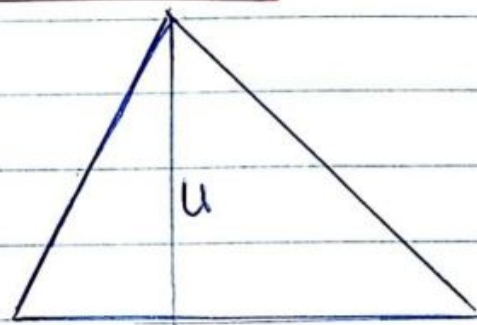


Δείξε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\tan \theta)$$

Εμβαδόν τριγώνου: $\frac{1}{2} b \cdot u$

$$\begin{aligned} \text{Εμβαδόν του } \triangle ABE &= \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \text{Εμβαδόν του } \triangle ACD &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$



$$\left(\begin{array}{c} \theta = 2n \rightarrow n \\ \theta \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} 2n \\ \theta \end{array} \right) = \frac{n}{x} \Rightarrow x = \frac{\theta}{2}$$

Εμβαδόν του $\triangle ABE < \text{Εμβαδόν του } \triangle ABD < \text{Εμβαδόν του } \triangle ACD$

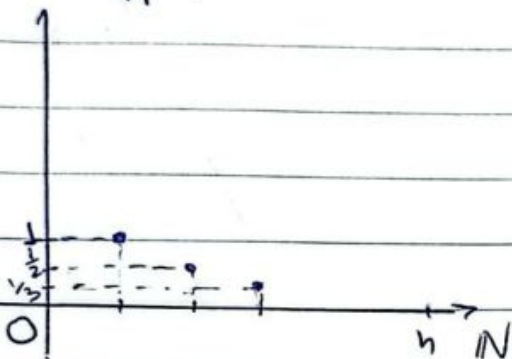
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες: είναι "ειδικές" συναρτήσεις δηλ έχουν πεδίο ορισμού $\mathbb{N}$

Διαφοροποίηση στον συμβολισμό όταν $a(n)$ γράφουμε $a_n, n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$

Γραφική παράσταση ακολουθίας

$$a_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$



Σύγκλιση ακολουθίας

Ορισμός: Έρ. Πότε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει;

Αν Όταν μπορούμε να βρούμε πως $\exists a \in \mathbb{R}$, ώστε
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα
 $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Παράδειγμα (1)

Η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0

Απόδ

Για $\varepsilon > 0$, θα βρούμε $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Επιλέγω $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, τότε για $n \geq n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$

Όμως $\boxed{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \leq \frac{1}{\varepsilon} < \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1}$ έχουμε $n \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\varepsilon \cdot n < 1 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0.$$

ΣΚΕΨΕΙΣ

Ανάλυση του προβλήματος

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon, \forall n > n_0$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Επιδιώκω να βρω: $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$

Βέλτιστη επιλογή

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

Παράδειγμα (2^ο)

Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\left\{ \frac{n+1}{n^2+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$n+1 \approx n$$

$$n^2+1 \approx n^2$$

άρα η ταξη μεγέθους

$\frac{n+1}{n^2+1} \approx \frac{1}{n}$ άρα περικένο
πως είναι Οκρ ακολουθία

Άρα θα αποδείξουμε ότι είναι μηδενική ακολουθία και ειδικότερα θα χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

προχέρο

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, |\frac{n+1}{n^2+1} - 0| < \varepsilon, \forall n > n_0$

$$\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \text{ή} \quad \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{0}{n} < \varepsilon$$

$$\text{Παίρνω: } \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

$$\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n$$

Ειδικότερα για $\varepsilon > 0$, επιλέγω $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ και τότε για $n > n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{n} > \frac{n+1}{n^2+1}, \forall n > n_0$

$$\Delta\iota\omega\tau\iota \left(\frac{n+1}{n^2+1} < \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n} \right) \left(\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon, \forall n > n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1 \right)$$

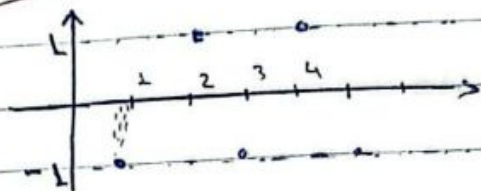
$$\text{Οπότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$$

Παράδειγμα (3°)

Ερ Η ακολουθία $(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ δεν συχλίνει;

Απ. Θα αποδείξουμε ότι δεν συχλίνει.

γραφικά



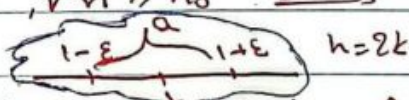
Θα χρησιμοποιήσουμε Ανάγκη σε άτοπο. Ειδικότερα υποθέτουμε ότι στο $a \in \mathbb{R}$.

Οπότε θα έχουμε:

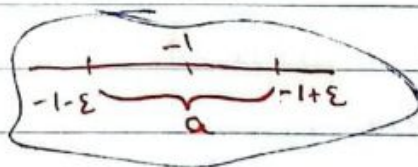
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |(-1)^n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΩ

$$|(-1)^n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \xrightarrow{\text{Αν } n \text{ άρτιος}} |(-1)^{2k} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |a - 1| < \varepsilon \Rightarrow$$



$$-\varepsilon < a - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < a < 1 + \varepsilon. \text{ Αν } n = 2k+1 > n_0, \text{ τότε θα έπρεπε } |(-1)^{2k+1} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |a + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a + 1 < \varepsilon \Leftrightarrow -1 - \varepsilon < a < -1 + \varepsilon$$



Ερώτημα: Πότε η ακολουθία δεν συχλίνει στο a ?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \text{ ώστε } |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Αρχήση: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n_0 = n_0(\varepsilon_0) \quad |a_n - a| \geq \varepsilon_0, \forall n \geq n_0$

Ειδικά το ε_0 ώστε το $-1 + \varepsilon_0 < 1 - \varepsilon_0$

$$2\varepsilon_0 < 2 \Leftrightarrow \varepsilon_0 < 1$$

Απάντηση: Θα αποδείξουμε ότι δεν συχλίνει. Θα χρησιμοποιήσουμε Ανάγκη σε άτοπο. Ειδικότερα υποθέτουμε ότι στο $a \in \mathbb{R}$. Οπότε θα είχαμε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |(-1)^n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Ειδικά $\varepsilon = \frac{1}{2}$, τότε θα πρέπει

$$|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}, \quad n \geq n_0 = n_0(\frac{1}{2})$$

αν επιλέξω $n = 2k \geq n_0$

$$\Rightarrow |1 - a| = |a - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$$

Αν επιλέξω $a = 2k + 1 \geq n_0$ τότε

$$|-1 - a| = |1 + a| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a + 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$$

αδύνατο

13/09/2022

Ερ. Πότε μια ακολουθία συγκλίνει?

Αν. Όταν $\exists a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$
(Μικρές επιδοχές στο $\varepsilon > 0$)

Ερ. Πότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει?

Αν. Όταν $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $\forall n_0: |a_n - a| \geq \varepsilon_0, \exists n \geq n_0$

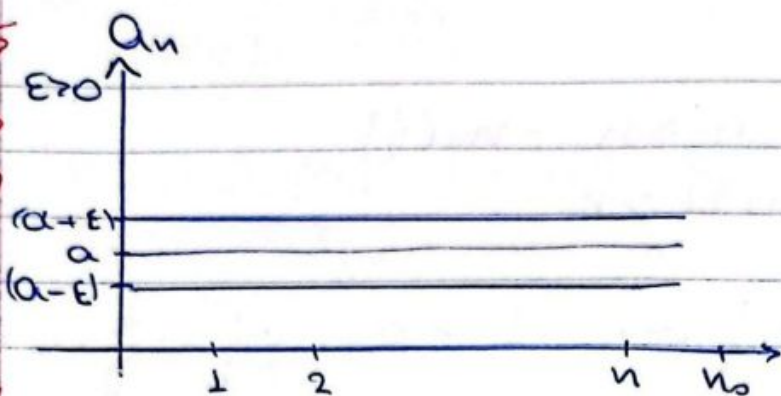
Παράδειγμα: Η ακολουθία $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει

Άλγεβρα Συγκλινουσων ακολουθιων

Θεώρημα: Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε συγκλίνει ακριβώς σε ένα όριο.

Θεώρημα: Κάθε συγκλινουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
Από τον ορισμό του ορίου έχουμε $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Τι σημαίνει το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?



Ορισμός Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν $\exists m < M$ ώστε $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν είναι απολύτως φραγμένη, δηλ $\exists M > 0$, ώστε $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

* : ώστε $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0$

Ενδείχεται $\epsilon = 1$, τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| < 1, \forall n \geq n_1$$

$$\Leftrightarrow -1 < a_n - a < 1, \forall n \geq n_1$$

$$\Leftrightarrow -1 + a < a_n < 1 + a, \forall n \geq n_1 \text{ με } m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ενδείξω $m = \min(-1+a, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1})$

$M = \max(1+a, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1})$

ώστε $a_n - a \leq |a_n - a| < 1, \forall n \geq n_1$

$a - a_n \leq |a_n - a| < 1, \forall n \geq n_1$

► παίρνουμε και τις 2 ανισότητες αφού δέλω να βρω και τα 2 πράγματα

Τριγωνική ανισότητα

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| \leq |a_n| + |a|$$

Θεώρημα: Έστω οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
τέτοιες ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Τότε:

1.) Η $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2.) Η $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3.) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, η $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα & μάλιστα
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot a$

Απόδ 2

Επειδή b_n συγκλίνει είναι
απολύτως φραγμένη, έστω
 $|b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή $\lim a_n = a$,
 $b_n = b$

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$|a_n b_n - a b| < \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists n_1:$$

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_1, \exists n_2:$$

$$|b_n - b| < \varepsilon, n \geq n_2$$

$$|a_n b_n - a b| \leq |(a_n - a) b_n| + |a (b_n - b)| \leq M |a_n - a| + |a| |b_n - b|$$

Αν υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n \geq n_2 \text{ & } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}, \text{ αν } a \neq 0$$

Τότε για $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$|a_n b_n - a b| = |(a_n - a) b_n + a (b_n - b)|, n \geq n_0$$

Τριγωνική Αισιότητα

$$\leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Θεώρημα: Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοιες ώστε
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

και η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία
Τότε η $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία

* Σε φύλλάδιο ασκήσεων έχουμε αποδείξει
την 2^η Ανισότητα Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Θεώρημα: Το $\lim a_n = a \neq 0$, $\lim b_n = b \neq \frac{b}{a}$, $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
 Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε
 $\lim a_n = a \neq 0$, $\lim b_n = b$
 και $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(\frac{b_n}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$
 ορίζεται και είναι συχνηθισμένη ακολουθία και
 μάλιστα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}$

Θεώρημα (Κριτήριο Παρεμβολής - Κριτήριο Ισοσχετινυσίων)
 ακολουθιών

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε
 $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$
 και οι ακολουθίες a_n, c_n είναι συχνηθισμένες
 ακολουθίες $\lim a_n = \lim c_n = a$

Παράδειγμα

Με χρήση κριτηρίου παρεμβολής, αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 7}{n^2 + 1} = 3$

Λύση

$$\left| \frac{3n^2 - 5n + 7}{n^2 + 1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2 - 5n + 7 - 3(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \right| = \left| \frac{3n^2 - 5n + 7 - 3n^2 - 3}{n^2 + 1} \right| =$$

$$\left| \frac{-5n + 4}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{5n + 4}{n^2 + 1} < \frac{5n + 4n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

$$|a_n - a| < \frac{2}{n} \Leftrightarrow \left[-\frac{2}{n} \leq \frac{3n^2 - 5n + 7}{n^2 + 1} - 3 \right] \leq \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{2}{n} \leq \frac{3n^2 - 5n + 7}{n^2 + 1} \leq 3 + \frac{2}{n}$$

18/10/2022

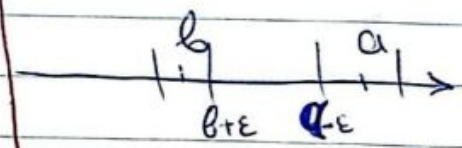
a_n $\limsup$ $\iff$ $|a_n|$ είναι $\limsup$ $\iff$ να βρούμε $0 \leq |a_n| \leq k_n$ ($\iff -k_n \leq a_n \leq k_n$)
να βρούμε μια $\limsup$ $\limsup$ ακολουθία.

Βασική Ιδιότητα

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλινουσες ακολουθίες.
Εάν επιπρόσθετα $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$)
 $\implies \lim a_n \leq \lim b_n$

Απόδειξη σε άτοπο

Έστω $a > b$ $\lim a_n = a$
 $\lim b_n = b$



άρα $a_n > b$

άτοπο

αφού Αρκεί $b+\epsilon < a-\epsilon$
 $\implies \epsilon < \frac{a-b}{2}$

Παρατήρηση για το παράδειγμα

$a_n < b_n < 1$
 $b_n = \underbrace{b_n \dots b_n}_{n \text{ φορές}}$ όχι πάντα

$\underbrace{b_n + \dots + b_n}_{n \text{ φορές}} = n \cdot b_n$ εξαρτάται
από $\lim b_n$

☞ ΠΡΟΧΕΙΡΟ Κάποιοι πρώτοι αριθμοί $|a|, |a|^2, \dots, |a|^n, \dots$

$$|a|^k(1-|a|) = |a|^k - |a|^{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow a_k - a_{k+1} \geq 0$$



Παρατήρηση

1) Εάν $a_n < b_n$, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ υπάρχει ενδεχόμενο να ισχύει και η ισότητα $a \leq b$

π.χ $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$

2) Αντίστροφα. Αν $\lim a_n < \lim b_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$a_n < b_n, n \geq n_0$$



Ποιοτικό Αποτέλεσμα

Θεώρημα Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συχλίνουσα ακολουθία.

Παράδειγμα

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Η ακολουθία $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$

Είναι μηδενική ακολουθία αφού θα αποδείξουμε ότι η $|a^n| = |a|^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική ακολουθία.



Προσ (1ος τρόπος)

* Θα αποδείξω αρχικά ότι η

$(|a|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Πράγματι $|a|^n - |a|^{n+1} = |a|^n(1-|a|) \geq 0 \Rightarrow |a|^n \downarrow$. Όπως επειδή $0 \leq |a|^n \leq |a|$ προκύπτει ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Από το Θ. (Ποιοτικό Αποτέλεσμα) προκύπτει $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = x$

Παρατηρούμε ότι: $b_n = |a|^n$, τότε $b_{n+1} = |a| \cdot b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a| \cdot b_n) = |a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = |a| \cdot x \Rightarrow x = |a| \cdot x \Leftrightarrow x(1-|a|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

(2ος τρόπος)

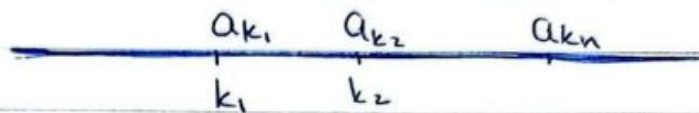
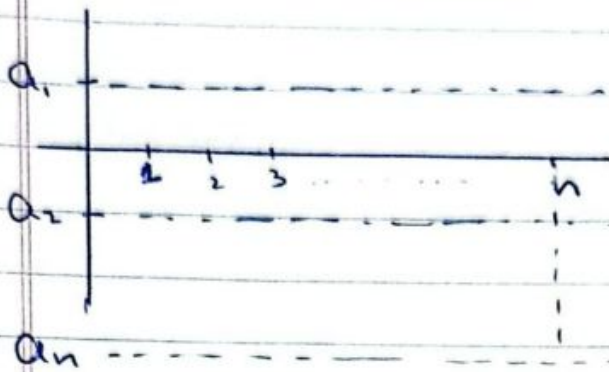
Επειδή $|a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1$, $\frac{1}{|a|} = 1 + \theta$ με $\theta > 0$

Ανισότητα Bernoulli

$$\text{Οπότε } \frac{1}{|a|^n} = (1+\theta)^n \geq 1 + \theta \cdot n > 0$$

$$\Rightarrow |a|^n \leq \frac{1}{1+\theta n} \leq \frac{1}{\theta n}. \text{ Από Κριτήριο Παρεμβολής } \Rightarrow |a|^n \text{ είναι μηδενική ακολουθία}$$

Υπακοδωδία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$



$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$$

Παράδειγμα 1

Αν $a_n = \frac{1}{n}$, τότε

α) $a_{2n} = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

β) $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

γ) $a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$, $k_n = n^2$

δ) $a_{n+4} = \frac{1}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_n = n+4$

Πρόταση: Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συχκλινει, τότε κάθε υπακοδωδία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συχκλινουσα και μάλιστα $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Απόδ

Έστω πως $\lim a_n = a$, ώστε $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Επιλέγουμε N_0 ώστε $k_{N_0} \geq n_0$

Είναι τότε για $n \geq N_0$

$$k_n \geq k_{N_0} \geq n_0$$

$$\text{έχουμε } |a_{k_n} - a| < \varepsilon$$

Άσκηση

Δίνεται η ακολουθία $a_1=1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \in \mathbb{N}$
Αποδείξτε πως η a_n είναι συχλινούσα ακολουθία και
βρείτε το όριο αυτής.

Λύση

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η a_n είναι γήγουα
αύγουσα, δηλ $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
ή $a_n < 2$

Θα χρησιμοποιήσουμε Μαθηματική Επαγωγή.

Για $n=1$ θα αποδείξω ότι: $a_2 > a_1 = \sqrt{2} > 1$ αληθεύει
 $a_1 < 2 \iff 1 < 2$ αληθεύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) δηλ

$$a_{k+1} > a_k$$
$$a_k < 2$$

και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=k+1$, δηλ

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

$$a_{k+1} < 2$$

$$a_{k+1} > a_k \stackrel{2}{\Rightarrow} 2a_{k+1} > 2a_k$$
$$\Rightarrow \sqrt{2a_{k+1}} > \sqrt{2a_k} \Rightarrow$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

$$a_k < 2 \Rightarrow 2a_k < 2^2 \Rightarrow \sqrt{2a_k} < \sqrt{2^2} \Rightarrow a_{k+1} < 2$$

20/10/2022

Εισαγωγή e

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ερ. Γιατί η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι συγκλινούσα ακολουθία?

Αν. Θα αποδείξουμε ότι η
 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνήσια αύξουσα,
δηλ. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ανισότητα Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$$

$$1+x = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Leftrightarrow x = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

Άρα από Αν. Bernoulli

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n}{(n+1)^2}$$

αρκεί

$$\boxed{\frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2}}$$

$$\text{α} \text{ρα } (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 2n^2 + 2n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

αληθεύει

ΠΡΕΠΕΙ

φραγτικότητα Μονοτονία

πρώτες τιμές:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a_1 = 2$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$a_2 = 3$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

$$\frac{64}{27} > \frac{9}{4} \Leftrightarrow 464 > 9 \cdot 27$$

$$256 > 243$$

αληθεύει

φράγμα της $(1 + \frac{1}{n})^n$

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)} + n+1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \geq a$$

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &\geq a\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1-a)\sqrt{n+1} &\geq a\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1-a}{a} \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(φράγματα)

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$(1 + \frac{1}{n})^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow (\frac{n+1}{n})^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow (\frac{n}{n+1})^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+n}$$

ληθενική ακολουθία.

άρα δεν υπάρχει χρέμα Bernoulli

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 4$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^{n/2} \geq \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} \geq 1 - \frac{(2n+1)n}{(n+1)^2}$$

Παράδειγμα

Αποδείξτε ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Απόδ.

Έχουμε:

1ος Τρόπος

Γετούμε $\sqrt[n]{2} = 1 + \theta_n$, $\theta_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (\sqrt[n]{2})^n = (1 + \theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n$$

$$\sqrt[n]{2} \geq 1 + n\theta_n \geq n\theta_n$$

$$\Rightarrow \theta_n < \frac{\sqrt[n]{2}}{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow 0 < \theta_n < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \theta_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1 + \theta_n)^2$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + 2\theta_n + \theta_n^2 \leq 1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n}$$

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$1 > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 - \theta_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = (1 - \theta_n)^n \geq 1 - n\theta_n$$

$$\Rightarrow n\theta_n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\theta_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Από κριτήριο παρεμβολής, αφού $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n}\right)$

2ος τρόπος

Γεταυκε

$$\sqrt[n]{n} = 1 + k_n, n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq k_n$$

$$n = (1 + k_n)^n$$

Τόχος πάνω πράγμα μινδεν. ακοιουδια

απα για $x \geq 0$ εχουμε $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

$$\text{οποτε } n = (1+k_n)^n \geq 1 + nk_n + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$$

$$\text{καταληφθηκε οτι } 0 \leq k_n \leq \sqrt{\frac{1}{n-1}}, n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim k_n = 0 \quad \text{Οπως } \sqrt[n]{n} = 1 + k_n$$

$$\text{απα } \lim \sqrt[n]{n} = \lim (1 + k_n) = \lim 1 + \lim k_n = 1$$

25/10/2022

Βημα: Η ακοιουδια $(1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$ ειναι ανω φραχμενη

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n \geq 1 - \frac{n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})}{\sqrt{1+n}} = 1 - \frac{n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}$$

$$= 1 - \frac{n((\sqrt{1+n})^2 - (\sqrt{n})^2)}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})} = 1 - \frac{n}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n}) - n}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})} = \frac{n+1 + \sqrt{n(n+1)} - n}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{1+n}(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})} \geq \frac{1}{2}$$

κατω φραγμα της ακοιουδιας

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq M$$

$$\left(\frac{n}{1+n}\right)^n \geq \frac{1}{M}$$

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n \geq \frac{1}{M}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{1+n}$$

$$\frac{L + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{n(n+1)} \geq n+1 + \sqrt{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} \geq n-1 \quad \checkmark$$

Διότι $\sqrt{n(n+1)} \geq \sqrt{n^2} = n > n-1$, Επομένως $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4 \quad \text{ανω φράγμα της ακολουθίας}$$

Θεώρημα

Εστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία, ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = l$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = l$

Τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και πράγματι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

Απόδειξη επειδή $a_{2n} \rightarrow l$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)$ ώστε

$$|a_{2n} - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1$$

Αντιστοίχα επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = l$

$$\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |a_{2n+1} - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_2$$

Επιλέγοντας $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, έχουμε

$$(*) \quad |a_n - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

(*) Διακρίνουμε την περίπτωση

$$n = 2m \geq 2n_1 \Leftrightarrow m \geq n_1$$

$$|a_{2m} - l| < \varepsilon$$

$$n = 2m-1 \geq 2n_2+1 \Leftrightarrow m \geq n_2$$

$$\Rightarrow |a_{2m-1} - l| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n_2 \quad \checkmark$$

ΣΚΕΨΕΙΣ

$\exists n_0?$

$$|a_n - l| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$$2n = m$$

$$n-1 = \frac{m-1}{2}$$

Άσκηση - Θεώρημα

► Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n-2} = l$

Τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει και μάλιστα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

Άσκηση - Θεώρημα

► Έστω η αναδρομική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δίνεται από $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Αποδείξτε πως:

Η a_n συγκλίνει και να βρείτε το $\lim a_n$

Προσ (με επαγωγή)

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι

$$1 \leq a_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Για $n=1$ πράγματι $1 \leq a_1 \leq \frac{3}{2}$ (Ισχύει)

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι αληθεύει για $n=k \in \mathbb{N}$, δηλ.

$$1 \leq a_k \leq \frac{3}{2} \quad \text{ή}$$

Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει ή για $n=k+1$, δηλ.

$$1 \leq a_{k+1} \leq \frac{3}{2}$$

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{2}, a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5}$$

$$a_4 = 1 + \frac{5}{12}$$

$$\begin{array}{c} a_1 \qquad \qquad a_3 \qquad \qquad a_2 \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ \hline \end{array}$$

Δεν είναι μονότονη

$$\frac{5}{12} > \frac{2}{5} \quad \checkmark$$

$$25 > 24$$

ΕΙΚΑΣΙΑ

$$1 \leq a_n \leq \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

$$a_{2n+2} \leq a_{2n}$$

$$a_{2n+1} \geq a_{2n-1}$$

Όπως $a_{k+1} = 1 + \frac{1}{1+a_k}$ ή επειδή

$$1 \leq a_k \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{(+1)} 2 \leq 1+a_k \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{2}{5} \xrightarrow{(+1)}$$

$$\frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{1+a_k} \geq 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a_{k+1} \geq 1$$

Θα αποδείξουμε επίσης ότι $a_{2n+2} \leq a_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$
 $a_{2n+1} > a_{2n-1}$

Πράγματι, για $n=1$

$$a_4 \leq a_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{12} \leq \frac{3}{2} \checkmark$$

Ενώ

$$a_3 > a_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{5} > 1 \checkmark$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ.

$$a_{2k+2} \leq a_{2k}$$

$$a_{2k+1} > a_{2k-1}$$

ή θα αποδείξουμε ότι ισχύει επίσης:

$$a_{2k+4} \leq a_{2k+2}$$

$$a_{2k+3} > a_{2k+1}$$

$$\left(a_{k+1} = 1 + \frac{1}{1+a_k} = \frac{2+a_k}{1+a_k} \right)$$

Έχουμε: $a_{k+2} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2+a_k}{1+a_k}} = 1 + \frac{1+a_k}{3+2a_k}$

Επομένως, οι ακολουθίες:

a_{2n}, a_{2n-1} είναι συχλίνουσες ακολουθίες

Έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = 1 + \frac{3a_{2n}}{3+2a_{2n}} \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1+a_{2n}}{3+2a_{2n}} \right) = 1 + \frac{1+\lim a_{2n}}{3+2\lim a_{2n}} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \lim a_{2n} \end{matrix}$$

$$x = 1 + \frac{1+x}{3+2x} \Leftrightarrow x(3+2x) = 3+2x+1+x \Leftrightarrow 3x+2x^2 = 3x+4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} & \text{Δεκτή} \\ x = -\sqrt{2} & \text{Απόρριπ.} \end{cases}$$

Διότι $1 \leq a_{2n} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \leq \frac{3}{2}$

Ερ. Τι σημαίνει $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$?

Κεντρική

Definition

$\lim a_n = l$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so that $|a_n - l| < \varepsilon, \forall n > n_0$

Αν. Λέμε πως $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ όταν:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0$$

Αντιστοιχία

Λέμε πως $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ όταν :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon): a_n < -\frac{1}{\varepsilon}, n > n_0$$

Ynendikion

Κριτήριο Παρεμβολής

$b_n \leq a_n \leq \gamma_n, n \geq n_1$

$\text{Av } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ & ίδιο ποσό}$

Αντιστοιχία

Κριτήριο Παρέμβασης για $\lim a_n = +\infty$

Εστω $n \geq n_0$, $b_n \leq a_n$, $n \geq n_1$
που ικανοποιείτε $\lim b_n = +\infty$
Τότε $\lim a_n = +\infty$

TOTE $\lim a_n = +\infty$

Παράδειγμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right) = +\infty, \text{ διότι.}$$

$$\frac{n^2+1}{2n+1} \geq \frac{n}{4} \Leftrightarrow 4(n^2+1) \geq n(2n+1) \Leftrightarrow 4n^2+4 \geq 2n^2+n \Leftrightarrow 2n^2-n+4 \geq 0 \Leftrightarrow n^2+n^2-n+4 \geq 0 \quad \checkmark \text{ toujours, } \forall n \in \mathbb{N}$$

Γιατί $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4} = +\infty$

Διότι, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0$

Επιλέχοντας $n_0 = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1$

Τότε για $n \geq n_0 = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0$

Συναρτήσεις

$f: A \rightarrow B$ ← Σύνολο που η συνάρτηση παίρνει τιμές
 $\uparrow$
 πεδίο ορισμού ως f, D_f

$\forall a \in A \quad a \mapsto f(a)$ (ακριβώς μια τιμή)

$R_f = \{f(a), \forall a \in A\}$ σύνολο τιμών

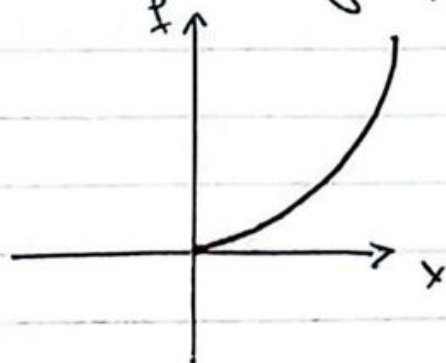
Παραδείγματα

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και έχει τύπο
 $f(x) = x^2, x \in [0, +\infty)$

$D_f = [0, +\infty)$

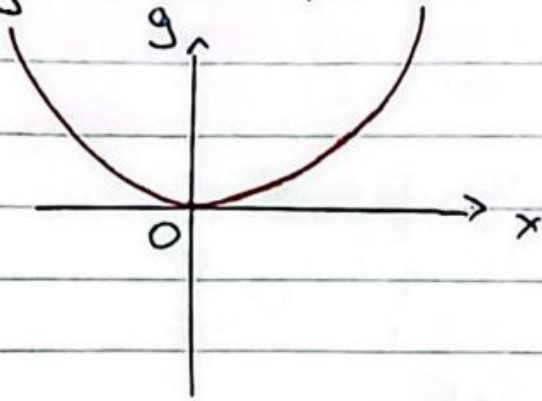
$R_f = [0, +\infty)$

διότι $y \in R_f (y \geq 0)$, υπάρχει $x \in [0, +\infty)$,
 ώστε $f(x) = y?$



$x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$
 $x = -\sqrt{y}$
 (από)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο $g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$



Σύνθεση συναρτήσεων

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: \Gamma \rightarrow \Delta$$

(R_g)

Ερ. Πότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$?

Αν. $f \circ g: X \rightarrow Y$

$$\Gamma \rightarrow B, (f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in \Gamma$$

με $D_{f \circ g} = \Gamma$ απαραίτητη προϋπόθεση

$$R_g \subseteq A \quad \Gamma \Delta \subseteq A$$

Αντίστροφη συνάρτηση

"Επι" $\leftrightarrow B = R_f$

Ερω. Έστω $f: A \rightarrow B$, πότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση?

$$f^{-1}: B \rightarrow A \quad A \ni x \mapsto f(x) \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(x)) = x$$

Αν. Αν η f είναι 1-1 & επι

Ερ. Πότε μια συνάρτηση είναι 1-1?

Αν. Όταν $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$

Επίσης όταν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 "Επι" $\forall y \in B = \exists x \in A$ ώστε $f(x) = y$

Έστω $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

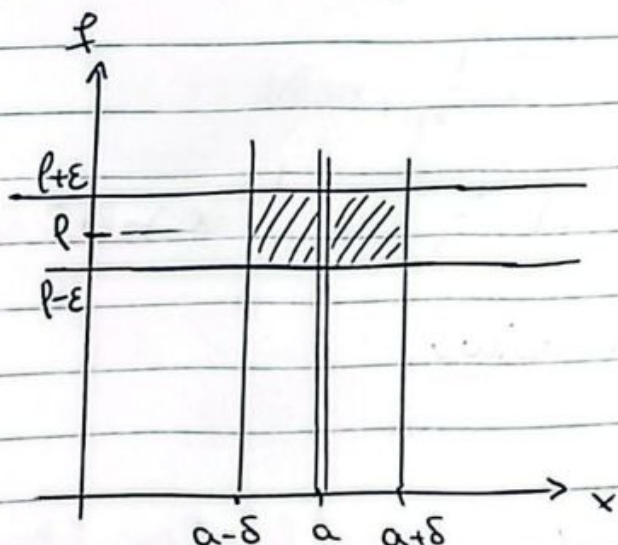
Ερ. Πότε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$?

Ορισμός: Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$:

έτσι ώστε $\forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$- \varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$- \varepsilon + l < f(x) < \varepsilon + l$$



Παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

Θα αποδείξουμε ότι δοθέντος του $\varepsilon > 0$

το $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ ικανοποιεί:

αν $0 < |x - 1| < \delta$ τότε $|f(x) - 1| < \varepsilon$

Πράγματι $|f(x) - 1| = \frac{|x - 1|}{|x|}$ άρα

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{1}{x} < 2 \text{ και επομένως } (\delta \leq \frac{\varepsilon}{2})$$

$$|f(x) - 1| = \frac{|x - 1|}{|x|} < 2|x - 1| < 2\delta \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ΣΚΕΨΕΙΣ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

$$0 < |x - 1| < \delta$$

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$(- \varepsilon + 1 < f(x) < \varepsilon + 1)$$

$$(- \varepsilon + 1 < \frac{1}{x} < \varepsilon + 1)$$

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x - 1|}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\text{για } x \neq 1$$

$$|x - 1| < \delta_1 \Leftrightarrow$$

$$- \delta_1 < x - 1 < \delta_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \delta_1 < x < 1 + \delta_1$$

Επιλέγω γρήγορα $\delta_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$2 > \frac{1}{x} > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|x - 1|}{|x|} < \frac{2|x - 1|}{\frac{2}{3}} = 3|x - 1|$$

$$\text{Αντίω } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ερ. Πότε $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$?

Αν. (Αναγωγή σε άτοπο, με βοήθεια του ορίου)

Αν $\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $\forall \delta > 0, \exists x$ ώστε $0 < |x - a| < \delta$,
τέτοιο ώστε $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$

Η "βοδική" επιλογή του $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} :$

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Αλγεβρα ορίων

Θεώρημα

Εστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

$l, m \in \mathbb{R}$

Τότε : η f έχει όριο έτσι ώστε

1) $\lim_{x \rightarrow a} (l \cdot f(x)) = l \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \cdot l$

2) Η $f+g$ έχει όριο, ιδιαίτερα

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3) Η $f \cdot g$ έχει όριο και μάλιστα

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Πρόταση

Αν $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, τότε $\exists M > 0 \ \forall \delta > 0$

ώστε

$$|f(x) - l| \leq M, \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Ερ. Τι είναι το όριο συνάρτησης;

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ερ. Πότε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$;

Απάντηση: Όταν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε
 $\forall 0 < |x - a| < \delta$, ισχύει $|f(x) - l| < \varepsilon$

Ερ. Πότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$?

Αν. Όταν $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε
 $|a_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Ερ. Πότε δεν είναι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$?

Αν. Όταν $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - a| < \delta$ τέτοια ώστε
 $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$

Ενδείχονται $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ τέτοια ώστε $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

και για ποια, δεν υπάρχει

$$f(x)=x$$

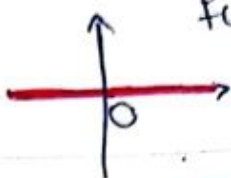
$$x \in \mathbb{Q}$$

ΣΚΕΨΕΙΣ



$$f(x)=0$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$



Αν στο παράδειγμα

Θα αποδείξουμε ότι

$$(a) \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

και στη συνέχεια ότι αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

$$(b) \quad \text{τότε} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(a) Θα κάνουμε χρήση του αριθμού του αρίου.

Ειδικότερα για $\varepsilon > 0$, Θα βρούμε $\delta > 0$

$$0 < |x - 0| < \delta, \text{ να έχουμε } |f(x) - 0| < \varepsilon$$

Ειδικότερα η επιλογή $\delta = \varepsilon$ έχει την ιδιότητα

$$x \in \mathbb{Q}, \quad 0 < |x| < \delta (= \varepsilon) \quad \text{τότε}$$

$$|f(x) - 0| = |x - 0| = |x| < \varepsilon$$

αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, και $0 < |x| < \delta (= \varepsilon)$ τότε

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

(b) Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ τότε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

αν επιλέξουμε, $x \in \mathbb{Q}$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| = |x - l| < \varepsilon$$

ενώ αν επιλέξουμε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

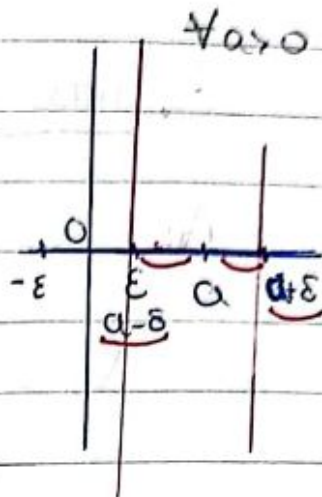
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| = |0 - l| < \varepsilon (*)$$



$$0 < |x| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\text{Πρέπει: } |l| < \varepsilon \Rightarrow l = 0$$

όμως αν $x \in \mathbb{Q}$ $0 < |x - a| < \delta$ τότε
θα έπρεπε $|x - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$



Αν επιλέξουμε δ :

$$a - \delta > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < a - \varepsilon$$

$$|x| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta$$

Προσδοκία της άσκησης

Ε. Πότε $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

τότε $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοιος ώστε
 $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, 0 < |y_n - a| < \frac{1}{n}$

$$\text{αλλά } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = m \quad \mu \varepsilon \quad l \neq m$$

Ιδιότητες ορίων

(Ακριβώς αντιστοιχείς των ιδιοτήτων ορίων ακολουθιών)

Θεώρημα

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

Συνέχεια συνάρτησης

Ερ. Πότε η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}$;

Αν. Όταν $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 :$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ιδιότητες στη συνέχεια
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ τότε
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

Σύνθεση συναρτήσεων

► Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

συνεχες (σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού)

Τότε η $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται καλά και είναι μάλλον
συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη

► Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Θα αποδείξουμε πως $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$

Οπως $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n))$. Από τη συνέχεια της f στο a
έχουμε πως $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n} = f(a)$

Αντίστοιχα από της g στο $f(a)$, έχουμε

$$\forall z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$

$$\text{έχουμε } g(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(a))$$

$$\text{Ενδεχομένως } z_n = y_n = f(x_n) \rightarrow f(a)$$

$$\text{Οπότε } g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(a))$$

Θεώρημα / (Bolzano)

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(b) < 0$
τότε $\exists \xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $\boxed{f(\xi) = 0}$

Παράδειγμα

► Έστω $f: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής συνάρτησης
και $g: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής τέτοια ώστε
 $g(0) = 0, g(2) = 1$
τότε $\exists \xi \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε
 $f(\xi) = g(\xi)$



Βασικό Ερώτημα (Συνεχείς Συνάρτησεις)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, μονότονη. Τότε $\forall x_0 \in (a, b)$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

(Εστω f αύξουσα(1)):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

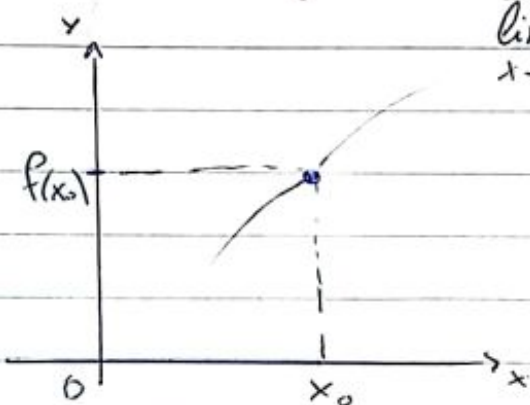
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$$

&

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \geq f(x_0)$$



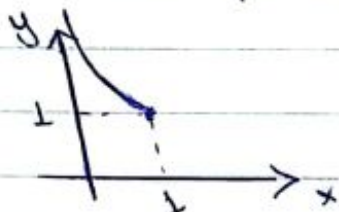
~~π.χ.~~ Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$-1 \leq a \leq 1$$

Αν $a \in (-1, 1)$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.

Παράδειγμα

Η $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$



Θεώρημα

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ** συναρτησιμότητα, δηλ/ υπάρχει $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Θεώρημα

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει μέγιστη & ελάχιστη τιμή, δηλ/ $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε $\forall x \in [a, b]$
 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Θεώρημα (Bolzano)

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Τότε $\exists \xi \in (a, b)$, ώστε $f(\xi) = 0$.

Θεώρημα (Ενδιάμεσων Τιμών)

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. ► Έστω $f(a) < f(b)$.
Τότε $\forall l \in (f(a), f(b))$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = l$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με την $g(x) = f(x) - l$ ικανοποιεί την προϋπόθεση του D. Bolzano.

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - l < 0 \\ g(b) &= f(b) - l > 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη και συνεχής, τότε το πεδίο τιμών $R_f = \{f(x), \forall x \in [a, b]\}$

είναι το διάστημα που ορίζουν τα $f(a), f(b)$. Ειδικότερα $\forall f \uparrow$ τότε

$$R_f = [f(a), f(b)]$$

Θεώρημα

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή και "1-1". Τότε η f είναι γνήσια μονότονη.

Θεώρημα

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή και γνήσια μονότονη.
(► Έστω $f \uparrow$). Τότε $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Άσκηση

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f^2 είναι συνεχής. Είναι η f απαραίτητα? Ποιό είναι το βέλτιστο θετικό αποτέλεσμα?

Λύση

Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Μάλλον $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Ισχυρίζομαι ότι η $|f|$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Η $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$ συνεχής συνάρτηση.
Οπότε $|f(x)| = g(f^2(x)) (= \sqrt{f^2(x)})$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Άσκηση

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε f^3 είναι συνεχής συνάρτηση. Είναι η f συνεχής?

Λύση

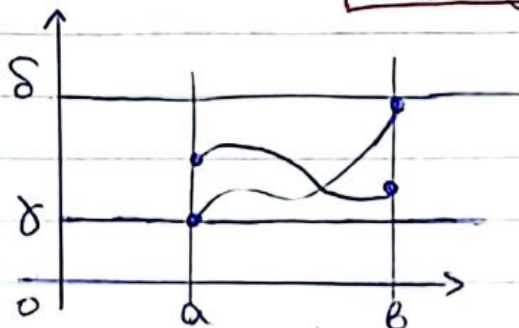
Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής.

Η $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}} (= \sqrt[3]{x})$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση άρα $f(x) = (f_2 \circ f^3)(x) = f_2(f^3(x)) = \sqrt[3]{f^3(x)}$

Η σύνθεση της f_2 με την f^3 (σύνθεση συνεχών συναρτ.) είναι συνεχής συνάρτηση

Άσκηση

Έστω $f: [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$ συνεχής κ' $g: [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$ συνεχή που επίσης $g(a) = \gamma$ & $g(b) = \delta$. Τότε $\exists \xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$



Απόδειξη

Αν $f(a) = g(a)$ είτε $f(b) = g(b)$ η επιλογή είναι προφανής. Οπότε έστω πως $f(a) > g(a)$ ή $f(b) < g(b)$

Τότε η $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο: $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$ είναι συνεχής και επίσης $\left. \begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) > 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) < 0 \end{aligned} \right\}$

$h(a)h(b) < 0$. Από Θ. Bolzano $\exists \xi \in (a, b)$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^{2021} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} = 119$

έχει ρίζες. Μπορείτε να προσεγγίσετε μια ρίζα;

Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{2021} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} - 119, x \in \mathbb{R}$

είναι συνεχής.

Προκύπτει μια ρίζα στο $(0,1)$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$f(0) = 163 - 119 > 0$$

$$f(1) = \frac{163}{2 + \sin^2 1} - 118 < 0$$

10/11/2022

Εφαρμογή

Να αποδειχτεί ότι κάθε θετικός αριθμός, έχει θετική τετραγωνική ρίζα

Αποδείξη

Αν $\theta > 0$, τότε θα αποδείξουμε ότι $\exists x > 0$ ώστε $x^2 = \theta$.
Αυτό θα το αποδείξουμε με τη χρήση του Θ. Bolzano.
Ειδικότερα θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
και με τύπο $f(x) = x^2 - \theta$, που είναι συνεχής συνάρτηση.
Εμπρόσθετα $f(0) = -\theta < 0$ και

$$f(1+\theta) = (1+\theta)^2 - \theta = \theta^2 + \theta + 1 = \left(\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Οπότε από Θ. Bolzano $\exists x \in (0, 1+\theta)$ που δίνει
την εξίσωση $f(x) = x^2 - \theta = 0$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$\begin{aligned} f(\theta+1) &= (\theta+1)^2 - \theta \\ &= \theta^2 + 2\theta + 1 - \theta \\ &= \theta^2 + \theta + 1 > 0 \end{aligned}$$

Παράγωγος Συνάρτησης

► Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, πότε η f είναι παραγωγισμένη α;

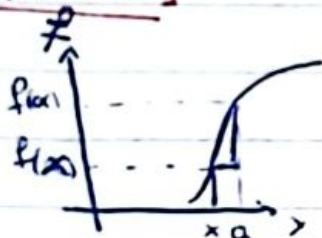
Απάντηση

Όταν $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} := f'(a)$

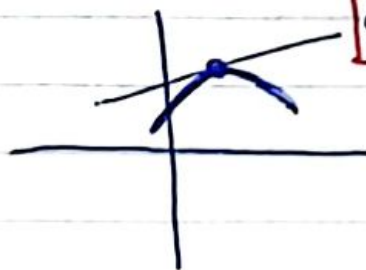
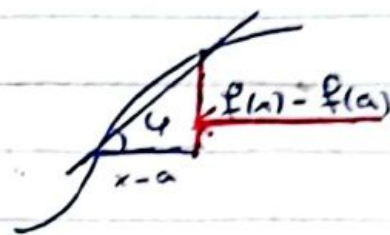
ή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ευθ. Εφ'ημέρ.



$$\tan(\varphi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Ροπή αλυσίδας

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

► Όταν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ώστε $\forall 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$

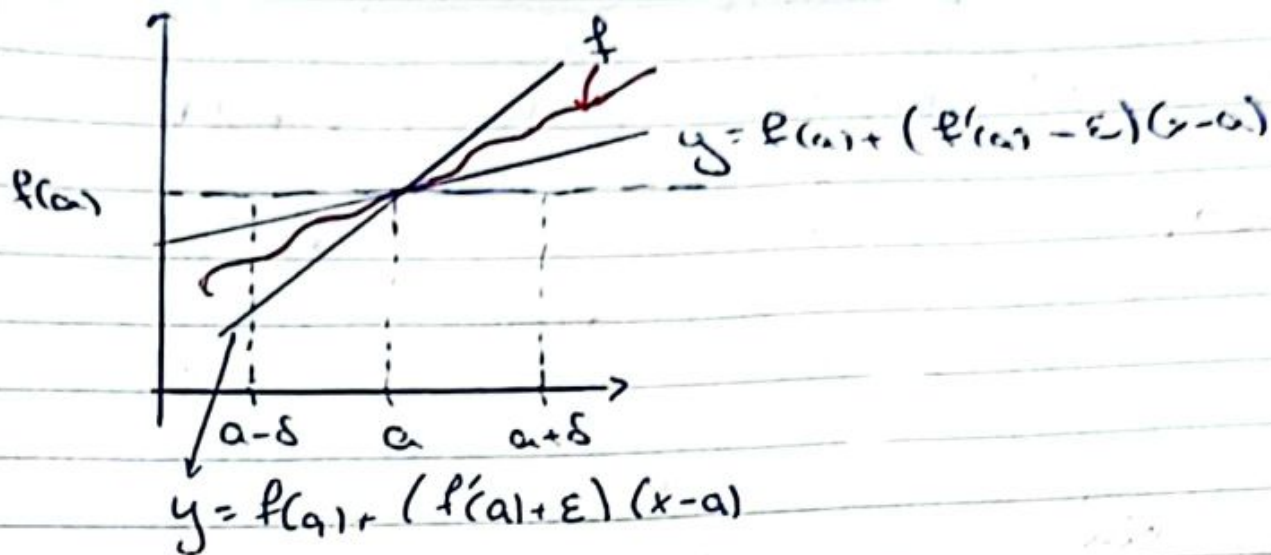
$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| &< \varepsilon |x - a| \Leftrightarrow \\ -\varepsilon |x - a| &< f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) < \varepsilon |x - a| \end{aligned}$$

$$f(a) + f'(a)(x - a) - \varepsilon |x - a| < f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon |x - a|$$

i) $a < x < a + \delta \Rightarrow$

$$f(a) + (f'(a) - \varepsilon)(x - a) < f(x) < f(a) + (f'(a) + \varepsilon)(x - a)$$



Θεώρημα 1

Αν f παραγωγιστήν στο a , τότε η f είναι συνεχής στο a διότι $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$.

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| < \varepsilon |x - a|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < (\varepsilon + |f'(a)|) |x - a|$$

$$\left(\begin{array}{l} |x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \\ |x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \end{array} \right)$$

Αντιπαράδειγμα

$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ δεν παραγωγίζεται στο 0.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Πλεονεκτήματα παραγωγούς

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Παράγωγος συνάρτησης

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η f παραγωγίζεται στο ξ , στον

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} := f'(\xi)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < \varepsilon$$

Άλγεβρα των παραγωγισίων Συναρτήσεων

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να είναι παραγωγισίες στο ξ .

i) Τότε $f+g$ είναι παραγωγισή στο ξ , με

$$(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)'(\xi) = \lambda f'(\xi)$

iii) $\forall f, g$ παραγωγισίες στο ξ , με

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

Απόδειξη

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi}$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(x) + f(\xi) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} =$$

$$= g(x) \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + f(\xi) \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{(fg)(x) - (fg)(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(g(x) \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right) + \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(\xi) \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + f(\xi) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$= g(\xi) \cdot f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

$$V = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ παραγωγιστή στο } \xi \}$$

$$+ \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος

Όσον αφορά την $\frac{f}{g}$

Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγιστή στο ξ .
Εφόσον $\frac{f}{g}$ πρέπει $g(\xi) \neq 0$

Αρχικά από την παραγωγισιότητα g στο ξ προκύπτει ότι η g είναι συνεχής στο ξ οπότε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta, |g(x) - g(\xi)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < g(x) - g(\xi) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\varepsilon + g(\xi)}_{\frac{g(\xi)}{2}} < g(x) < \varepsilon + g(\xi)$$

i) Έστω $g(\xi) > 0$

$$-\varepsilon + g(\xi) = \frac{g(\xi)}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{g(\xi)}{2}$$

Επιλέχοντας $\varepsilon = \frac{g(\xi)}{2} > 0$ τότε $\exists \delta > 0 : 0 < |x - \xi| < \delta$

$$\Rightarrow 0 < \frac{g(\xi)}{2} < g(x) < \frac{3g(\xi)}{2}$$

ii) Αντίστοιχα $\varepsilon = \frac{g(\xi)}{2} > 0$, προκύπτει

$$g(x) < \frac{g(\xi)}{2} < 0, \quad 0 < |x - \xi| < \delta_2$$

Επομένως $\exists \delta > 0$:

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ ορίζεται καλά στο $(\xi - \delta, \xi + \delta)$

$$\text{και τότε } x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), \text{ τότε } \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(\xi)}{x - \xi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\xi)}}{x - \xi} = \frac{g(\xi) - g(x)}{g(x)g(\xi)(x - \xi)} = -\frac{1}{g(x)g(\xi)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(\xi)}{x - \xi} = -\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x)g(\xi)} \cdot \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}$$

$$= -\frac{1}{g(\xi)} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} = -\frac{1}{g^2(\xi)} g'(\xi) = -\frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)}$$

Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισίμες στο ξ με $g(\xi) \neq 0$, τότε $\exists \delta > 0$:

$\frac{f}{g}: (\xi - \delta, \xi + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ να ορίζεται ώστε η $\frac{f}{g}$ είναι

παραγωγισίμη στο ξ με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}$$

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας)

► Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ , και $\exists \delta > 0$
 $g: (f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \subset R_f = f(\mathbb{R})$

με την g παραγωγίσιμη στο $f(\xi)$. $\exists \delta_1 > 0$:

Τότε $g \circ f: (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ να ορίζεται κατά
είναι καλύτερα παραγωγίσιμη στο ξ , με

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Απόδ.

Ορίζουμε την συνάρτηση: $G: (f(\xi) - \delta, f(\xi) + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με
τύπο:

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(\xi))}{y - f(\xi)}, & y \neq f(\xi) \\ g'(f(\xi)) & y = f(\xi) \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στο $y = f(\xi)$ επειδή η g
παραγωγίσιμη $y = f(\xi)$. Για $0 < |x - \xi| < \delta_1$
τότε

$$\Rightarrow g(y) - g(f(\xi)) = G(y)(y - f(\xi))$$

$$g(f(x)) - g(f(\xi)) = G(f(x))(f(x) - f(\xi))$$

$$\text{Οπότε } \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} \\ = \frac{G(f(x))(f(x) - f(\xi))}{x - \xi} \quad \text{και ενδεχόμεως}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} G(f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \\ = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Θεώρημα

Έστω $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ και έστω
πως η f είναι παραγωγιστή στο $\xi \in (a, b)$ και
πρόσφα $f'(\xi) \neq 0$.

Τότε η $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ ορίζεται καλά
και είναι παραγωγιστή στο $f(\xi)$.
Μάλιστα:

$$(f^{-1})'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)}$$

Απόδειξη

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(\xi))}{y - f(\xi)}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} = \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$f^{-1} \circ f = I_x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f \circ f^{-1} = I_{f(x)}$$

$$(f^{-1}(f(x)))'_{x=\xi} = 1$$

$$(f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = 1$$

Άσκηση

► Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$ με νόμο $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
τότε η f είναι 1-1 & επι. Μάλιστα
 $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγιστή $\forall x \in (1, +\infty)$ με
 $(f^{-1})'(x) = ?$

Αν

Παρατηρούμε ότι η f παραγωγίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ και
μάλλον $f'(x) = e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Οπότε η $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγιστή και
μάλλον: $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

$$y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(y - 1)$$
$$f^{-1}(y) = \ln(y - 1), y > 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y-1} \cdot 1 = \frac{1}{y-1}, y > 1$$

$$\text{Αν } f(x) = y, f'(x) = e^x, e^x + 1 = y \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y-1}, \Leftrightarrow e^x = y-1, y > 1$$

Άσκηση

► Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ με νόμο $f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$
Είναι η $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγιστή?

Αν

Η f^{-1} είναι παραγωγιστή, διότι η f είναι
παραγωγιστή $\forall x \in \mathbb{R}$ και επειδή $f'(x) = e^x + 1 > 0$
($f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$)



Άσκηση

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x)$

είναι παραγωγική $\forall x \in \mathbb{R}$

Είναι η f παραγωγική συνάρτηση?

Αν.

Θέτουμε $g(x) = f^3(x) + f(x)$, τότε η $g(x)$ είναι παραγωγική

$$\begin{aligned} & \text{h.e. } G(y) = y^3 + y, y \in \mathbb{R} \\ & (= G(f(x)) = (G \circ f)(x)) \end{aligned}$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι 1-1 & επί, είναι παραγωγική

$$\text{h.e. } G'(y) = 3y^2 + 1 > 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

$\therefore G^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγική

Από Θ. αντιστροφής

$$\implies f = G^{-1} \circ g \text{ είναι παραγωγική}$$

16/11/2022

Βασικές Συναρτήσεις

- $e^x, x \in \mathbb{R}$
- $x^a, x \geq 0$
- $a^x, a > 0$
- $\sin x, x \in \mathbb{R}$
- $\cosh x$
- $\cos x, x \in \mathbb{R}$
- $\sinh x$
- $\tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\log x, x > 0$

Βασικές παραγωγισμοί

- $(e^x)' = e^x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)$
- $(x^a)' = ax^{a-1}, x > 0, a \geq 1 \Rightarrow -1 < a < 1$

Τύπος Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$\Rightarrow$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Άρα : } (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα (Fermat)

1α) Έστω $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in (a, b)$, τοπικό ακρότατο της f .

Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ , τότε $f'(\xi) = 0$

1β) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και το a τοπικό ελάχιστο της f ή f παραγωγίσιμη στο a . Τότε $f'(a) \geq 0$

Βοήθεια για την κατανόηση του Θ. Fermat!

Τοπικά ακρότατα

Ερ. Πότε f τοπικό μέγιστο για $f(a, b)$

Αν $\exists \delta > 0 : (f-\delta, f+\delta)$
 $f(f) \geq f(x), \forall x \in (f-\delta, f+\delta)$

η θεωρία

Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ το a είναι τοπικό μέγιστο αν
 $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta)$
 $f(a) \geq f(x) \forall x \in [a, a+\delta)$

Απόδειξη

Θ. Fermat

(a). Επειδή f είναι τοπικό ακρότατο (έστω μέγιστο)
 $\exists \delta > 0 : (f-\delta, f+\delta) \subset (a, b)$ και ισχύει
 $f(f) \geq f(x), \forall x \in (f-\delta, f+\delta) \Rightarrow \underline{f(x) - f(f) \leq 0}$

i) $f-\delta < x < f \Rightarrow x-f < 0$

$$\frac{f(x) - f(f)}{x-f} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow f^-} \frac{f(x) - f(f)}{x-f} \geq 0 \Rightarrow f'(f) \geq 0$$

ii) $f < x < f+\delta \Rightarrow x-f > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(f)}{x-f} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow f^+} \frac{f(x) - f(f)}{x-f} \leq 0 = f'(f) \leq 0 \Rightarrow f'(f) = 0$$

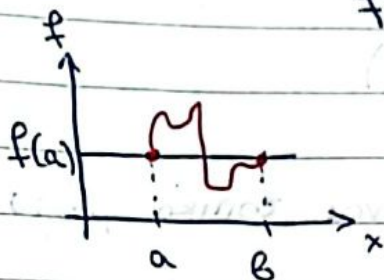
(b) $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset [a, b]$
 $f(a) \geq f(x), \forall x \in (a, a+\delta)$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) \leq 0, x-a > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq 0 \Rightarrow f'(a) \leq 0$$

Θεώρημα (Rolle)

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b)$ τότε $\exists \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$



Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange)

► Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b) , τότε $\exists \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

Απόδειξη

Η $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b - a)$

$g(a) = g(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ (Από Θ. Rolle)

$$g'(\xi) = 0$$

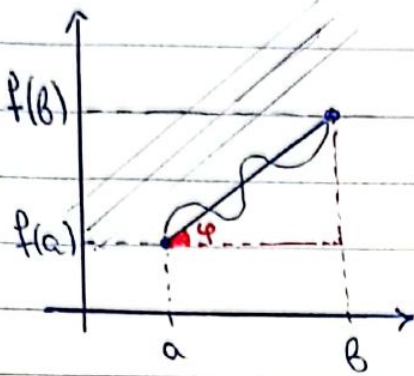
Θεώρημα (Cauchy)

► Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς. Παραγωγίσιμες στο (a, b) . Τότε $\exists \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$

Απόδειξη

Η $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις Rolle αφού $h(a) = h(b) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a)$

Γεωμετρική Ερμηνεία



Άσκηση

- Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Αποδείξτε ότι $\exists (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$ που είναι τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n f'(\xi_n) = 0$

Λύση

Με Ο.Μ.Τ

$$\xi \in (a, b)$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

- Έστω $b=2n, a=n, n \in \mathbb{N}, \xi \in (n, 2n)$:
 $f(2n) - f(n) = f'(\xi_n)n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2n) - f(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\xi_n)n$$

$$0 = l - l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(2n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$$

$$\Rightarrow \exists \xi_n, n < \xi_n < 2n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty \text{ τέτοια ώστε } \lim_{n \rightarrow +\infty} n f'(\xi_n) = 0$$

► Όμως $n |f'(\xi_n)| \leq \xi_n |f'(\xi_n)| \leq 2n |f'(\xi_n)|$

Κριτήριο Παραβολής

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n |f'(\xi_n)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n f'(\xi_n) = 0$$