



Πέμπτη 24 Μαΐου 2018

Διδάσκοντες: Α. Τερσένοβ, Α. Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II

Φυλλάδιο 12 (Επαναληπτικό)

1). Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της

$$x^2 + y^3 + 3xy + 3xz - 6z^3 = 0$$

στο σημείο $(1, -1, -1)$.

2). Βρείτε την παράγωγο της

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2,$$

στο σημείο $(1, -1, 1)$, στην κατεύθυνση $(1, 1, 1)$. Σε ποιά κατεύθυνση η παράγωγος της f στο σημείο $(1, -1, 1)$, είναι η ελάχιστη δυνατή;

3). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο $(0, 0)$.

4). Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^b}{(x^2 + y^2)^m} & \text{για } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{για } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Προσδιορίστε τις τιμές των $a \geq 0, b \geq 0, m > 0$ για τις οποίες η συνάρτηση είναι συνεχής.

Υπόδειξη:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f^\gamma(x, y) = 0 \text{ για } \gamma > 0,$$

(π.χ. $\gamma = 1/m$)

5). Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange* προσδιορίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών $x + y = 0$ και $ax + by + c = 0$ όπου $a, b, c \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 > 0$.

6). Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange* προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή της

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{2/m}, \quad m > 0$$

με περιορισμό

$$x + y + z = 1.$$

Υπόδειξη: Αν $g(x, y, z) \geq 0$ και σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0, z_0) ισχύει

$$g(x_0, y_0, z_0) \leq g(x, y, z),$$

τότε (στην ίδια περιοχή) έχουμε

$$g^k(x_0, y_0, z_0) \leq g^k(x, y, z) \quad \text{με } k > 0,$$

(π.χ. $k = m/2$) και αντιστρόφως.

7). Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ είναι $C^1(\mathbf{R}^2)$ συνάρτηση που ικανοποιεί

$$f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) = 1, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Θέτουμε

$$g(r, \theta) = f(x, y), \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Αποδείξτε ότι

$$g_r^2(r, \theta) + \frac{1}{r^2} g_\theta^2(r, \theta) = 1, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

8). Βρείτε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) ώστε να υπάρχουν σε μια γειτονιά του σημείου συναρτήσεις $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ που να λύνουν το σύστημα

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + z^2 + u^3 + v^3 - 2uv &= 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 + u^4 + v^4 - 3u^2v &= 0. \end{aligned}$$

9). Να γίνει ένας πρόχειρος σχεδιασμός της καμπύλης

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Ποιά είναι η σχέση της καμπύλης με την ευθεία

$$x + y = -1?$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα το Θ . Πεπλεγμένης συνάρτησης.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!