



Πέμπτη 8 Μαρτίου 2018

Διδάσκοντες: Α. Τερσένοβ, Α. Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II

Φυλλάδιο 5

1)[⊗]. Γιατί μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3, \quad x, y \in \mathbf{R},$$

εφάπτονται στο σημείο $(0, 0)$;

2)[⊗]. Να υπολογίστε τα $\nabla h(x, y)$, $\mathbf{D}h(x, y)$, όπου

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y), \quad f(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2},$$

$$g(x, y) = (e^{x^2} + e^{-y^2}, e^{-x^2} + e^{y^2}), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

α) Με αντικατάσταση

β) Με χρήση του κανόνα αλυσίδας

$$\mathbf{D}h(x, y) = \mathbf{D}f(g(x, y)) \cdot \mathbf{D}g(x, y)$$

3)[⊗]. Να υπολογίστε τα $\nabla h(x, y)$, $\mathbf{D}h(x, y)$, όπου

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y), \quad f(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2},$$

$$g(x, y, z) = (e^{x^2} + \sin y^2 + \cos^2 z, e^{x^2} + \cos y^2 + \sin^2 z), \quad x, y, z \in \mathbf{R}$$

α) Με αντικατάσταση

β) Με χρήση του κανόνα αλυσίδας

$$\mathbf{D}h(x, y, z) = \mathbf{D}f(g(x, y, z)) \cdot \mathbf{D}g(x, y, z)$$

4)[⊗]. Χρησιμοποιώντας την ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας, αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 y \sin \frac{1}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

στο σημείο $(0, 0)$ είναι παραγωγίσιμη.

5). Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} x y \sin \frac{1}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ ενώ δεν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

6). Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0, \quad x, y, z \in \mathbf{R}$$

και επιφάνεια Σ τέτοια ώστε

$$(x, y, z) \in \Sigma \implies F(x, y, z) = 0.$$

Θεωρούμε γνωστό ότι υπάρχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = x(y, z)$ ώστε

$$(x(y, z), y, z) \in \Sigma, \quad \forall y, z \in \mathbf{R}, \quad \text{και} \quad F(x(y, z), y, z) = 0, \quad y, z \in \mathbf{R},$$

και αντίστοιχα $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ ώστε

$$(x, y(x, z), z) \in \Sigma, \quad \forall x, z \in \mathbf{R}, \quad \text{και} \quad F(x, y(x, z), z) = 0, \quad x, z \in \mathbf{R},$$

$$(x, y, z(x, y)) \in \Sigma, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}, \quad \text{και} \quad F(x, y, z(x, y)) = 0, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε τότε ότι ισχύει

$$\frac{\partial y(x, z)}{\partial x} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \frac{\partial x(y, z)}{\partial z} = -1.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο Πέμπτης)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!