



Πέμπτη 15 Μαρτίου 2018

Διδάσκοντες: Α. Τερσένοβ, Α. Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II

Φυλλάδιο 6

1)[⊗]. Έστω ότι η $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$, σε ποια κατεύθυνση $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ ($\|\nu\| = 1$) η παράγωγος

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$$

παίρνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή ;

2)[⊗]. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια

$$\cos(xy) - e^z + 2 = 0,$$

στο σημείο $(1, \pi, 0)$. Στη συνέχεια βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφανείας στο $(1, \pi, 0)$.

3)[⊗]. α) Έστω ότι $f(u_1, u_2, u_3, u_4) : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη και οι $u_i(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ παραγωγίσιμες. Προσδιορίστε την παράγωγο

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z), u_4(x, y, z))$$

β) Εφαρμόστε τον τύπο που βρήκατε για

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1^2 + u_2 u_3 - e^{u_4}, \quad u_1 = xyz, \quad u_2 = x, \quad u_3 = y, \quad u_4 = z.$$

4)[⊗]. α) Έστω ότι οι $y(x)$ ($x(y)$) είναι παραγωγίσιμες και ορίζονται πεπλεγμένα από την

$$G(x, y) = 0$$

όπου η G δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση, δηλαδή ισχύουν

$$G(x, y(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \text{και} \quad G(x(y), y) = 0, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x))} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$$

$$\left(\frac{dx}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x(y), y)}{\frac{\partial G}{\partial x}(x(y), y)} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x(y), y) \neq 0 \right)$$

β) Εφαρμόστε τους τύπους αυτούς για

$$G = x^2 + y^3 + e^{x-y} - x + 1.$$

5). Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση (eikonal equation)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 = 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Θέτουμε

$$f(x, y) = F(r, \theta), \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Αποδείξτε τότε ότι για $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ισχύει

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right)^2 = 1.$$

6). Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, που είναι τέτοια ώστε

$$f(0, 1) \leq f(x, y) \leq f(0, 0), \quad \forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Αποδείξτε τότε ότι ισχύουν

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

$$ii) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \leq 0.$$

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f που να ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης και ταυτόχρονα να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) < 0.$$

Υπόδειξη: Κάνετε κατάλληλη χρήση της παραγώγου κατά κατεύθυνση. Για παράδειγμα παρατηρήστε ότι για $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$, $|\vec{v}| = 1$, $0 < t < 1$, ισχύει

$$f(t\vec{v}) \leq f(0, 0), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο Πέμπτης)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!