



Πέμπτη 22 Μαρτίου 2018

Διδάσκοντες: Α. Τερσένοβ, Α. Τερτίκας

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II**

Φυλλάδιο 7

1)<sup>⊗</sup>. Επαληθεύστε την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων δευτέρας τάξεως για την συνάρτηση

$$f(x, y) = xe^{xy} + \sin(xy) + \ln(1 + x^2y^2) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

2)<sup>⊗</sup>. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{για } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{για } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

α. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$f_{xy}(x, y), \quad f_{yx}(x, y) \quad \text{για } x^2 + y^2 \neq 0.$$

β. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$f_{xy}(0, 0), \quad f_{yx}(0, 0).$$

γ. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x, y)$  δεν είναι  $\mathbf{C}^2$  συνάρτηση.

3)<sup>⊗</sup>. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$z = f(x, y) \quad \text{με} \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

α. Προσδιορίστε την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η συνάρτηση  $f$  στο σημείο  $(1, 1)$  αυξάνει γρηγορότερα.

β. Προσδιορίστε το κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο  $(1, 1, 0)$ .

4)<sup>⊗</sup>. Υποθέτουμε ότι ένα βουνό έχει το σχήμα του ελλειπτικού παραβολοειδούς

$$z = 12 - 3x^2 - 4y^2, \quad 3x^2 + 4y^2 \leq 12,$$

όπου  $x$  και  $y$  είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες (ανατολή-δύση και βορράς -νότος αντίστοιχα) και  $z$  είναι το υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Στο σημείο  $(1, 1)$  σε ποιά κατεύθυνση

αυξάνει γρηγορότερα το υψόμετρο; Αν αφήναμε ένα βόλο στο σημείο  $(1, 1)$  σε ποιά διεύθυνση θα άρχιζε να κυλάει;

5)<sup>⊗</sup>. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{1/2}|y|^3}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

έχει παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση  $\vec{v}$ ,  $|\vec{v}| = 1$ , στο σημείο  $(0, 0)$ , την οποία και να προσδιορίσετε. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο  $(0, 0)$ . Συμπεράνατε ότι η  $f$  δεν παραγωγίζεται στο  $(0, 0)$ .

6) Έστω  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  είναι  $C^3(\mathbf{R}^3)$  συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε κατάλληλα να χρησιμοποιήσετε ότι αν  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  είναι  $C^2(\mathbf{R}^3)$  συνάρτηση τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

7) Έστω  $f, g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  είναι τέτοιες ώστε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί

$$\nabla f(x, y, z) = g(x, y, z)(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Αποδείξτε ότι αν το σημείο  $(x, y, z)$  ικανοποιεί  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , τότε θα ισχύει

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 1).$$

Υπόδειξη: Μελετήστε τη συνάρτηση  $f(\gamma(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , όπου  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  τυχαία παραγωγίσιμη καμπύλη τέτοια ώστε να ικανοποιεί

$$\gamma(0) = (0, 0, 1), \quad \gamma(1) = (x, y, z), \quad \text{και} \quad |\gamma(t)|^2 = 1, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο Πέμπτης)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**