



Πέμπτη 29 Μαρτίου 2018

Διδάσκοντες: Α. Τερσένοβ, Α. Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II

Φυλλάδιο 8

1)[⊗]. Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ αρμονική συνάρτηση, δηλ. ικανοποιεί

$$f_{uu}(u, v) + f_{vv}(u, v) = 0, \quad \forall u, v \in \mathbf{R},$$

και ορίζουμε

$$w(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \quad u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}, \quad v(x, y) = xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι και η w είναι αρμονική συνάρτηση, δηλ. ικανοποιεί

$$w_{xx}(x, y) + w_{yy}(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

2)[⊗]. Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και θέτουμε g με

$$g(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right), \quad \forall xy \neq 0.$$

Αποδείξτε ότι η g ικανοποιεί

$$x^2 g_x(x, y) - y^2 g_y(x, y) = G(x, y) g(x, y), \quad \forall xy \neq 0,$$

για κατάλληλη επιλογή συγκεκριμένης συνάρτησης G την οποία και να προσδιορίσετε.

3)[⊗]. Προσδιορίστε τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης της συνάρτησης $h = f \circ g$, αν

$$f(u, v, w) = uv + vw, \quad u, v, w \in \mathbf{R},$$

και

$$g(x, y) = (xy, x^2 + y^2, x + y), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

4)[⊗]. Έστω $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$ παραγωγίσιμη καμπύλη στο επίπεδο και $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει

$$x'(t) f_x(x(t), y(t)) + y'(t) f_y(x(t), y(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Αποδείξτε ότι

$$f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0)).$$

5). Έστω

$$f(u, v, w) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

και

$$\bar{g}(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \bar{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y))$$

δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θεωρούμε τη σύνθεση

$$h = f \circ \bar{g} \quad \left(h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y)) \right)$$

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους 2ης τάξεως:

$$h_{xx}, \quad h_{xy}, \quad h_{yy}.$$

6) Η θερμοκρασία T στο σημείο (x, y) του επιπέδου δίνεται από

$$T(x, y) = 4x^2 - 6\sqrt{3}xy + 4y^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας

α) Επάνω στα σημεία του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 1.$$

β) Επάνω στα σημεία της έλλειψης

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε κατάλληλη παραμετρικοποίηση των καμπυλών.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο Πέμπτης)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!