ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 11 Δεκεμβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 10

1)$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x) \ ,$$

και

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2} \ \} \ .$$

2)$^{\otimes}$ Έστω $B_1 = \{ \ \mathbf{X} = (x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το μηδέν και $f : B_1 \to (0,\infty)$ η ομαλή βαθμωτή συνάρτηση που ικανοποιεί

$$|\nabla f(\mathbf{X})|^2 = f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_1,$$

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{X}) \nabla f(\mathbf{X})) = 2f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_1 \ .$$

Αποδείξτε οτι

$$\int \int_{\partial B_1} \nabla f \cdot \mathbf{n} \, dS \ = \frac{4\pi}{3},$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη μοναδιαία σφαίρα με κατεύθυνση προς τα έξω.

3)$^{\otimes}$ Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (y^2 + \cos z - y \sin x, z^2 + \cos x - z \sin y, x^2 + \cos y - x \sin z) \ .$$

Βρείτε διανυσματικά πεδία $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{R}, \ \ \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}, \ \ \nabla \cdot \mathbf{R} = 0.$$

4)$^{\otimes}$ Έστω D ομαλό στερεό και $\vec{\nu}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S του στερεού με διεύθυνση προς τα έξω του στερεού. Δίνονται επίσης τα ομαλά διανυσματικά πεδία $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$ που ικανοποιούν

$$\nabla \cdot \mathbf{F_1} = \nabla \cdot \mathbf{F_2}, \ \ \nabla \times \mathbf{F_1} = \nabla \times \mathbf{F_2}.$$

Εαν επιπρόσθετα ισχύει

$$\mathbf{F_1} \cdot \vec{\nu} = \mathbf{F_2} \cdot \vec{\nu} \text{ στην } S,$$

αποδείξτε τότε

$$\mathbf{F_1}(x, y, z) = \mathbf{F_2}(x, y, x), \ \ \forall (x, y, z) \in D.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!