

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 23 Οκτωβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 4

1)$^{\otimes}$ Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \int_x^\infty xe^{-y^3} dydx \ ,$$

σχεδιάζοντας αρχικά το χωρίο ολοκλήρωσης.

2)$^{\otimes}$ Αποδείξτε την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx\, dy,$$

χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.
Υπόδειξη: Θεωρείστε αρχικά το ολοκλήρωμα

$$\int\int_{B_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx\, dy,$$

3)$^{\otimes}$ Υπολογίστε το $\int_{\vec{\sigma}} f ds$, όπου $f(x,y,z) = -z$ και $\vec{\sigma}(t) = (t\cos t, t\sin t, -t)$ για $0 \le t \le 2\pi$.

4)$^{\otimes}$ Να υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, -xy, z)$

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

και $\vec{\sigma}$ είναι η καμπύλη

$$\vec{\sigma}(t) = (t, t-1, t^2), \ \ t \in [-1,1].$$

5) Υπολογίστε το $\int_C x^2 dx - ydy + dz$ όπου η C είναι μια τυχαία προσανατολισμένη απλή καμπύλη που έχει αρχή το $(0,1,0)$ και τέλος το $(3,-2,1)$.

6) Έστω $\vec{\sigma} : [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}^3$ μία ομαλή καμπύλη με $\vec{\sigma}'(t) \neq 0, \ \ t \in [\alpha,\beta]$.

(α) Αν τα διανύσματα $\vec{F}(\vec{\sigma}(t))$, $\vec{\sigma'}(t)$ είναι κάθετα για όλα $t \in [\alpha, \beta]$ αποδείξτε ότι

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \ .$$

(β) Αν τα διανύσματα $\vec{F}(\vec{\sigma}(t))$, $\vec{\sigma'}(t)$ είναι ομόρροπα διανύσματα για όλα $t \in [\alpha, \beta]$ αποδείξτε ότι

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \|\vec{F}\| ds \ .$$

Υπόδειξη: Αν είναι ομόρροπα διανύσματα, αποδείξτε αρχικά ότι υπάρχει $\lambda(t) \geq 0$ ώστε να ισχύει $\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = \lambda(t)\vec{\sigma'}(t)$.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!