

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 30 Οκτωβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 5

1)$^{\otimes}$ Δίδεται η επιφάνεια $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, 2x^2 + 3y^2)$.
(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Στο σημείο $\Phi(x_0, y_0)$ βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

2)$^{\otimes}$ Να περιγραφεί σε παραμετρική μορφή η επιφάνεια του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \ .$$

Στη συνέχεια
(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Σε ένα τυχαίο σημείο βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

3)$^{\otimes}$ Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τις

$$x + y + z = 1,$$

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

4)$^{\otimes}$ Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται απο τον κώνο

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

5) Δίδεται η επιφάνεια $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u\sqrt{2} \sin v, 2u^2), \quad u \geq 0, \quad v \in [0, 2\pi) \ .$$

(α) Δείξτε οτι η επιφάνεια είναι λεία σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
(β) Στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα και στη συνέχεια το εφαπτόμενο επίπεδο.

6) Ο κύλινδρος

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

διαιρεί την μοναδιαία σφαίρα σε δύο χωρία S_1 και S_2, από τα οποία το S_1 είναι στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ενώ το S_2 έξω από αυτόν. Βρείτε το λόγο των εμβαδών

$$\frac{A(S_2)}{A(S_1)}.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!