ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 6 Νοεμβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 6

1)$^{\otimes}$ Βρείτε τη ροή του διανυσματικού πεδίου

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}=(y^2,-xy,z^2)\ ,$$

με προσανατολισμό του μοναδιαίου προς έξω από τη μοναδιαία σφαίρα.

2)$^{\otimes}$ Έστω η καμπύλη $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, όπου f ομαλή συνάρτηση. Περιστρέφουμε την καμπύλη αυτή γύρω από τον άξονα x, οπότε σχηματίζεται η επιφάνεια εκ περιστροφής S.
(α) Δείξτε οτι μία παραμετρικοποίηση της S δίδεται από

$$x=u,\quad y=f(u)\cos v,\quad z=f(u)\sin v,\qquad a\leq u\leq b,\quad 0\leq v\leq 2\pi\ .$$

(β) Δείξτε οτι το εμβαδόν της S δίδεται απο

$$A(S)=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\ .$$

3)$^{\otimes}$ Έστω S η κλειστή επιφάνεια που αποτελείται απο το ημισφαίριο

$$x^2+y^2+z^2=1,\qquad z\geq 0\ ,$$

και τη βάση του

$$x^2+y^2\leq 1,\qquad z=0\ ,$$

με προσανατολισμό του μοναδιαίου διανύσματος προς τα έξω του ημισφαιρίου. Να υπολογισθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}\ .$$

4)$^{\otimes}$ Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (2x^3 - y^3, x^3 + y^3) \cdot d\vec{r},$$

όπου C είναι η καμπύλη $x^2 + y^2 = 1$, με προσανατολισμό αντίθετο της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

5) Δίδεται στερεό που είναι η ένωση ενός τμήματος κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad 1 \leq z \leq 2 \ ,$$

και μισής μπάλας

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 1, \qquad z \geq 2 \ .$$

Έστω S η επιφάνεια του συνόρου του στερεού με προσανατολισμό του μοναδιαίου καθέτου προς τα έξω. Υπολογίστε τη ροή $\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + z\mathbf{k} \ ,$$

δια μέσου της επιφάνειας S.

6) Υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

όπου ∂D η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε κατάλληλα το Θεώρημα Green.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!