

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 20 Νοεμβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 7

1)$^{\otimes}$ Για το ακτινικό διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z) \ ,$$

Επαληθεύστε το θώρημα του Stokes όταν η επιφάνεια είναι το ένω ημισφαίριο

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad x^2+y^2 \leq 1 \ .$$

2)$^{\otimes}$ Με χρήση του Θεωρήματος Stokes υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \ ,$$

όπου C η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2 = 2y$ με το επίπεδο $y = z$.

3)$^{\otimes}$ Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται απο δύο κομματια S_1 και S_2. Το S_1 δίδεται από

$$x^2+y^2 = 1, \qquad 0 \leq z \leq 1 \ ,$$

ενώ το S_2 δίδεται από

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, \qquad z \geq 1 \ .$$

Ο προσανατολισμός της S είναι αυτός του καθέτου προς τα έξω της σφαίρας. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2) \ .$$

Να υπολογίσετε το

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \ .$$

4)$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το

$$\int \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz) \ ,$$

και S η επιφάνεια των πέντε από τις έξη έδρες του κύβου $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ που δεν βρίσκονται πάνω στο $x0y$ επίπεδο.

5) Αν $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, όπου $\mathbf{a}$ σταθερό διάνυσμα, να δείξετε οτι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \ ,$$

όπου C είναι το σύνορο μιας επιφάνειας S και $\mathbf{n}$ κατάλληλη επιλογή του μοναδιαίου κάθετου στην S.

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!