ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 27 Νοεμβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 8

1)$^{\otimes}$ Έστω S η κλειστή επιφάνεια που αποτελείται απο το ημισφαίριο

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad z\geq 0\ ,$$

και τη βάση του

$$x^2+y^2\leq 1, \quad z=0\ ,$$

με προσανατολισμό του μοναδιαίου διανύσματος προς τα έξω του ημισφαιρίου. Να υπολογισθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k},$$

με χρήση του Θεωρ. Gauss.

2)$^{\otimes}$ Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται απο δύο κομματια S_1 και S_2. Το S_1 δίδεται από

$$x^2+y^2=1, \quad 0\leq z\leq 1\ ,$$

ενώ το S_2 δίδεται από

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1, \quad z\geq 1\ .$$

Ο προσανατολισμός της S είναι αυτός του καθέτου προς τα έξω της σφαίρας. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x^3+e^{z^2},y^3-e^{z^2},e^{x^2+y^2})\ .$$

Να υπολογίσετε το

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ .$$

3)$^{\otimes}$ Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1,1,2z(x^2+y^2)^2) \ ,$$

και S η επιφάνεια του κυλίνδρου

$$x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \ ,$$

με προσανατολισμό καθέτου διανύσματος προς τα έξω του κυλίνδρου.

4)$^{\otimes}$ Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ φραγμένο στερεό και S η επιφάνεια του στερεού με προσανατολισμό του καθέτου διανύσματος προς τα έξω του στερεού. Αποδείξτε οτι

$$\int\int_S (x+y^{2025},\ y+z^{2025},\ -z+x^{2025}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int\int_\Omega \ dxdydz \ .$$

5) Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ φραγμένο στερεό και S η επιφάνεια του στερεού με προσανατολισμό του καθέτου διανύσματος προς τα έξω του στερεού.Υποθέτουμε οτι η αρχή των αξόνων είναι εκτός του στερεού και της επιφάνειάς του. Αποδείξτε οτι

$$\int\int_S \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_\Omega \ \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \ dxdydz \ .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!