

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 4 Δεκεμβρίου 2025

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Φυλλάδιο 9

1)$^{\otimes}$ Έστω

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y, (x^3+y^3), 0) \ .$$

(α) Επαληθεύστε ότι $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
(β) Βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.

2)$^{\otimes}$ Έστω

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y) \ .$$

(α) Επαληθεύστε ότι $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
(β) Βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.

3)$^{\otimes}$ Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (y, xz, -z) \ .$$

(α) Υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$;
(β) Υπάρχει διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$;

4)$^{\otimes}$ Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\cos y\,\mathbf{i} - \sin y\,\mathbf{j} + \sin x\,\mathbf{k} \ .$$

(α)Δείξτε οτι $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.
(β) Βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G_0}$ ώστε $\nabla \times \mathbf{G_0} = \mathbf{F}$.
(γ) Αν $\mathbf{G}$ είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο που επίσης ικανοποιεί $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$, αποδείξτε οτι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ώστε

$$\mathbf{G} = \mathbf{G_0} + \nabla f \ .$$

5) Έστω $\mathbf{F} : B_1 \to \mathbf{R}^3$ ομαλό διανυσματικό πεδίο, (όπου B_1 η μοναδιαία μπάλα) τέτοιο ώστε

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 3, \quad \mathbf{X} \in B_1 \ ,$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{X} \in B_1 \ ,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{X} \in \partial B_1 \ ,$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη μοναδιαία σφαίρα με κατεύθυνση προς τα έξω.

Αποδείξτε οτι

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in B_1 \ .$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!