ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Ιανουαρίου 2021

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξέταση Ιανουαρίου (Εμβόλιμη)

Πρώτο Μέρος

Θέμα 1. (2.5 μονάδες) Να βρεθεί η λύση της ΔΕ (σε κλειστή μορφή) που ικανοποιεί

$$2xy^2 + x^2y^3 \quad + \quad (2x^2y + x^3y^2 - 3y^2\, e^{-xy})\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

εαν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $f(xy)$.

Θέμα 2. (2.5 μονάδες) Για $\phi \in C^2(\mathbf{R})$ θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &- u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ \ t > 0,\\ u(x,0) &= \phi(x), \ \ x \in \mathbf{R},\\ u_t(x,0) &= \phi'(x), \ \ x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

α) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$ του προβλήματος.

β) Εαν επιπρόσθετα η ϕ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιεί

$$\phi(x) < 0, \ \ \forall x \in (-2,-1) \cup (1,2),$$

και

$$\phi(x) > 0, \ \ \forall x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,+\infty),$$

αποδείξτε αρχικά ότι τα σημεία $(x,t) \in \mathbf{R} \times (0,+\infty)$ που ικανοποιούν $u(x,t) = 0$ βρίσκονται πάνω σε ημιευθείες και στη συνέχεια βρείτε τα σημεία $(x,t) \in \mathbf{R} \times (0,+\infty)$ που ικανοποιούν $u(x,t) < 0$.

Μπορείτε να χρησιμοποιείστε στοιχεία που μάθατε στο μάθημα.

Διάρκεια πρώτου μέρους **1 ώρα**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Ιανουαρίου 2021

Διδάσκων: Α. Τερτίκας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
Εξέταση Ιανουαρίου (Εμβόλιμη)

Δεύτερο Μέρος

Θέμα 3. (2,5 μονάδες) Να λυθεί το ΠΑΤ (πρόβλημα Cauchy)

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + (t-x)\, u_x(x,t) &= (x-t+1)e^{2t}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

όπου $f \in C^1(\mathbf{R})$ είναι δοθείσα συνάρτηση.

Θέμα 4. (2,5 μονάδες) α) Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις $u(x,t) = A(x)f(t)$, $x \in [0,\pi]$, $t \geq 0$, που λύνουν το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

και στη συνέχεια βρείτε τη γενική λύση του ανωτέρω προβλήματος.

β) Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$\begin{aligned} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) &= -\cos(3x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ w_x(0,t) &= w_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ w(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Διάρκεια δεύτερου μέρους **1 ώρα**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!