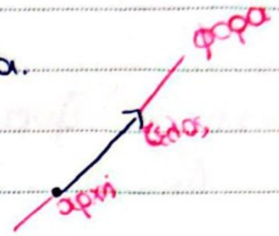
Άλγεβρα
1η διάλεξη

- Αναλυτική Γεωμετρία -

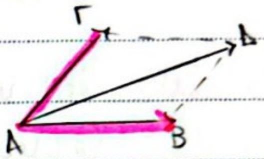
Εργαλεία: Αρχικά στις 2 διαστάσεις.

Διανύσματα | ελεύθερα διανύσματα.



Εφαρμογή σε 1 σημείο

Πως προσθέτω διανύσματα; Ο κανόνας παραλληλογράμμου



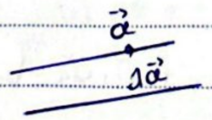
$\vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{AB}$

Ιδιότητες αθροίσματος:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (αντιμεταθετική)

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Πολλαπλασιασμός: $\lambda \cdot \vec{a}$: διάνυσμα, παράλληλο



Εαν $\lambda > 0$ ομόρροπα

$\lambda < 0$ αντίρροπα

Παράλληλα (διανύσματα)

Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι παράλληλα αν ένα από αυτά είναι πολλαπλάσιο του άλλου. δηλ $\exists\, \lambda \in R$ ώστε:

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$

Γραμμική Εξάρτηση διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_n$

Κάποιο απ' αυτά γράφεται σαν γρ. συνδυασμός των υπολοίπων.

Γραμμική Ανεξαρτησία διανυσμάτων:

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + + \lambda_n \vec{a} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Πότε τα $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n$ είναι γρ. εξαρτημένα; αν υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_i \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_1 \vec{a} + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Ιδιότητες: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{a}$$

$$(\lambda - \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} - \mu \vec{a}$$

Βασική ιδιότητα: Αν $a_1, \dots, a_n$ γρ. ανεξάρτητα και $\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \\ &= \mu_1 \vec{a}_1 + \dots + \mu_n \vec{a}_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε $\lambda_i = \mu_i \ \forall i = 1, 2, \dots, n$.

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{a}_1 - \mu_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 - \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n - \mu_n \vec{a}_n = 0 \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda_1 - \mu_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1 \\ &\lambda_2 - \mu_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \mu_2 \\ &\lambda_n - \mu_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = \mu_n \end{aligned}$$

Άλγεβρα 2η διάλεξη.
26/09/24.

Παράλληλα διανύσματα / Γρ. εξάρτηση

$\vec{u}, \vec{v}$ όταν $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

- Γραμμική εξάρτηση

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

όταν $\exists \lambda_i \neq 0$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$.

$\Leftrightarrow \vec{u}_i = -\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \vec{u}_i - \dots - \lambda.$

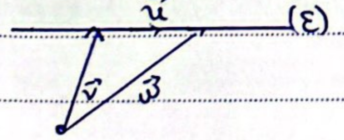
Πρόταση: Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα
κάθε διάνυσμα στο επίπεδο $\vec{u}, \vec{v}$.

Η διάσταση του επιπέδου 2, δηλ. $\exists$ βάση $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

i) Τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γρ. ανεξάρτητα

ii) Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο είναι γρ. συνδυασμός των στοιχείων της βάσης.

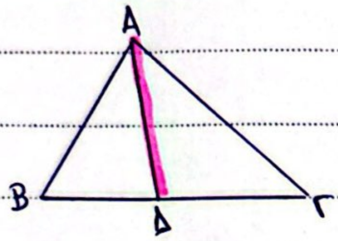
Παραμετρική μορφή ευθειών:



$\vec{w} = \vec{v} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.: Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, επιλέγουμε Δ το μέσο της ΒΓ. Να περιγραφεί το $\vec{Α\Delta}$ σαν γρ. συνδυασμός 2 διανυσμάτων

Απάντηση:



Το $\vec{Α\Delta}$ γρ. συνδ. των $\vec{ΑΒ}, \vec{Α\Gamma}$

$\vec{Α\Gamma}, \vec{Β\Gamma}$

• $\vec{Α\Delta} \to \vec{Α\Gamma}, \vec{Β\Gamma}$

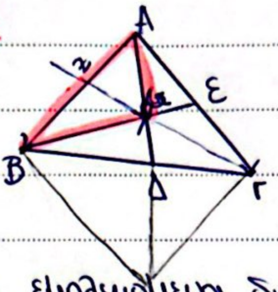
$$\vec{Α\Delta} = \vec{Α\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{Α\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{\Gamma Β}$$
$$= \vec{Α\Gamma} - \frac{1}{2}\vec{Β\Gamma}$$

$\vec{Α\Delta} \to \vec{ΑΒ}, \vec{Α\Gamma}$

$$\vec{Α\Delta} = \vec{Α\Gamma} - \frac{1}{2}\vec{Β\Gamma} = \vec{Α\Gamma} - \frac{1}{2}(\vec{ΒΑ} + \vec{Α\Gamma}) = \vec{Α\Gamma} - \frac{1}{2}(-\vec{ΑΒ} + \vec{Α\Gamma}) =$$
$$= \vec{Α\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{ΑΒ} - \frac{1}{2}\vec{Α\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{ΑΒ} + \frac{1}{2}\vec{Α\Gamma} = \frac{1}{2}(\vec{ΑΒ} + \vec{Α\Gamma})$$

Παράδειγμα: Σε ένα τρίγωνο αποδείξτε ότι οι διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απάντηση:



Όλα τα επιλεγόμενα διανύσματα θα περιγράφουν τον γραμμ. συνδυασμό του $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$

το $\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

$$\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{B\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{A\Gamma})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}(-\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$$

$$= -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$$

- $\vec{A \cdot G} = x \cdot \vec{A\Delta} = x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}\right) = \frac{x}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{x}{2}\vec{A\Gamma}$
- $\vec{B \cdot G} = y\,\vec{B \cdot E} = y\left(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}\right) = -y \cdot \vec{AB} + \frac{y}{2}\vec{A\Gamma}$

$$\vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} = \vec{A \cdot G} - \vec{BG} = \frac{x}{2}\vec{AB} + \frac{x}{2}\vec{A\Gamma} - \left(-y \cdot \vec{AB} + \frac{y}{2}\vec{A\Gamma}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\vec{AB} + \frac{x}{2}\vec{A\Gamma} + y\vec{AB} - \frac{y}{2}\vec{A\Gamma} =$$

$$= \left(\frac{x}{2} + y\right)\vec{AB} + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\vec{A\Gamma}$$

$$\vec{AB} = \left(\frac{x}{2} + y\right)\vec{AB} + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)\vec{AB} - \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

Η **γραμμική ανεξαρτησία** των $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ δίνει:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{x}{2} - y &= 0 \\ -\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 1 - \frac{x}{2} - x &= 0 \\ y &= x \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma G} = \vec{\Gamma A} + \vec{AG} = -\vec{A\Gamma} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}\right).$$

$$= -\vec{A\Gamma} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{A\Gamma} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$$

$$\Rightarrow \mu\vec{\Gamma G} = \vec{\Gamma Z} \Rightarrow \vec{\Gamma Z} = \mu\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}\right)$$

Όμως: $\vec{\Gamma Z} = \vec{\Gamma A} + \vec{AZ} = -\vec{A\Gamma} + y\cdot\vec{AB}$

Επομένως, $\mu\left(\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}\right) = -\vec{A\Gamma} + v\vec{AB}$

$$\frac{\mu}{3}\vec{AB} - \frac{2\mu}{3}\vec{A\Gamma} = -\vec{A\Gamma} + r\cdot\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\mu}{3} = r \\ -\frac{2\mu}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\vec{AZ} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

• Πότε $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ είναι γρ. ανεξάρτητα?

Αν έχω για $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$

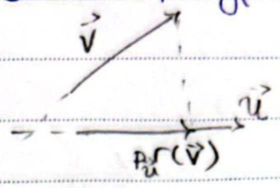
$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

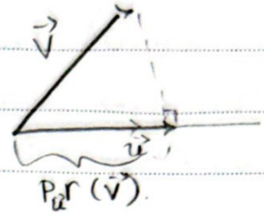
• Εσωτερικό Γινόμενο

Άλγεβρα 3η διάλεξη

Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\vec{u},\vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα





Ιδιότητες προβολής

Πρόταση: Έστω $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \neq 0$ και $pr_{\vec{w}}(\vec{u})$, $pr_{\vec{w}}(\vec{v})$

Τότε α) $pr_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v}) = pr_{\vec{w}}(\vec{u}) + pr_{\vec{w}}(\vec{v})$

β) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ $pr_{\vec{w}}(\lambda\vec{u}) = \lambda\, pr_{\vec{w}}(\vec{u})$

Προσημασμένος αριθμός: $(pr_{\vec{w}}(\vec{v}))\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = pr_{\vec{w}}(\vec{u})$

Πρόταση: Έστω $\vec{u},\vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα τότε

$$|\vec{v}|(pr_{\vec{u}}(\vec{v})) = |\vec{v}|(pr_{\vec{u}}(\vec{u}))$$

Εσωτερικό Γινόμενο

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|(pr_{\vec{a}}\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

Ιδιότητες εσ. γινομένου:

α) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ αντιμεταθετική

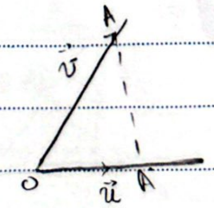
β) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

γ) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{\gamma}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\vec{\gamma}$ επιμεριστική

δ) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{a}$

ε) Πότε $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Υπολογισμός της προβολής:



$pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{OA'}$

Απ: Το διάνυσμα της προβολής είναι παράλληλο του $\vec{u}$, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τα γρ. ανεξάρτητα $\vec{u},\vec{v}$ τότε $\vec{OA'} = \lambda\vec{u} \perp \vec{AA'}$ (κάθετο ορθογώνιο)

Όμως $\vec{AA'} = \vec{AO} + \vec{OA'} = -\vec{v} + \lambda\vec{u} \perp \vec{u}$

$$\vec{AA'} \perp \vec{OA'} \Leftrightarrow \vec{AA'}\cdot\vec{OA'} = 0.$$

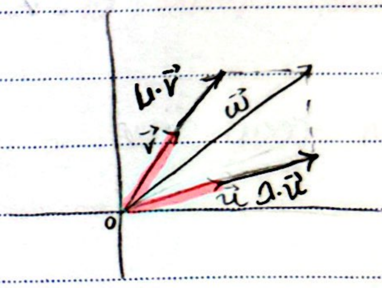
$$\Leftrightarrow (-\vec{v}+\lambda\vec{u})\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -\vec{v}\vec{u} + (\lambda\vec{u})\vec{u} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\vec{v}\cdot\vec{u} + \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u}) \Leftrightarrow -\vec{v}\cdot\vec{u} + \lambda\cdot|\vec{u}|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$$

$$Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left(\vec{v}\,\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Συστήματα αναφοράς (Συστήματα συντεταγμένων).

Αν $\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα δια/τα



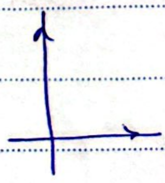
$$\vec{\omega} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}$$

Τότε $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v} \Leftrightarrow$

$(\lambda-\lambda_1)\vec{u} + (\mu-\mu_1)\vec{v} = \vec{0}$ όμως $\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα.

οπότε $\lambda-\lambda_1 = 0$, $\mu-\mu_1 = 0$

Ορθογώνια $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



ορθοκανονικό σύστημα

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = 1$

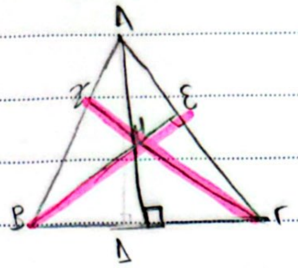
$|\vec{v}| = 1$

Ορθοκανονικό σύστημα $\hat{i}$ μοναδιαίο διάνυσμα

$\hat{j}$ $\quad |\hat{i}|=|\hat{j}|=1 \ , \ \hat{i}\cdot\hat{j}=0.$

$\vec{\omega} = x\cdot\hat{i} + y\hat{j} = (x,y)$

Εφαρμογή: Αποδείξτε πως τα ύψη στο τρίγωνο διέρχονται από το ίδιο σημείο



Αν $\hat{i},\hat{j}$ ορθοκανονικό σύστημα

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j})(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}) = (1).$

Έστω $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j} = (a_1,a_2)$

$\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j} = (b_1,b_2)$

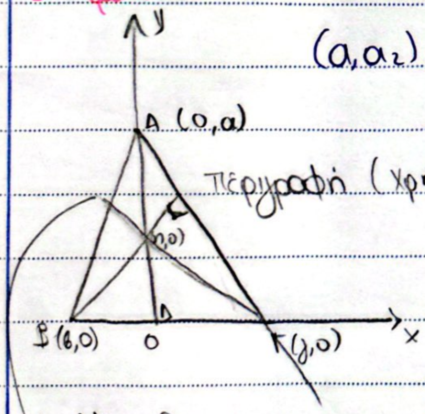
$(1) = a_1\hat{i}\,(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}) + a_2\hat{j}\,(b_1\hat{i}+b_2\hat{j})$

$= (a_1\hat{i})(b_1\hat{i}) + (a_1\hat{i})(b_2\hat{j}) + (a_2\hat{j})(b_1\hat{i}) + (a_2\hat{j})(b_2\hat{j})$

$= (a_1b_1\underbrace{\hat{i}\hat{i}}_{1} + a_1b_2\underbrace{\hat{i}\hat{j}}_{0}) + (a_2b_1\underbrace{\hat{j}\hat{i}}_{0} + a_2b_2\underbrace{\hat{j}\hat{j}}_{1})$

1ος τρόπος

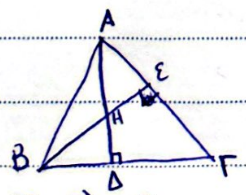
$(a_1,a_2)(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2.$



Περιγραφή (χρήση ορθογωνιότητας της ευθείας).

> Μετά θα βρούμε την ευθεία Γ,Η θα αποδείξουμε τα ορθογώνια με τα ΑΒ

2ος τρόπος Χωρίς σύστημα συντεταγμένων αναφοράς.



$\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ γρ. ανεξάρτητα

$\vec{AH} = x\cdot\vec{A\Delta}$ $\quad \vec{AH}+\vec{BH}=\vec{AB}$

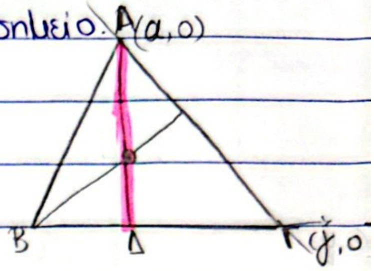
$\vec{BH} = y\cdot\vec{BE}$

$\vec{B\Delta}$ προβολή $\vec{AB}$ με προβολή περιγράφουμε τα $\vec{B\Delta}, \vec{AE}$ με βάση τα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$

Άλγεβρα 4η διάλεξη

Άσκηση

Τα τρία ύψη του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.



$\vec{AB} = (b,0) - (0,a) = (b,-a)$

$y - a = kx$

$-a = k\gamma \Rightarrow k = -\frac{a}{\gamma}$

$\vec{\Gamma E} = (0, -\frac{b\gamma}{a}) - (\gamma, 0) = \left(-\gamma, -\frac{b\gamma}{a}\right)$

$y = \frac{\gamma}{a}(x-b)$

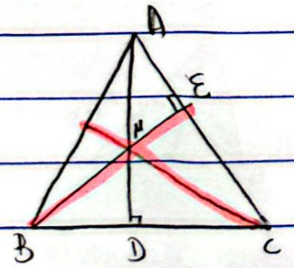
$\lambda(-\frac{a}{\gamma}) = -1$

$\lambda = \frac{\gamma}{a}$

$y_0 = -\frac{b\gamma}{a}$

$\vec{AB} \perp \vec{\Gamma E}$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{\Gamma E} = (b,-a) \cdot (-\gamma, -\frac{b\gamma}{a})$

$= -b\gamma + a\frac{b\gamma}{a} = 0.$



$\vec{AB} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{BE} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0$

$\vec{CM} \perp \vec{AB}$?

$\vec{CM} \cdot \vec{AB} = (\vec{CA} + \vec{AM})(\vec{AC} + \vec{CB})$

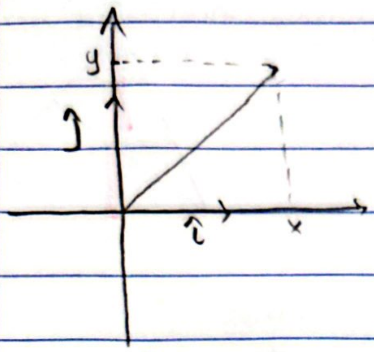
$= (-\vec{AC} + \vec{AM})(\vec{AC} - \vec{BC})$

$= -\vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} + \vec{AM} \cdot \vec{AC} - \cancel{\vec{AM} \cdot \vec{BC}}^{0}$

$= -\vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} + (\vec{AB} + \vec{BM})\vec{AC}$ 0.

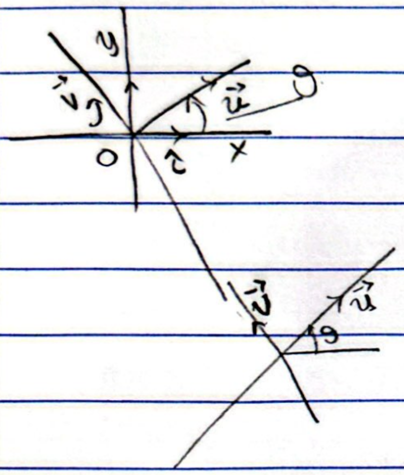
$= -\vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}\vec{BC} + \vec{AB}\,\vec{AC} + \cancel{\vec{BM} \cdot \vec{AC}}$

Ορθοκανονικά συστήματα αναφορών.



$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x,y)$$

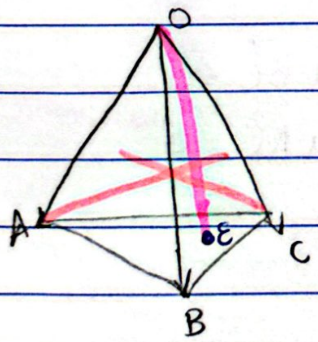
Θα πάμε σε ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα.

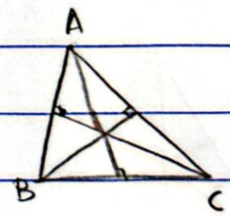


(p, q) $\quad \vec{u} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$

$$\vec{v} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

(x', y') στο καινούργιο σύστημα.





Λοιπόν: $\vec{OE} \perp$ επίπεδο των ABC.

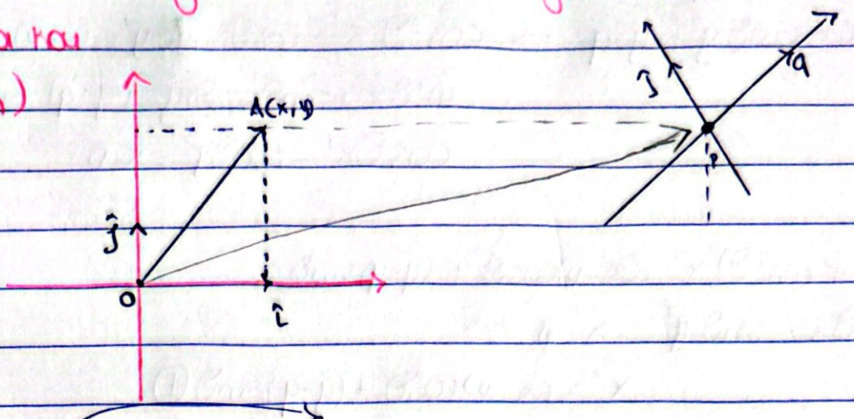
$$\vec{OE} \perp (\vec{AB}, \vec{AC}).$$

$$\vec{OE}(\lambda\vec{AB} + \mu\cdot\vec{AC}) = 0.$$

Άλγεα 5η διάλεξη

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

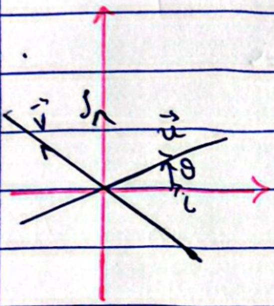
(Μεταφορά και στροφή)



$\vec{OA} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x'\hat{u} + y'\hat{v}$ το ίδιο σημείο με (x', y') στο νέο σύστημα

$\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA}$

$x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = (p,q) + x'\hat{u} + y'\hat{v}$ (*)



Προβολή στον άξονα των x.

Προβολή στην $|\hat{u}|\cos\theta$

στην y. $|\hat{u}|\sin\theta$

αντίστοιχα προβολή του $\vec{v}$.

$|\hat{v}|\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta.$

$|\vec{v}|\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta.$

$\hat{u} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$

$\vec{v} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$

* $p\hat{\imath} + q\hat{\jmath} + x'(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) + y'(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}).$

$= (p + x'\cos\theta - \sin\theta y')\hat{\imath} + (q + x'\sin\theta + y'\cos\theta)\hat{\jmath}$

$$\left.\begin{aligned} x &= p + x'\cos\theta - \sin\theta y' \\ y &= q + x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\theta x' - \sin\theta y' &= x - p \\ \sin\theta x' + \cos\theta y' &= y - q \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

$\cos\theta x' - \sin\theta y' = x - p$

$\sin\theta x' + \cos\theta y' = y - q \Rightarrow \cos^2\theta x' - \cos\theta\sin\theta y' = (x-p)\cos\theta$

$\sin^2\theta x' + \sin\theta\cos\theta y' = (y-q)\sin\theta.$

$\cos\theta x' - \sin\theta y' = x - p$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)x' = (x-p)\cos\theta + (y-q)\sin\theta$

$\cos\theta x' - \sin\theta y' = x - p \Leftrightarrow$

$x' = (x-p)\cos\theta + (y-q)\sin\theta$ ①

$\cos\theta((x-p)\cos\theta + (y-q)\sin\theta) - \sin\theta y' = x - p$

$(x-p)\cos^2\theta + (y-q)\sin\theta\cos\theta - \sin\theta y' = x - p.$

$-\sin\theta y' = (x-p)(1-\cos^2\theta) - (y-q)\sin\theta\cos\theta$

$= (x-p)\sin^2\theta - (y-q)\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

$\sin\theta \neq 0$

②) $y' = -(x-p)\sin\theta + (y-q)\cos\theta$

Η λύση που δίνεται από ①,② λύνει το σύστημα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

Άρα $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$

Επίσης $|\vec{u}+\vec{v}|^2 \geq |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{u}|^2$

$= (|\vec{u}|-|\vec{v}|)^2$

$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \geq ||\vec{u}|-|\vec{v}||$

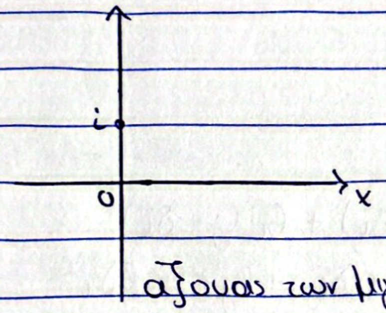
Έχουμε $|\vec{u}+\vec{v}| = ||\vec{u}|-|\vec{v}||$

μόνο αν $\cos\theta=-1$ και τότε $\vec{u}=\lambda\vec{u}$ $\lambda<0$.

Μιγαδικοί Αριθμοί

$x^2+1=0$

Δεν υπάρχει λύση αν $x\in\mathbb{R}$



$\mathbb{R}$ (real number)

$\mathbb{C}$ (comulex number).

άξονας των μιγαδικών αριθμών.

Καρτεσιανή μορφή μιγαδικών.

$z=a+bi$ $a,b\in\mathbb{R}$ → $Im(z)$ φανταστικό μέρος.

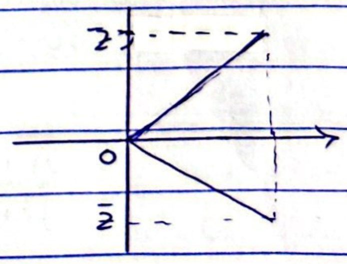
πραγματικό μέρος του z

$w=\gamma+\delta i$ $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$

$z+w=(a+\gamma)+(b+\delta)i$

Ιδιότητες: $z+w=w+z$

$z+(w+q)=(z+w)+q$



$z=a+bi$ $a,b\in\mathbb{R}$

$\bar{z}=a-bi$

Ιδιότητες: $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

Βασική Ιδιότητα

προσοχή: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ $\quad z \in \mathbb{C}$

$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}.$

$$|z|^2 = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2 - (bi)^2 \qquad \boxed{i^2 = -1}$$

$$= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

$$|\bar{z}| = \bar{z}(\bar{\bar{z}}) = \bar{z} \cdot z = |z|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{z}| = |z|$$

Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών

$z = a + bi$

$w = \gamma + \delta i$

$$z \cdot w = (a+bi)(\gamma + \delta i) = a(\gamma + \delta i) + bi(\gamma + \delta i)$$

$$= a\gamma + a\delta i + b\gamma i + b\delta i^2$$

$$= a\gamma - b\delta + (a\delta + b\gamma) i$$

$z \cdot w = w \cdot z$

$z(wq) = (zw)q$

ιδιότητες

Βοηθικό: $w \neq 0$ $\quad \dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \dfrac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$

$$\frac{a+bi}{\gamma + \delta i} = \frac{(a+bi)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{a\gamma - a\delta i + b\gamma i - b\delta i^2}{\gamma^2 + \delta^2}$$

$$= \frac{a\gamma + b\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{(b\gamma - a\delta) i}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Μιγαδικών (Μέτρο)

$z = a + bi \quad , a, b \in \mathbb{R}$

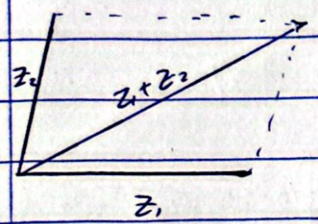
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Ιδιότητες: $|zw| = |z||w|$

Τριγωνική ανισότητα:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

πότε $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$?



Εαν z_1 ή $z_2 = 0$.

$\Rightarrow z_1 z_2 \neq 0$.

αν $\exists\ \lambda > 0 \ : \ z_2 = \lambda z_1$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2}) = z_1(\bar{z_1}+\bar{z_2}) + z_2(\bar{z_1}+\bar{z_2})$

$= z_1\bar{z_1} + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} + z_2\bar{z_2}$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 + |\bar{z_2}|$

$\overset{?}{\leq} 2|z_1||z_2|$

Πότε $t \in \mathbb{R}$? όταν $b = 0$
$\overset{\shortparallel}{a+bi}$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

αν $a = 0$: $z = bi \Rightarrow \bar{z} = -bi \} \ z = -\bar{z}$

Άλμα 6η διάλεξη

Καρτεσιανή μορφή: $z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Άθροισμα μιγαδικών: βολική η καρτεσιανή μορφή

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$: μέτρο μιγαδικών αριθμών.

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Ισότητα στους μιγαδικούς.

$w = \gamma + \delta i \quad ; \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} a = \gamma \\ b = \delta \end{cases}$

$z \cdot w = (a + bi)(\gamma + \delta i)$
$= (a\gamma - b\delta) + (a\delta + b\gamma)i$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Τριγωνομετρική μορφή: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Αν $z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$a + bi = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos\theta + i\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a \\ \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b \end{cases}$

όταν $z \neq 0$

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$.

$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\downarrow$

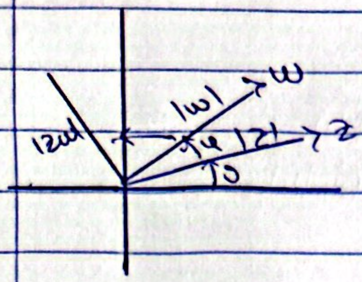
$z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= |zw| (\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

$\text{''} = \cos\theta \cdot \cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi - \sin\theta \cdot \sin\varphi$.

$= \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$

$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta$.



Στροφή μιγαδικών

$z = |z| e^{i\theta}$

$w = |z| e^{i(\theta+\varphi)}$

$= |z| e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$

$= z e^{i\varphi}.$

Εφαρμογή

Πρόβλημα να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν: $n \in \mathbb{N}$

$z^n = w.$

Λύση:

· Να βρεθούν όλες οι n-οστές ρίζες του w.

$$z^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$z^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$$

(n-οστές ρίζες της μονάδας) $z^n = 1$

Θα κάνουμε χρήση της τριγωνομετρικής μορφής μιγαδικών

$z = |z| = e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi)$

$\to z^n = (|z| e^{i\theta})^n = |z|^n (e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}.$

$z = 1 \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$\Updownarrow$

$|z|^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ $\quad \theta = \frac{2k\pi}{n}$ $\quad 0 \leq \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \Rightarrow$

$n\theta = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad 0 \leq k < n.$

Καρτεσιανή: $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$

$$\begin{bmatrix} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{bmatrix}$$

Τριγωνομετρική μορφή:

$$|z| e^{i\theta} = |\omega| e^{i\phi} \iff \begin{bmatrix} |z| = |\omega| \\ e^{i\theta} = e^{i\varphi} \quad \theta = \varphi \text{ αν } \theta, \varphi \in [0, 2\pi) \end{bmatrix}$$

$$\left| |z| e^{i\theta} \right| = \left| |\omega| \cdot e^{i\varphi} \right| \iff |z| \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} = |\omega| \underbrace{|e^{i\phi}|}_{1}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\theta = \cos\varphi \iff \theta = 2\kappa\pi \pm \varphi \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \sin\theta = \sin\varphi \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2m\pi + \varphi & m \in \mathbb{Z} \\ \theta = (2m+1)\pi - \varphi \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\theta = 2\kappa\pi + \varphi \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση (με βάση τα παραπάνω): Χωρίς χρήση τύπου Euler) (Μαθηματική Επαγωγή)

Αποδείξτε ότι $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Τότε

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \dots (\cos\phi_n + i\sin\phi_n) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n).$$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{2}$$

$$z_0 = 1 \cdot e^{i\theta_0} = e^{i0} = 1.$$
$$z_1 = 1 \cdot e^{i\theta_1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$
$$\vdots$$
$$z_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

Πίσω στο γενικό $z^n = \omega$.

Πρόβλημα: $\theta \in [0, 2\pi)$ $\quad z = |z| e^{i\theta}$, $\quad \omega = |\omega| e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow (|z| e^{i\theta})^n = |\omega| e^{i\varphi} \iff |z|^n \cdot e^{in\theta} = |\omega| e^{i\varphi} \iff$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |z|^n = |\omega| \\ e^{in\theta} = e^{i\phi} \end{array}} \iff \left[\begin{array}{l} |z| = |\omega|^{1/n} \\ n\theta = \varphi + 2\kappa\pi \end{array}\right.$$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad \theta \in \left(\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)$$

$$\frac{\varphi}{n} \leq \theta < \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\varphi}{n} \leq \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \frac{\varphi}{n} + 2\pi.$$

$$0 \leq k < n \qquad \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Αγμια Ζη διάλεξ

$n \in \mathbb{N}$: Να βρεθούν όλοι $z \in \mathbb{C}$ που δοθέντος του $w \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$z^n = w$$

Απάντηση: Θέτουμε $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ και $z = |z|e^{i\theta}$

Τότε $z^n = w \Leftrightarrow (|z|e^{i\theta})^n = |w|e^{i\varphi}$ όπου $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$

$$\Leftrightarrow |z|^n (e^{i\theta})^n = |w|e^{i\varphi}$$

$$\Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |w|e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\theta = \Phi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

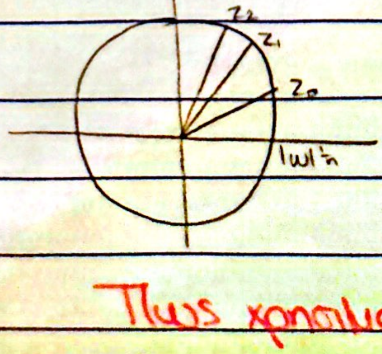
Όμως, $0 \leq \theta < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\Phi}{n} \leq \frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \frac{\Phi}{n} + 2\pi$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k < 2n \Leftrightarrow 0 \leq k < n$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\theta_k = \frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\theta_k} = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Πως χρησιμοποιούμε τους μιγαδικούς σε διάφορα προβλήματα?

Αρχικά: $\cos 2\theta$ να εκφραστεί με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών του τόξου θ.

$\cos^2\theta$

$\theta \to e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

$e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2 \Rightarrow \cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 =$

$\cos^2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta\, i + i^2\sin\theta$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$\cos 3\theta$

$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(e^{i\theta})^3 =$ —‖—

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta\, i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$

$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\, i$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Rightarrow \cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \to \sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$

Άσκηση. Να υπολογίσετε το άθροισμα για $n \in \mathbb{N}$ θ, φ

$$\cos(\theta+\varphi) + \cos(2\varphi+\theta) + \dots + \cos(n\theta+\varphi)$$

Απάντηση:

Θέτουμε $z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow zw = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$$

$$z^2 w = e^{i2\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(2\theta+\varphi)} = \cos(2\theta+\varphi) + i\sin(2\theta+\varphi)$$

$$\vdots$$

$$z^n w = e^{in\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(n\theta+\varphi)} = \cos(n\theta+\varphi) + i\sin(n\theta+\varphi)$$

$$zw + z^2w + \dots + z^n w = \cos(\theta+\varphi) + \cos(2\theta+\varphi) + \dots + \cos(n\theta+\varphi)$$
$$+ i(\sin(\theta+\varphi) + \sin(2\theta+\varphi) + \dots + \sin(n\theta+\varphi))$$

Όμως $zw + z^2w + \dots + z^n w = zw(1 + z + \dots + z^{n-1})$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις: i) $z = 1 \Rightarrow 1 + z + \dots + z^{n-1} = n$

ii) $z \neq 1 \Rightarrow 1 + z + \dots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)$$

·) $z = 1$, τότε $z = e^{i2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$ και τότε

$$\cos(2k\pi+\varphi) + \cos(4k\pi+\varphi) + \dots + \cos(2kn\pi+\varphi) = n\cos\varphi.$$

·) Αν $z \neq 1 \Rightarrow zw + \dots + z^n w = zw \dfrac{z^n - 1}{z - 1} = e^{i(\theta+\varphi)} \dfrac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$.

$$= e^{i(\theta+\varphi)} \frac{e^{in\theta} - 1}{\cos\theta - 1 + i\sin\theta}.$$

$$= e^{i(\theta+\varphi)} \frac{(e^{in\theta} - 1)(\cos\theta - 1 - i\sin\theta)}{(\cos\theta - 1 + i\sin\theta)(\cos\theta - 1 - i\sin\theta)}$$

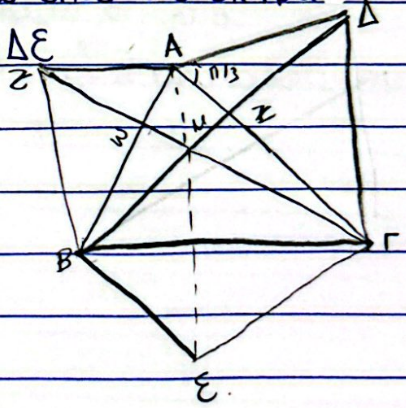
$$e^{i(\vartheta+\varphi)}\frac{(e^{in\vartheta}-1)(e^{-i\vartheta}-1)}{(\cos\vartheta-1)^2+\sin^2\vartheta} = e^{i(\vartheta+\varphi)}\frac{e^{i(n-1)\vartheta}-e^{in\vartheta}+e^{-i\vartheta}+1}{\underbrace{\cos^2\vartheta-2\cos\vartheta+1+\sin^2\vartheta}_{2(1-\cos\vartheta)}}$$

$$\simeq \overbrace{\frac{e^{i(n\vartheta+\varphi)}-e^{i((n+1)+\varphi)}}{2(1-\cos\vartheta)} \qquad +e^{i\varphi}+e^{i(\vartheta+\varphi)}}^{2(1-\cos\vartheta)}$$

$$=\cos(n\vartheta+\varphi)+i\sin(n\vartheta+\varphi)-(\cos((n+1)\vartheta+\varphi)+i\sin((n+1)\vartheta+\varphi))$$
$$+\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos(\vartheta+\varphi)+i\sin(\vartheta+\varphi)$$

Άσκηση.

Σε ένα τρίγωνο, κατασκευάζουμε εξωτερικά ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά του τριγώνου όπου στο σχήμα διέρχονται οι ευθείες ΒΔ, ΓΖ, και ΔΕ από το ίδιο σημείο?



$\vec{A\Delta} = z e^{i\pi/3}$

$\vec{B\Delta} = -\omega + z e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\vec{AZ} = \omega e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\vec{\Gamma Z} = -z+\omega e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Έστω πως οι ΒΔ και ΓΖ τέμνονται στο Μ

Τότε $\vec{\Gamma M} = x\cdot\vec{\Gamma Z}$ με $x>0$

$\vec{BM} = y\vec{B\Delta}$ με $y>0$

$\vec{BM}+\vec{M\Gamma} = \vec{B\Gamma} = -\omega+z$

$y\cdot\vec{B\Delta} - x\cdot\vec{\Gamma Z} = -\omega+z$

$y(-\omega+ze^{i\frac{\pi}{3}}) - x(-z+\omega e^{-i\frac{\pi}{3}}) = -\omega+z$

$-y\omega + ye^{i\vartheta}z + xz - xe^{-i\frac{\pi}{3}}\omega = -\omega+z$

$(x+y^{i\frac{\pi}{3}})z - (xe^{-i\frac{\pi}{3}}+y)\omega = -\omega+z$

$x+ye^{i\frac{\pi}{3}} = 1$

$xe^{-i\frac{\pi}{3}}+y = 1$

Εφαρμογή

Πότε 2 μιγαδικοί z, w σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{2}$;

$z = \lambda \cdot w e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\frac{z}{w} = \lambda \cdot i$ $\lambda \in \mathbb{R}$

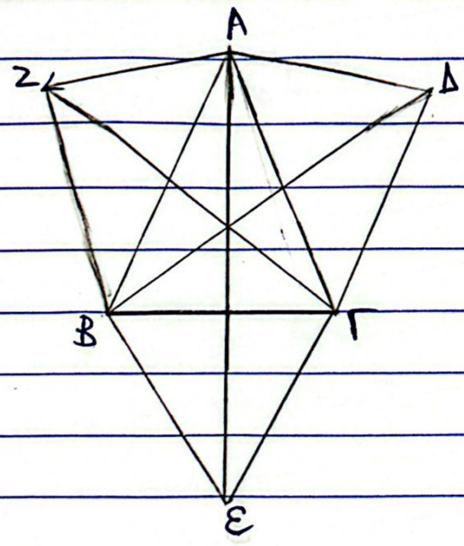
φανταστικοί: $Re(z) = 0$ | $\bar{z}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

πραγματικοί: $Im(z) = 0$ | $Im(z) = 0 \Rightarrow \bar{z} = z$

| $Re(z) = 0 \Rightarrow \bar{z} = -z$

• Συνέχεια άσκησης προηγούμενης διάλεξης.

Δίνεται ΑΒΓ και εκτός ισόπλευρα όπως στο σχήμα



Διέρχονται οι ευθείες ΑΕ, ΒΔ, ΓΖ από το ίδιο σημείο;

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$q_1 = -w + z_1 = -w + 2 \cdot e^{i\pi/3}$

$w_1 = w \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$q_2 = -z + w_1 = -z + w \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Ο μιγαδικός ΒΜ

$BM = x \cdot q_1$ $x \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$

$\Gamma M = y \cdot q_2$ $y \in \mathbb{R}$ $(y \in \mathbb{R})$

$(BM + M\Gamma) = -w + z \Leftrightarrow x q_1 - y q_2 = -w + z$

$\Leftrightarrow x(-w + 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}) - y \cdot (-z + w \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}) = -w + z \Leftrightarrow$

$-xw + x \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + yz - y \cdot w e^{i\frac{\pi}{3}} + w - z = 0 \Leftrightarrow$

$(-x - y \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + 1) w + (x \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + y - 1) z = 0$.

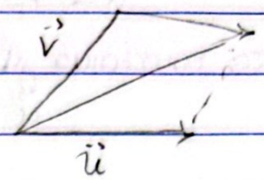
Πότε οι μιγαδικοί z, w είναι γρ. ανεξάρτητοι?

Αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 z + \lambda_2 w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Άλγα $9^η$ διάλεξη

Χώρος.

Διανύσματα : Παράλληλα διανύσματα

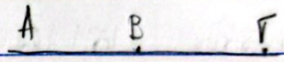


Πότε είναι παράλληλα;

$\vec{u}, \vec{v}$ $(\neq 0)$.

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} = \lambda \vec{v}$

Συνευθειακά σημεία στον χώρο:



όταν $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{AΓ}$$

Ίδιες ιδιότητες με τα διανύσματα στις 2 διαστάσεις.

Τι διαφοροποιεί ότι είμαστε σε 3 διαστάσεις?

Μια βάση περιέχει ακριβώς 3 σημεία.

Γραμμική ανεξαρτησία

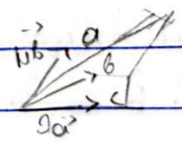
τα διανύσματα $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν οποτεδήποτε $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Εάν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ γρ. ανεξάρτητα και $\vec{d}$ τυχαίο διάνυσμα τότε $\exists\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$d = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$



Επίσης, αν $d = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}$

τότε θα πρέπει $\lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} \iff$

$$(\lambda_1 - \lambda)\vec{a} + (\mu_1 - \mu)\vec{b} + (\nu_1 - \nu)\vec{c} = \vec{0}$$

και αφού τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ γρ. ανεξάρτητα.

$\lambda_1 - \lambda = 0$, $\mu_1 - \mu = 0$, $\nu_1 - \nu = 0$, $\iff \lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = \nu$

Έχουμε καθετότητα διανυσμάτων

$\vec{u} \perp \vec{v}$ αν $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

το εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta.$$

Ίδιες ιδιότητες στο εσωτερικό γινόμενο.

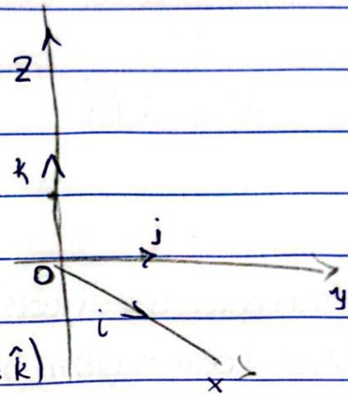
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(ορθογώνιο) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$.

μοναδιαία $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)



$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = (a_1,a_2,a_3)$

$\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$

$\vec{a}\vec{b} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$

$= a_1b_1\hat{i}\hat{i} + a_1b_2\hat{i}\hat{j} + a_1b_3\hat{i}\hat{k} + a_2b_1\hat{j}\hat{i} + a_2b_2\hat{j}\hat{j} + a_2b_3\hat{j}\hat{k}$
$+ a_3b_1\hat{k}\hat{i} + a_3b_2\hat{k}\hat{j} + a_3b_3\hat{k}\hat{k}$

Εξωτερικό Γινόμενο:

Έστω $\vec{a},\vec{b}$ τότε:

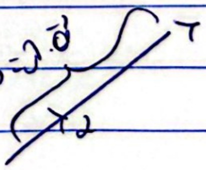
$\vec{a}\times\vec{b}$ = ένα διάνυσμα κάθετο και στο $\vec{a}$ και στο $\vec{b}$

η φορά καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

και μέτρο $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = το εμβαδό του παρ/μου που ορίζουν

$\hat{a},\hat{b}$ $\quad \hat{a}\times\hat{b} = -\hat{b}\times\hat{a}$

$\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a}$



Ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου: $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

ii) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

αν $\vec{a},\vec{b}$ γρ. εξαρτημένα $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1\,\hat{i}\times\hat{i} + a_1b_2\,\hat{i}\times\hat{j} + a_1b_3\,\hat{i}\times\hat{k}$

$+ a_2b_1\,\hat{j}\times\hat{i} + a_2b_2\,\hat{j}\times\hat{j} + a_2b_3\,\hat{j}\times k$

$+ a_3b_1\,\hat{k}\times i + a_3b_2\,\hat{k}\times\hat{j} + a_3b_3\,\hat{k}\times\hat{k}$

$= a_1b_2\,\hat{k} - a_1b_3\,\hat{j} - a_2b_1\,\hat{k} + a_2b_3\,\hat{i} + a_3b_1\,\hat{j} - a_3b_2\,\hat{i}$

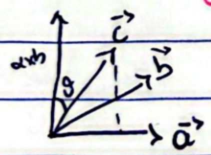
$= (a_3b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{i}\times\hat{j} = k & \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} & \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \\ \hat{j}\times\hat{i} = -k & \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} & \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \end{array}}$$

Μνημονικός κανόνας: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{k}$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

Εννοια Όγκος Παραλληλεπιπέδου



V = Εμβαδόν βάσης × ύψος

$|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta$

ύψος $= |\vec{c}|\cos\theta$

άρα $V = (\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c}$

όγκος: $= |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ μικτό γινόμενο των $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$

Συνεπίπεδα: $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (b_2c_3 - b_3c_2 - \dots = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

Άσκηση

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και $m \in \mathbb{R}$ με $\vec{a}, \vec{b}$ γρ. ανεξάρτητα

Πότε $\exists\ \vec{x}$ ώστε i) $\vec{x} \cdot \vec{a} = m$

ii) $\vec{x} \cdot \vec{b} = \vec{c}$

και στη συνέχεια (με υπόθεση να έχει λύση) να λυθεί.

↳ Αν υπάρχει λύση αναγκαστικά πρέπει $\vec{b}, \vec{c}$ κάθετα άρα $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

$\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$ βάση. Άρα αν $\exists$ λύση $\vec{x} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} + \nu (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\Rightarrow \vec{x} \times \vec{b} = (\lambda \vec{b} \times \mu \vec{c} + \nu (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\Rightarrow \lambda \hat{b} \times \hat{b} + \mu \vec{c} \times \vec{b} + \nu ((\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Αλγλα 10η διάλεξη

$\vec{\alpha}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{b} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{b} = |\vec{\alpha}| |\vec{b}| \cos\varphi$

Εξωτερικό γινόμενο:

$\vec{\alpha} \times \vec{b}$ = διάνυσμα κάθετο στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{b}$

φορά από τον κανόνα του δεξιού χεριού

μέτρο $|\vec{\alpha} \times \vec{b}|$: Εμβαδόν παραλληλογράμμου $\vec{\alpha}, \vec{b}$

$$\vec{\alpha} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Άσκηση

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και $m \in \mathbb{R}$

Θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα (να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}^3$).

$\vec{x} \cdot \vec{a} = m$

$\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$

↳ Παρατηρούμε ότι επειδή $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

οπότε για την επιλυσιμότητα του συστήματος πρέπει $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Τα $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$ είναι γρ. ανεξάρτητα διότι $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

ώστε (*) $\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c})) \vec{b} = \vec{0} \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \vec{b} \cdot \vec{b} + \lambda_2 c \cdot b + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 |\vec{b}|^2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

(*) $\Rightarrow (\lambda_2 \cdot \vec{c} + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c})) \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 \vec{c} \vec{c} + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 |\vec{c}|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$

(*) $\Rightarrow \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 0}$ αφού $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ διότι αν ήταν

αναγκαστικά θα ήταν $\vec{b} = \lambda \vec{c}$.

$\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}\times\vec{c}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

Τότε $\vec{x} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{b}\times\vec{c}$ αν το σύστημα έχει λύση $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ τότε $\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

Επειδή $\vec{x}\times\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\times\vec{c}))\times\vec{b} = \vec{c}$

$$\Leftrightarrow (\lambda(\vec{b}\times\vec{b}) + \mu(\vec{c}\times\vec{b}) + \nu(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b} = \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \lambda\cdot\vec{0} - \mu(\vec{b}\times\vec{c}) - \nu\,\vec{b}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow -\mu(\vec{b}\times\vec{c}) - \nu\,((\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{b})\vec{c}) = \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow -\mu(\vec{b}\times\vec{c}) + \nu\,|\vec{b}|^2\vec{c} = \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow -\mu(\vec{b}\times\vec{c}) + (\nu|\vec{b}|^2 - 1)\cdot\vec{c} = \vec{0}$$ επειδή $\vec{b}\times\vec{c}$ και $\vec{c}$ γρ. ανεξάρτητα

$-\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0.$

$\nu|\vec{b}|^2 - 1 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{|\vec{b}|^2}$

$$\vec{x} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu(\vec{b}\times\vec{c}) \Rightarrow \vec{x} = \lambda\vec{b} + 0\vec{c} + \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})$$

Επειδή $\vec{x}\vec{a} = m$

$$\left(\lambda\vec{b} + \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\right)\vec{a} = m \Rightarrow \lambda\vec{b}\cdot\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = m$$

• Διακρίνω περιπτώσεις.

i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ τότε πρέπει $m = \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}$

→ Αν $m = \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}$ και $\vec{a}\vec{b} = 0$ τότε $\vec{x} = \lambda\vec{b} + \frac{1}{|\vec{b}|^3}(\vec{b}\times\vec{c})$ είναι λύσεις.

→ Αν $m \neq \frac{1}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}$

$\vec{a}\vec{b} = 0$ τότε $\nexists\,\vec{x}$

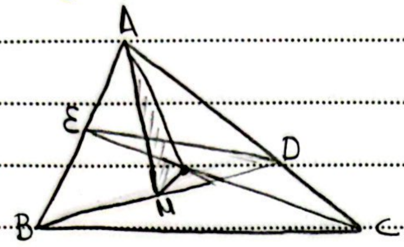
ii) $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$ τότε $\lambda = \frac{m}{\vec{a}\vec{b}} - \frac{1}{\vec{a}\vec{b}\,|\vec{b}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}$

Εχουμε μια λύση ακριβώς

$$\vec{x} = \lambda\vec{b} + \frac{1}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\times\vec{c}$$

Άσκηση

Δίνεται τρίγωνο ABC και σημεία D στην AC E στην AB
M είναι το μέσο της BD κ N το μέσο της CE
Αποδείξτε ότι $E(BCDE) = 4\,E(AMN)$



$\vec{AB}, \vec{AC}$ βάση

Έστω $\vec{AD} = x\,\vec{AC}$
$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{AE} = y\cdot\vec{AB}$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + x\cdot\vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{x}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}(y\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{y}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$E(AMN) = \frac{1}{2}|\vec{AM}\times\vec{AN}|$$

$$\vec{AM}\times\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + x\cdot\vec{AC}) + \frac{1}{2}(y\cdot\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} + x\vec{AC}) \times (y\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} + (y\cdot\vec{AB}) + \vec{AB}\times\vec{AC} + x\cdot\vec{AC}\times(y\vec{AB}) + x\cdot\vec{AC}\times\vec{AC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{0} + \vec{AB}\times\vec{AC} - x\cdot y\cdot\vec{AB}\times\vec{AC} + \vec{0}).$$

$$= \frac{1 - x\cdot y}{4}\,\vec{AB}\times\vec{AC}$$

$$E(AMN) = \frac{1}{2}|\vec{AM}\times\vec{AN}| = \frac{|1-xy|}{8}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{|1-xy|}{8}\,2\cdot E(ABC)$$

$$= \frac{|1-xy|}{4}E(ABC)$$

$$E(BCDE) = E(ABC) - E(AED)$$

$$E(AED) = \frac{1}{2}|\vec{AE}\times\vec{AD}| = \frac{1}{2}|(y\vec{AB})\times(x\vec{AC})| = \frac{|xy|}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

$$= \frac{xy}{2}\,2\cdot E(ABC) = x\cdot y\,E(ABC)$$

άρα $E(BCDE) = (1-xy)\,E(ABC) = 4\,\frac{1-xy}{4}\,E(ABC) = 4E(AMN)$

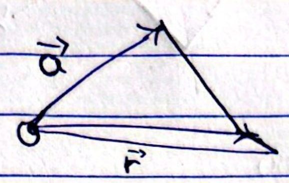
Αγλια 11η διάλεξη

Ευθείες και επίπεδα στον χώρο.

Δύο διαφορετικοι τρόποι περιγραφής:

Παραμετρική βορφή:

Η ευθεία στις 2 διαστάσεις.



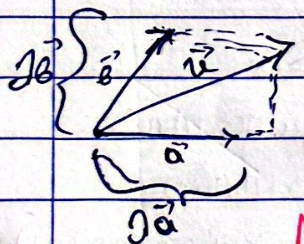
$$\vec{r} = \vec{a} + t\cdot\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\underset{\substack{\parallel \\ (\alpha_1, \alpha_2)}}{\vec{a}}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

Στις 3 διαστάσεις: $\vec{r} = \underset{\substack{\parallel \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}}{\vec{a}} + t\cdot\vec{u}, \; t \in \mathbb{R} \quad \vec{a}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

Επίπεδο: Με 2 βαθμούς ελευθερίας (2 παραμέτρους)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{a}, \vec{b}$ γρ. ανεξάρτητα

Τότε $\vec{u} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$



$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$

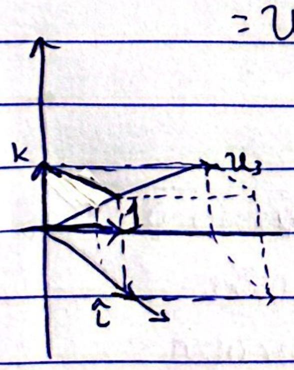
Διάνυσμα Θέσης: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξ. διανύσματα

(Π) $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}$ (Επί του επιπέδου)

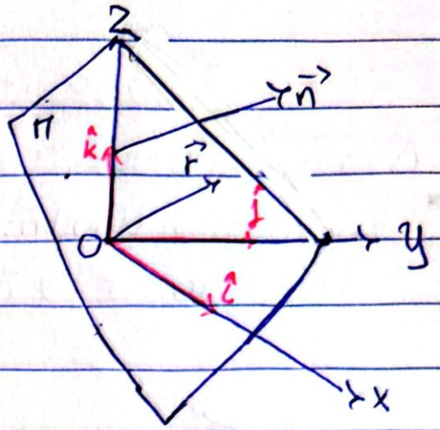
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} = u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2 + u_3\hat{e}_3$$
$$= u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k} = (u, u_2, u_3)$$



Καρτεσιανή μορφή Επιπέδου:

(ορθοκανονική βάση)



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ είναι σημείο του επιπέδου

$\vec{n}$: κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π)

$\vec{r} = (x, y, z)$ καταλήγει στο επίπεδο (π)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{a}$: διάνυσμα του επιπέδου π.

$\vec{n} \perp (\pi) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ $\forall \vec{u}$ διανύσματα επιπέδου

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ $\quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$\big((x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)\big) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - a_1, y - a_2, z - a_3)(n_1, n_2, n_3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - a_1) n_1 + (y - a_2) n_2 + (z - a_3) n_3 = 0$

$\Leftrightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 = a_1 n_2 + a_2 n_2 + a_3 n_3$

Οπότε αν γνωρίζουμε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ διάνυσμα που καταλήγει στο επίπεδο
$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο

Τότε το $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι σημείο του επιπέδου (καταλήγει στο επίπεδο)

αν $\vec{r}\vec{n} = \vec{a}\vec{n} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{a})\vec{n} = 0$.

Επίπεδο περιέχει σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν
οπότε αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν για δοθέντα
$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$.

$(x, y, z) \in \pi$: $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$\Leftrightarrow$ Τότε $(\alpha, \beta, \gamma) \perp$ επίπεδο και ανάλογα με το δ
βρίσκουμε από πού διέρχεται το επίπεδο

Ιδιαίτερα αν δ=0, το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Ερώτημα: • Πόσα σημεία χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε μία ευθεία;

• Πόσα σημεία χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε ένα επίπεδο;

$(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$

→ Για την ευθεία χρειαζόμαστε 2 διαφορετικά σημεία

Με βάση την παραμετρική ευθεία

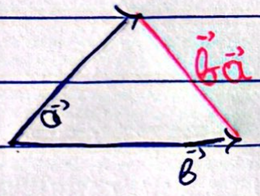
$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3) \quad t \in \mathbb{R}$$

οπότε για το δεύτερο

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$$

οπότε για το δεύτερο $\exists\, t_1 = \,?$

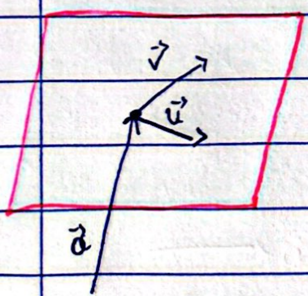
$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$$



→ Για το επίπεδο χρειαζόμαστε 3 διαφορετικά σημεία που να μην είναι συνευθειακά

$\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξάρτητα

$$(x, y, z) = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Έστω τα σημεία $A:(a_1, a_2, a_3)$, $B:(b_1, b_2, b_3)$ $\Gamma:(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$A \neq B$ και το Γ να μην είναι πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα A, B

$$(\varepsilon): (x, y, z) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad t \in \mathbb{R}$$

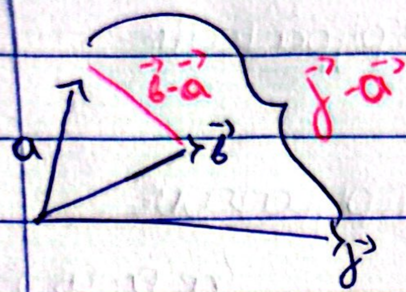
$$(x, y, z) = \vec{a} + t\vec{u} + s\vec{v} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Επιλέγουμε $(x, y, z) = \vec{a} + t\vec{u}$ να είναι σημεία του

$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$

$$(x, y, z) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s\vec{v}$$

και επομένως, $\vec{\gamma} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s\vec{v} \Leftrightarrow s\vec{v} = \vec{\gamma} - \vec{a} - t(\vec{b} - \vec{a})$



Επιλέγουμε $\vec{v} = \vec{\gamma} - \vec{a}$

Τότε $\left.\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{b} - \vec{a} \\ \vec{v} &= \vec{\gamma} - \vec{a} \end{aligned}\right\}$ είναι γρ. ανεξάρτητα

Έστω πως τα $\vec{\gamma}-\vec{a}, \vec{b}-\vec{a}$ είναι γρ. εξαρτημένα οπότε

$\exists\, \lambda,\mu \in \mathbb{R} : \lambda(\vec{\gamma}-\vec{a}) + \mu(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{0}$

$(|\lambda|+|\mu| \neq 0)$ αν $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{\gamma}-\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}(\vec{b}-\vec{a})$

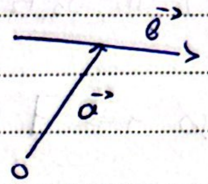
$\Rightarrow \vec{\gamma}$ σημεία της ευθείας των $\vec{a}, \vec{b}$

$\Pi: (x,y,z) = \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}) + s(\vec{\gamma}-\vec{a}) \quad t,s \in \mathbb{R}$

Αγλαΐα
12 διάλεξη

Ευθείες και Επίπεδα $\mathbb{R}^3$

α) Παραμετρική μορφή:



Ευθεία

$$\vec{r} = \vec{a} + t\cdot\vec{b} \quad t\in\mathbb{R}$$

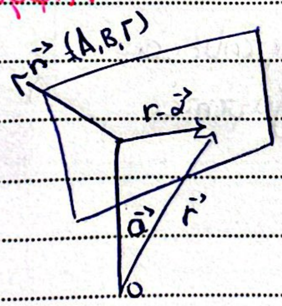
Επίπεδο

$$\underset{(x,y,z)}{\vec{r}} = \vec{a} + t\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{\gamma} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

$\vec{b},\vec{\gamma}$ γρ. ανεξάρτητα

β) Καρτεσιανή μορφή:

Επίπεδο:



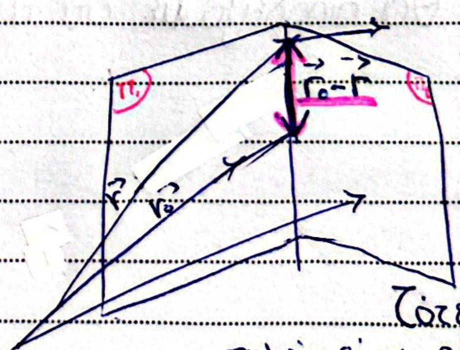
$\vec{r} = (x,y,z) \quad \vec{a} = (a_1, b_1, \gamma_1)$

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$$
$$(x-a_1, y-b_1, z-\gamma_1)(A,B,\Gamma) = 0$$
$$\Rightarrow (x-a_1)A + (y-b_1)B + (z-\gamma_1)\Gamma = 0$$
$$\Rightarrow xA + yB + z\Gamma = \underbrace{a_1A + b_1B + \gamma_1\Gamma}_{\Delta}$$

$(x,y,z)(A,B,\Gamma) = \Delta$

(A,B,Γ) κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο.

Ευθεία



$\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$

$\Pi_1 \neq \Pi_2$
$\Downarrow$
Τότε τα κοινά σημεία είναι πάνω σε μία ευθεία

Π_1: (Π_1) : $(x,y,z)\cdot(A_1,B_1,\Gamma_1)=\Delta_1$ $=\vec{r_0}\cdot\vec{n_1} \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{n_1}=0$

(Π_2) : $(x,y,z)\,(A_2,B_2,\Gamma_2)=\Delta_2\cdot\vec{r_0}\,\vec{n_2} \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{n_2}=0$.

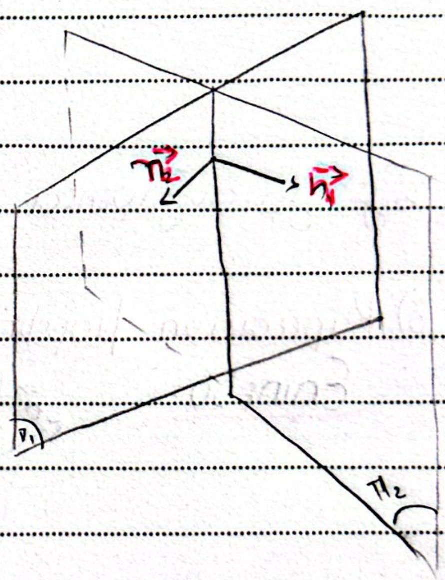
Επειδή $\Pi_1\cap\Pi_2\neq\emptyset \Leftrightarrow \exists\,(x_0,y_0,z_0)\in\Pi_1\cap\Pi_2$.

$$(x_0,y_0,z_0)(A_1,B_1,\Gamma_1)=\Delta_1$$
$$\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\vec{r_0}}\ \underbrace{(A_2,B_2,\Gamma_2)}_{\vec{n_2}}=\Delta_2.$$

Τα κοινά σημεία των 2 επιπέδων ικανοποιούν:

(Π_1) $(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{n_1}=0$

(Π_2) $(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{n_2}=0$



Τι συμβαίνει για $\vec{n_1},\vec{n_2}$

α) Αν $\vec{n_1},\vec{n_2}$ γρ. εξαρτημένα

β) γρ. ανεξάρτητα

α) $\vec{n_2}=\lambda\vec{n_1}$, $\lambda\neq0$.

β) γρ. ανεξάρτητα $\rightarrow$ $\vec{n_1}\times\vec{n_2}\perp\vec{n_1},\vec{n_2}$

τα κοινά σημεία

Περιμένουμε $\boxed{\vec{r}=\vec{r_0}+t\,\vec{n_1}\times\vec{n_2}}$ $t\in\mathbb{R}$.

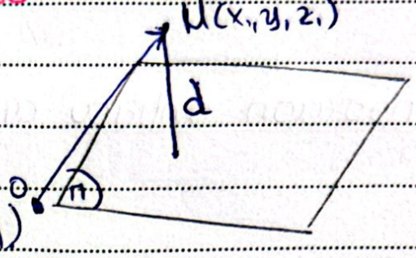
Θα αποδείξουμε ότι είναι στη τομή των δύο επιπέδων.

Για να είναι στο Π1 πρέπει: αφού

$\vec{r}-\vec{r}_0 = t\,\vec{n}_1\times\vec{n}_2 \qquad t(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\,\vec{n}_1 = 0$? ✓

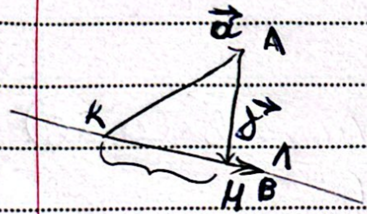
Παρόμοια για να είναι στο (Π2) πρέπει $t(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\,\vec{n}_2 = 0$ ✓.

Απόσταση σημείου από επίπεδο:



$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

Το d = distance of M from (Π)



$k\cdot\vec{\Lambda} = \vec{B} \qquad \vec{K\Lambda} = \lambda\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0$

$\vec{a}+\vec{\gamma} = \lambda\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda\vec{\beta}-\vec{a}$

$\vec{\beta}(\lambda\vec{\beta}-\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow$

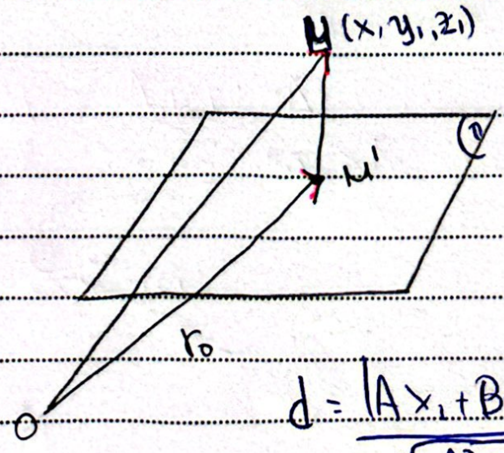
$\lambda|\vec{\beta}|^2-\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}$

$\vec{\gamma} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\beta|^2}\vec{\beta}-\vec{a}$

$= \left(\vec{a}\,\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right)\frac{\vec{\beta}}{|\beta|}-\vec{a}$

$$d = \left|\vec{a}\cdot\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\,\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}-\vec{a}\right|$$

Το αντίστοιχο στο επίπεδο



Ένα κάθετο $(A,B,\Gamma)=\vec{n}$

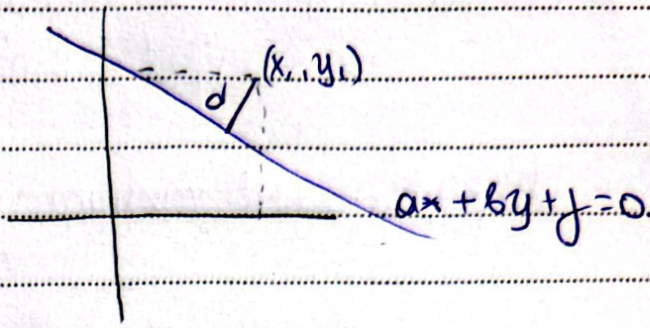
$\vec{MM'} = \lambda\cdot(A,B,\Gamma)$.

$\Rightarrow \vec{OM}+\vec{MM'} = \vec{OM'}$

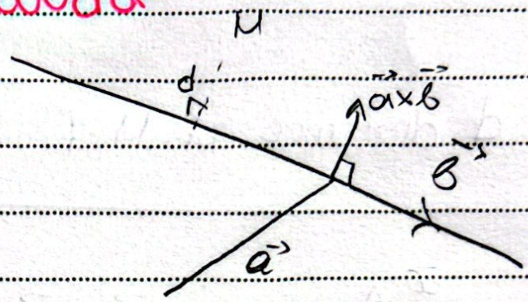
$$d = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$ απόσταση του $M(x_1,y_1,z_1)$ από το επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

$$\alpha x + by + \gamma = 0$$

$$d = \frac{|\alpha x_1 + b y_1 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}$$



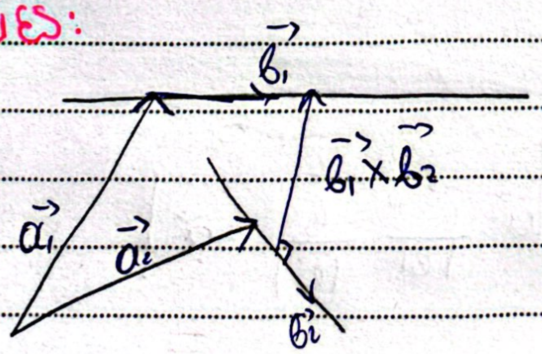
Απόσταση σημείου από ευθεία



$$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Ευθείες:



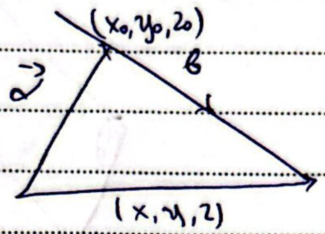
$$\vec{AB} = \lambda\, \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$$

Ευθεία : Παραμετρική

$(x,y,z) = \vec{a} + t\cdot\vec{b}$ $t\in\mathbb{R}$

$= (x_0, y_0, z_0) + t\cdot\vec{b}$

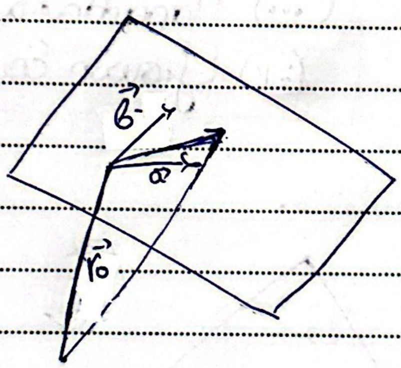
$\vec{b}$ διάνυσμα επί της ευθείας



Επίπεδο

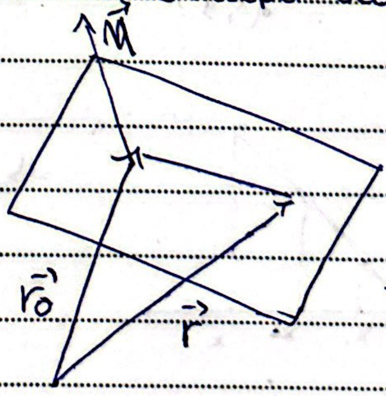
$\vec{r} = \vec{r_0} + t\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b}$ $t,s\in\mathbb{R}$

a, b γρ. ανεξ. διανύσματα επί του επιπέδου



Καρτεσιανή μορφή Επιπέδου:

Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο



$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

Εξίσωση επιπέδου:

$(\vec{r} - \vec{r_0})\,\vec{n} = 0$

όπου $r = (x, y, z)$, $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{n} = (A, B, \Gamma)$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0 \Rightarrow$

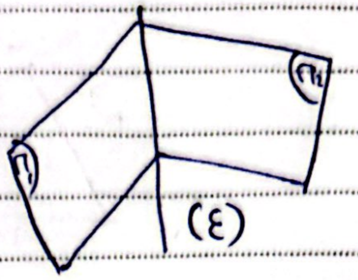
$Ax + By + \Gamma z \overbrace{- (Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0)}^{\Delta} = 0$

Καρτεσιανή μορφή ευθείας: Τομή δύο επιπέδων $(\Pi_1) \cap (\Pi_2) \neq \emptyset$

$\Pi_1 \neq \Pi_2$

$$\frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\frac{x-x_0}{z-z_0} = \frac{\beta_1}{\beta_3}$$



$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

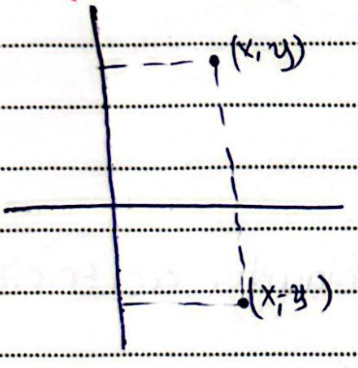
(i) Συσχέτιση καρτεσιανής κ διανυσματικής μορφής ευθείας

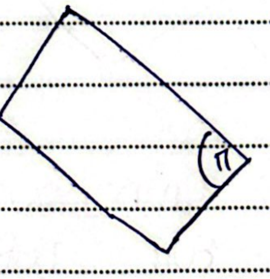
(ii) Συμμετρικό σημείο ως προς επίπεδο

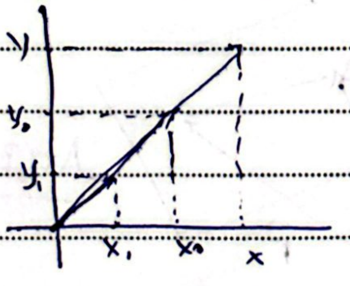
(iii) Παραλληλία ευθειών με επίπεδο

(iv) Εξίσωση επιπέδου δοθέντων 2 ευθειών

Καρτεσιανή μορφή Επιπέδου



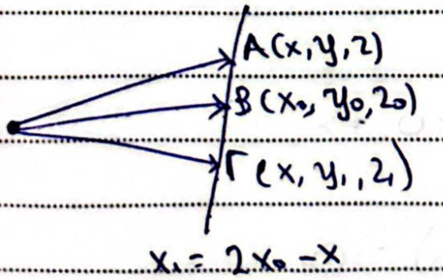




$(x_1, y_1) + (x, y) = 2(x_0, y_0)$

$\Rightarrow x_1 = 2x_0 - x$

$y_1 = 2y_0 - y$.



$2(x_0, y_0, z_0) = (x, y, z) + (x_1, y_1, z_1)$

$x_1 = 2x_0 - x$

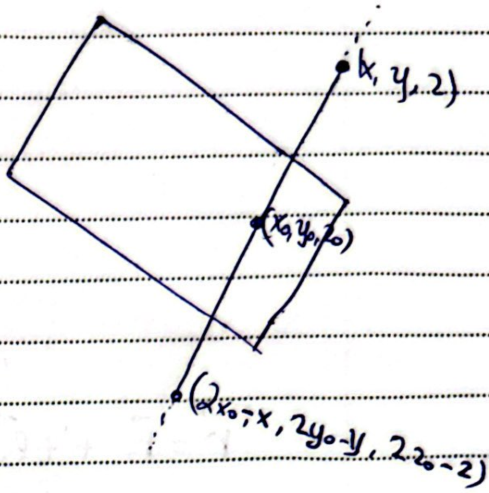
$\Leftrightarrow \quad y_1 = 2y_0 - y$

$z_1 = 2z_0 - z$.

Συμμετρικό σημείο ως προς επίπεδο

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \perp (\pi)$

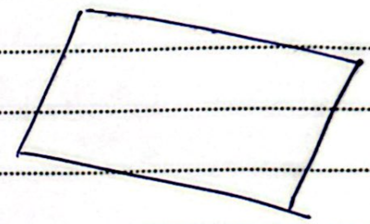
Εάν το επίπεδο είναι $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$
τότε έχω:
$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \parallel (A,B,\Gamma)$
$= \lambda(A,B,\Gamma)$



Συμμετρικό σημείο ως προς ευθεία

$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$(\varepsilon): (x,y,z) = \vec{r} = \vec{\alpha} + t\vec{\beta} \quad t\in\mathbb{R}$



Πότε η ευθεία είναι παράλληλη του επιπέδου?

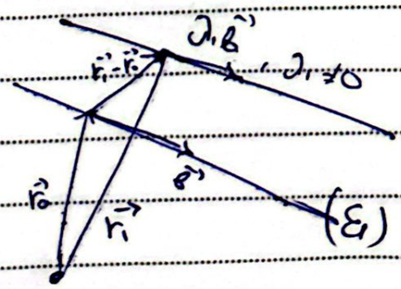
↳ $\vec{\beta}\cdot\vec{n}=0$ ($\vec{\beta}$ $\vec{n}$ $\neq 0$ των ευθείας και επιπέδου).

Δύο διακευριμένες ευθείες, $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

(να μην ταυτίζονται)

- Τέμνονται
- Δεν τέμνονται < παράλληλες / δεν είναι παράλληλες

Παράλληλες ευθείες:
(ε_1)



$\vec{r} = \vec{r_0} + t\cdot\vec{\beta} \quad , t\in\mathbb{R}$

$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(b_1, b_2, b_3)$

$(\varepsilon_2): (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + s(b_1, b_2, b_3) \quad s \in \mathbb{R}$

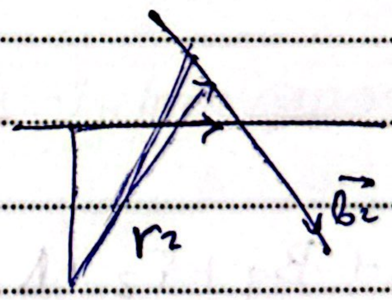
Εξίσωση Επιπέδου: $\vec{r_1} - \vec{r_0}$

Σε παρ. μορφή: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{b} + s(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \quad t, s \in \mathbb{R}$

Καρτεσιανή μορφή: $\vec{n} = (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{b}$

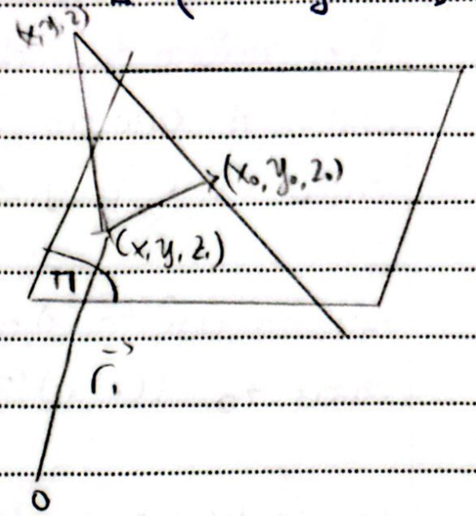
Παραμετρική μορφή Επιπέδου:

$\vec{r} = \vec{r_2} + t\vec{b_2} + s\vec{b_1} \quad t, s \in \mathbb{R}$



Απόσταση σημείου από επίπεδο.

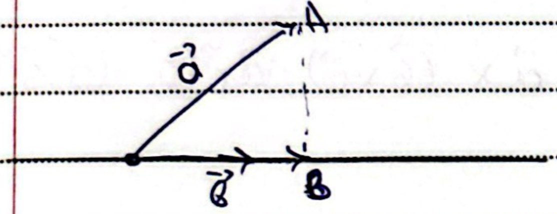
Έστω (x_1, y_1, z_1) σημείο του επιπέδου $\Leftrightarrow \Delta = -(Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1)$



$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

$$\rightarrow (x - x_1)A + (y - y_1)B + (z - z_1)\Gamma = 0.$$

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα



$P_{\vec{b}} \vec{a}$

$$\vec{OB} = \lambda \vec{b}$$

$$\vec{AB} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \cdot \vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda |b|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|^2}$$

$$\vec{OB} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|^2} \vec{b} = \vec{a} \left(\frac{\vec{b}}{|b|} \right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

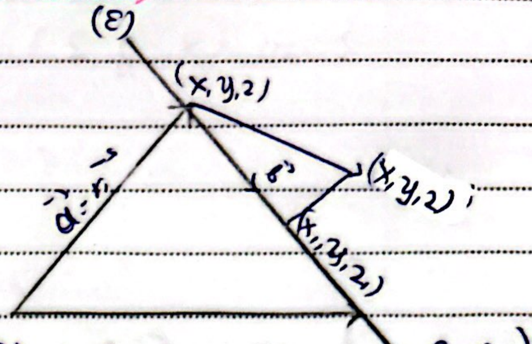
Μήκος Προβολής.

$$\left| \vec{a} \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right| = \left| \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$$

$$d = \left| (x - x_1), (y - y_1), (z - z_1) \cdot \frac{A, B, \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \right| = \frac{A(x - x_1) + B \cdot (y - y_1) + \Gamma \cdot (z - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

$$= \frac{|Ax + By + \Gamma z - (Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Απόσταση σημείου από ευθεία (εντός ευθείας)



Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο σημείου A από την ευθεία (ε) είναι $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)\times \vec{b}$

Και το κάθετο διάνυσμα (παράλληλα του $\vec{AB}$) $\vec{r}=(x_1,y_1,z_1)+t(b_1,b_2,b_3)$
Είναι το $((x-x_1)(y-y_1)(z-z_1)\times\vec{b})\times\vec{b}=\vec{n}$

Και επομένως η προβολή του $r-r_1$ στο $\vec{n}$
έχει μήκος $d=\left|(r-r_1)\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$\vec{n}=((\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b})\times\vec{b}$$
$$=-\vec{b}\times((\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b})$$
$$=-[(\vec{b}\cdot\vec{b})(\vec{r}-\vec{r_1})-(\vec{b}(r-r_1))\cdot\vec{b}]$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$=-|\vec{b}|^2(\vec{r}-\vec{r_1})+(\vec{b}(\vec{r}-\vec{r_1}))\vec{b}$$

$$(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}=(\vec{r}-\vec{r_1})\left[-|\vec{b}|(\vec{r}-\vec{r_1})+(\vec{b}(\vec{r}-\vec{r_1}))\cdot\vec{b}\right]=-|\vec{b}|^2(\vec{r}-\vec{r_1})(\vec{r}-\vec{r_1})$$
$$(\vec{b}(\vec{r}-\vec{r_1}))((\vec{r}-\vec{r_1})\vec{b})$$

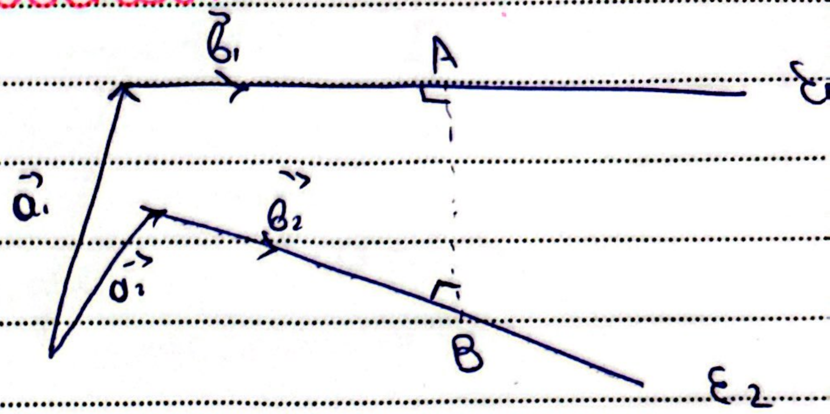
$$(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}=-|\vec{b}|^2|\vec{r}-\vec{r_1}|^2+(\vec{b}\cdot(\vec{r}-\vec{r_1}))^2$$
$$=-\left[|\vec{b}|^2|\vec{r}-\vec{r_1}|^2-(\vec{b}(\vec{r}-\vec{r_1}))^2\right]$$
$$=-|\vec{b}\times(\vec{r}-\vec{r_1})|^2$$

$$d=\frac{|b\times(\vec{r}-\vec{r_1})|^2}{|\vec{n}|}=\frac{|\vec{b}\times(\vec{r}-\vec{r_1})|}{|(\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b}||\vec{b}|}.$$

όμως $|\vec{n}|=|((\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b})\times\vec{b}|$
όμως $\vec{b}\perp(\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b}$
οπότε $|(\vec{r}-\vec{r_1})\times\vec{b}||\vec{b}|$

$$\boxed{d=\left|(\vec{r}-\vec{r_1})\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}$$

Απόσταση Ασύμβατων ευθειών:



Η θέση της ελάχιστης απόστασης

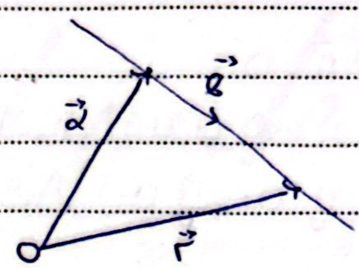
$\vec{AB} \perp \vec{b}_1 , \vec{b}_2$

$\Downarrow$

$\vec{AB} \parallel \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ και απόσταση $d = \left| \dfrac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$

Αγια Διαδεξη 14

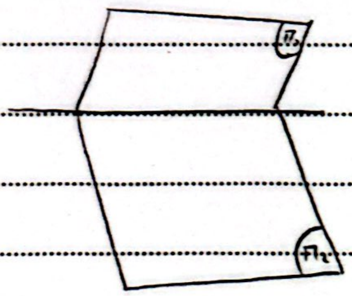
Ευθεία < Παραμετρική / Καρτεσιανή



$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} \quad t\in\mathbb{R}$$

Παραμετρική: $(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t\cdot(b_1,b_2,b_3)$ $t\in\mathbb{R}$

Καρτεσιανή μορφή: η ευθεία είναι τομή 2 επιπέδων



$$x = a_1 + t b_1$$
$$y = a_2 + t b_2$$
$$z = a_3 + t b_3$$

$$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} \leftrightarrow b_2(x-a_1) = b_1(y-a_2)$$

$$\frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} \leftrightarrow b_3(y-a_2) = b(z-a_3)$$

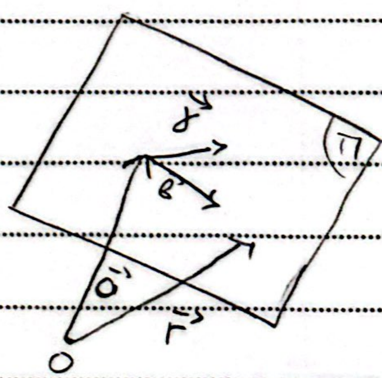
Επίπεδο:

Παραμετρική μορφή

$\vec{b}, \vec{\gamma}$ επί του επιπέδου γρ. ανεξ.

$$\vec{r} = \vec{a} + t\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{\gamma} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(b_1,b_2,b_3) + s(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$$



Καρτεσιανή μορφή επιπέδου :

$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$

$[(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)]\cdot(A,B,\Gamma)=0$

$(x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3)(A,B,\Gamma)=0$

$\vec{n}\perp(\Pi)$

$A(x-a_1)+B(y-a_2)+\Gamma(z-a_3)=0 \iff Ax+By+\Gamma z-\underbrace{(Aa_1+Ba_2+\Gamma a_3)}_{\Delta}=0$

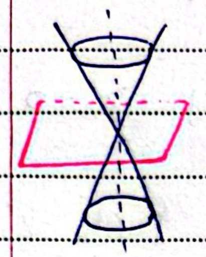
$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{\gamma}$

Άλλη 15η διάλεξη

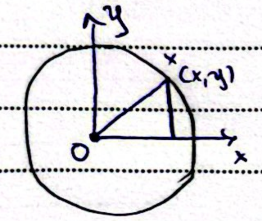
Κωνικές τομές

Τομές Επιπέδου με Κώνο:



Περιγραφή κώνου: $x^2+y^2=z^2$

Κύκλος: Σε Επίπεδο, εκείνα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν απ' άλλο σημείο (το κέντρο του κύκλου) σταθερή απόσταση.

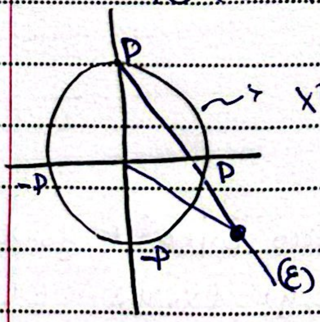


$$|\vec{Ox}| = \rho \iff \sqrt{x^2+y^2} = \rho \overset{\rho\geq 0}{\iff} x^2+y^2=\rho^2$$

$x^2+y^2=\rho^2 \to$ κύλινδρος στον χώρο.

- Στον χώρο R σημεία του χώρου $x^2+y^2=z^2$ τ.ω. απέχουν από το O σταθερή απόσταση $\rho\geq 0$

$$|\vec{Ox}| = \rho \iff \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \iff x^2+y^2+z^2=\rho^2$$



$\rightsquigarrow x^2+y^2=\rho^2$ και $ax+by=\gamma$ $(|a|+|b|\neq 0)$

Έστω (x_1,y_1) σημείο και ευθεία

$$ax_1+by_1=\gamma$$

$$\Rightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

Η τομή της ευθείας (ε) με τον κύκλο

$$\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \end{cases}$$

Έστω $b\neq 0$ $\quad y-y_1=-\frac{a}{b}(x-x_1) \iff$

$$\begin{cases} y=y_1-\frac{a}{b}(x-x_1) \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=y_1-\frac{a}{b}(x-x_1) \\ x^2+\left[y_1-\frac{a}{b}(x-x_1)\right]^2=\rho^2 \end{cases} \iff$$

$\Leftrightarrow x^2 + y_1^2 + \frac{a^2}{b^2}(x - x_1)^2 - \frac{2a}{b}|y_1|(x - x_1) = p^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \frac{a^2}{b^2}(x^2 - 2x_1 \cdot x + x_1^2) + y_1^2 - \frac{2a}{b} x y_1 + \frac{2a}{b} x_1 y_1 - p^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2a^2}{b^2} x_1 x + \frac{a^2}{b^2} x_1^2 + y_1^2 - \frac{2a}{b} x \cdot y_1 - p^2 = 0$

$\Delta = 4\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) x^2 - 4\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} x_1^2 + y_1^2 + \frac{2a}{b} x y_1 - p^2\right)$

$= \dots = \frac{4(a^2+b^2)}{b^2} p^2 - 4\left(\frac{a}{b} x_1 + y_1\right)^2.$

i) Δεν υπάρχουν σημεία τομής (δεν τέμνονται αν $\Delta < 0$

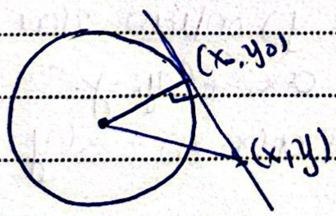
$\Leftrightarrow p^2 < \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b} x_1 + y_1\right)^2$

ii) Τέμνονται ακριβώς σε 1 σημείο αν $\Delta = 0$.

$p^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b} x_1 + y_1\right)^2.$

iii) 2 σημεία αν $p^2 > \dots$

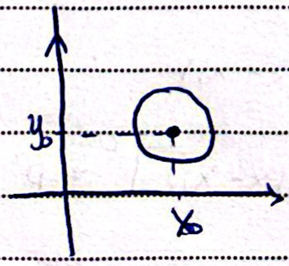
Έστω πως εφάπτονται:



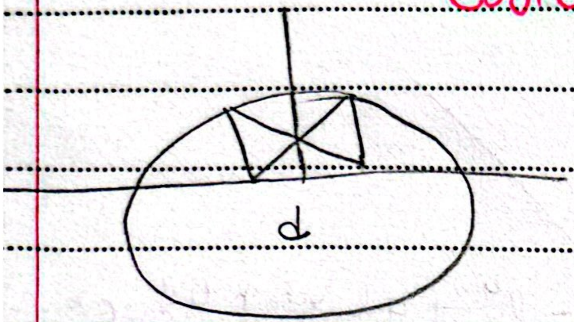
$\longrightarrow$ Έστω κάθετο δ/μα $(-y_0, x_0)$

Εξίσωση $(x, y) = (x_0, y_0) + t(-y_0, x_0)$

και (x_0, y_0) σημεία της ευθείας.



Έλλειψη

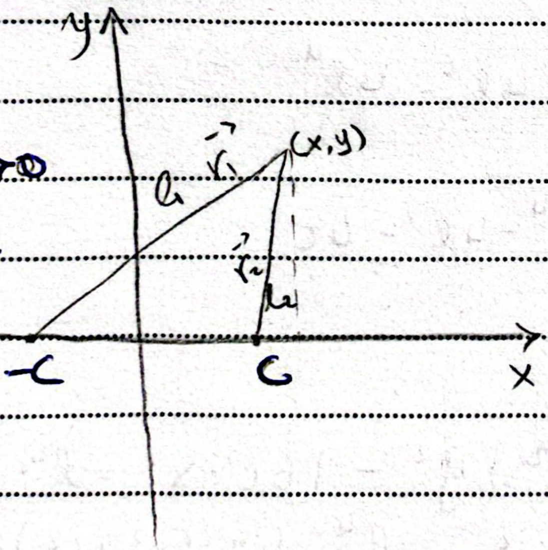


$\ell_1 + \ell_2 = \ell > d.$

$c>0$

$d = 2c > 0$

$\ell > 2c$



$\vec{r_1} = (x,y) - (-c,0)$

$= (x+c, y)$

$\vec{r_2} = (x-c, y)$

$\ell_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$\ell_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \ell$$

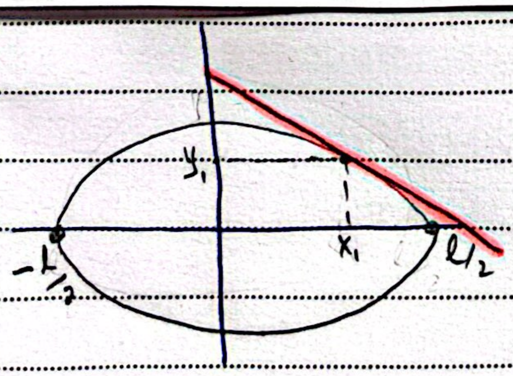
$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + \sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \ell^2$$

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{\ }\sqrt{\ }=\ell^2$$
$$2\sqrt{\ }\sqrt{\ }=\ell^2-2(x^2+y^2+c^2)$$

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\ell^2-2(x^2+y^2+c^2)\geq 0.$$

$$4((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)=(\ell^2-2(x^2+y^2+c^2))^2$$
$$4(x^2+y^2+c^2+2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx)=(\ell^2-2(x^2+y^2+c^2))^2$$
$$4[(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2]=\ell^4+4(x^2+y^2+c^2)^2-4\ell^2(x^2+y^2+c^2)$$
$$-16c^2x^2=\ell^4-4\ell^2(x^2+y^2+c^2).$$
$$4(\ell^2-4c^2)x^2-4\ell^2y^2=\ell^2(\ell^2-4c^2)$$
$$\frac{x^2}{\frac{\ell^2(\ell^2-4c^2)}{4(\ell^2-4c^2)}}+\frac{y^2}{\frac{\ell^2(\ell^2-4c^2)}{4\ell^2}}=1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{\ell^2-4c^2}{4}}=1$$

$$\iff \frac{x^2}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2-c^2}=1$$



$$b=\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2-c^2}=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(x_1,y_1) σημείο της έλλειψης

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

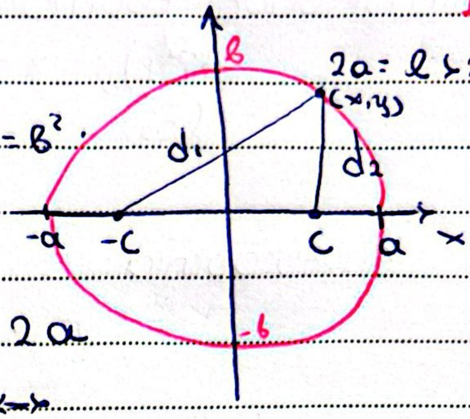
Αγμα
16η διάλεξη.

Κωνικές Τομές

Έλλειψη:

$a^2 - c^2 = b^2$

$2a = \ell > 2c$



$$d_1 + d_2 = 2a \iff$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\iff \dots \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \iff$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Συμμετρίες: Κέντρο (0,0) συμμετρίας
xx' είναι άξονας συμμετρίας
yy' είναι άξονας συμμετρίας.

Εφαπτόμενη ευθεία:

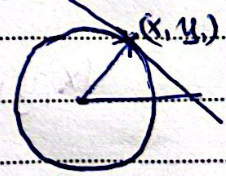
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 = \frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x - x_1}{a^2}, \frac{y - y_1}{b^2}\right)\left(x_1 \quad + y_1\right) = 0$$

Υπενθύμιση: (στον κύκλο) (x_1, y_1)

$xx_1 + yy_1 = p^2$
$= x_1^2 + y_1^2$

$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1, y_1) = 0.$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

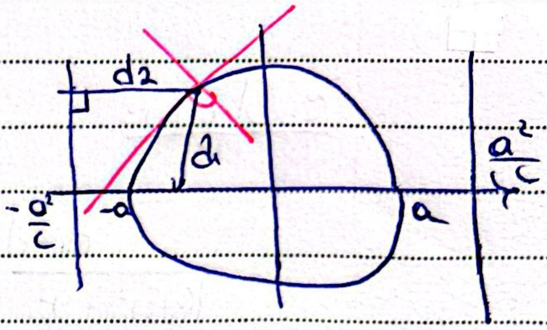
$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad x \in (-a, a)$$

$$f'(x) = b\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2 - 1}\left(-\frac{2x}{a}\right) = -\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Διευθετούσες ευθείες:

$(\delta_1): \ x = -\frac{a^2}{c}$

$(\delta_2): \ x = \frac{a^2}{c}$



Εκκεντρότητα: $e = \frac{c}{a} < 1$.

Θεώρημα 1: Ο λόγος των αποστάσεων σημείου της έλλειψης από τις εστίες προς την απόσταση από τις διευθετούσες είναι σταθερός και είναι η εκκεντρότητα.

Δηλαδή:

$$\frac{d_1}{d_2} = e = \frac{c}{a}$$

Θεώρημα 2: Η κάθετη ευθεία στην εφαπτόμενη ευθεία στην έλλειψη διχοτομεί την γωνία που ορίζουν οι εστίες και το σημείο.

Παραμετρικοποίηση Έλλειψης:

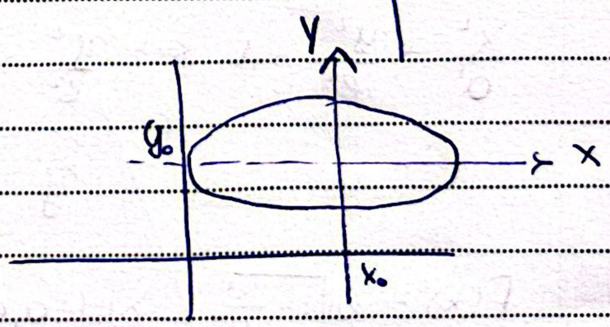
$$(x,y) = (a\cos\theta, b\sin\theta) \quad \theta \in [0,2\pi]$$

Κύκλο! $x^2+y^2=\rho^2$

$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$\theta \in [0,2\pi]$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$$



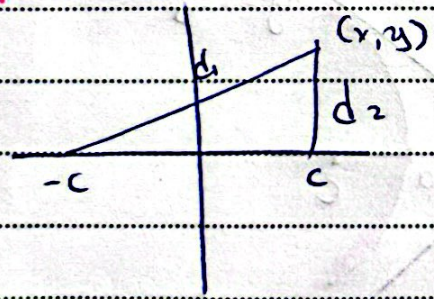
$x - x_0 = X$

$y - y_0 = Y$

$\frac{x-x_0}{a} = \cos\theta \Rightarrow (x,y) = (x_0 + a\cos\theta, y_0 + b\sin\theta), \ \theta \in [0,2\pi]$

$\frac{y-y_0}{b} = \sin\theta$

Υπερβολή:



$$|d_1 - d_2| = 2a = \ell$$

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$= 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2-2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad} = 4a^2$$

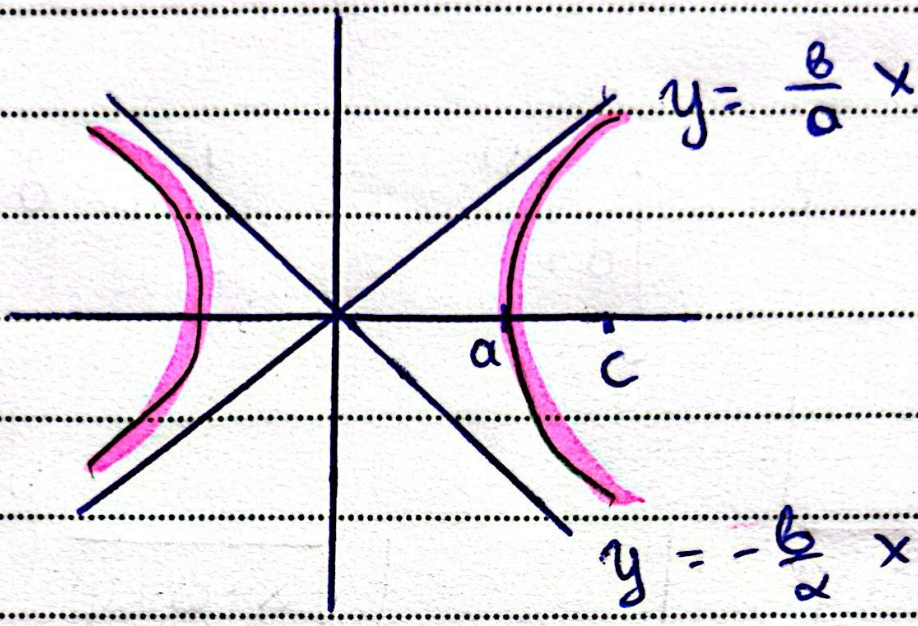
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)-2a^2) = \sqrt{[(x+c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2]}$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 = \sqrt{x^2+y^2+c^2-4c^2x^2}$$

$$\cancel{(x^2+y^2+c^2)^2}+\cancel{4}a^4-\cancel{4}a^2(x^2+y^2+c^2) = \cancel{(x^2+y^2+c^2)^2}-\cancel{4}c^2x^2$$

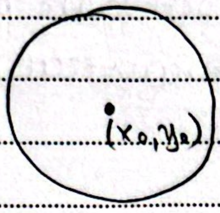
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1.$$


$y = \frac{b}{a} x$
a
c
$y = -\frac{b}{a} x$

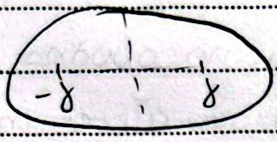
Άλγα 18 διάλεξη.

Κωνικές Τομές



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

κύκλος

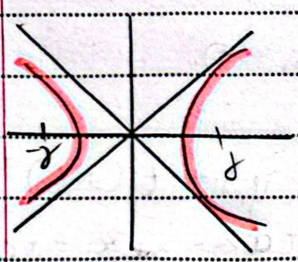


$$d_1+d_2=2a>2\gamma$$

$$b^2+\gamma^2=a^2$$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

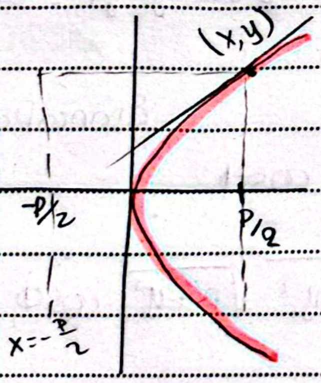


$$|d_1-d_2|=2a$$

$$b^2+a^2=\gamma^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Υπερβολή



$$y^2=2px$$

Παραβολή

$$\left.\begin{array}{l} d_1=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} \\ d_2=|x+\frac{p}{2}| \end{array}\right\} d_1=d_2$$

$$\sqrt{(x-\tfrac{p}{2})^2+y^2}=|x+\tfrac{p}{2}| \iff (x-\tfrac{p}{2})^2+y^2=(x+\tfrac{p}{2})^2 \iff$$

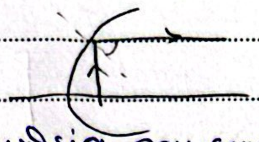
$$\cancel{x^2}-\cancel{2}x\frac{p}{2}+\cancel{\frac{p^2}{4}}+y^2=\cancel{x^2}+\cancel{2}x\frac{p}{2}+\cancel{\frac{p^2}{4}} \iff y^2=2xp.$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

(+ Εξίσωση σημείου (x_1,y_1) πάνω στην παραβολή).

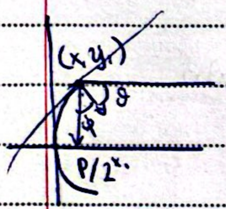
Εφ: $yy_1=p(x+x_1)$.

Θεώρημα: Σε κάθε σημείο της παραβολής αν στείλουμε δέσμη φωτός παράλληλη στον άξονα της παραβολής συγκεντρώνεται στην εστία της παραβολής



Η ευθεία που ενώνει το τυχαίο σημείο της παραβολής με την εστία η ανάκλαση αυτού είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής

Απόδειξη: $yy_1 = p(x+x_1) \Rightarrow yy_1 - px - px_1 = 0.$



Εξ. διανυσματικής ευθείας: $(x,y) = (x_1,y_1) + t(a,b)$

$x = x_1 + ta \Leftrightarrow x - x_1 = ta$

$y = y_1 + tb \Leftrightarrow y - y_1 = tb \Rightarrow a(y-y_1) = b(x-x_1)$

Γωνία ϕ: $(\frac{p}{2},0) - (x_1,y_1) = (\frac{p}{2} - x_1, -y_1)$

Εφαπτόμενο διάνυσμα (y_1, p)

$$\left(\frac{p}{2} - x_1, -y_1\right)(p, -y_1) = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{p^2+y_1^2}\,\cos\phi$$

$$p\left(\frac{p}{2} - x_1, y_1\right)\ (p, -y_1) = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}\,\sqrt{p^2+y_1^2}\,\cos\phi$$

$$p\left(\frac{p}{2} - x_1\right) + y_1^2 = \sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{p\left(\frac{p}{2} - x_1\right) + y_1^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}\sqrt{p^2+y_1^2}} \qquad \cos\theta = \frac{(p, -y_1)(1,0)}{\sqrt{p^2+y_1^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+y_1^2}}$$

$$\cos\phi = \cos\theta \Leftrightarrow \frac{p\left(\frac{p}{2} - x_1\right) + y_1^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}\cdot\cancel{\sqrt{p^2+y_1^2}}} = \frac{p}{\cancel{\sqrt{p^2+y_1^2}}}$$

$$\frac{p^2}{2} - px_1 + \underbrace{y_1^2}_{2px_1} = p\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}$$

$$\frac{p^2}{2} + px_1 = p\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2} + 2px_1$$

$$\frac{p}{2} + x_1 = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_1\right)^2 + 2px_1} \quad \checkmark$$

$\frac{p^2}{4} - px_1 + x_1 = \left(\frac{p}{2} + x_1\right)^2$

$+ 2py_1$

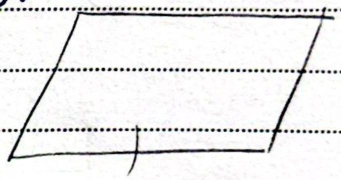
Ελλειψη κεντρο συμμετριας, Αξονας συμμετριας

Υπερβολη —''— —''—

Παραβολη Αξονα συμμετριας

Γενική μορφή (Κωνικής τομής)

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + F = 0.$$



Καμπύλη

σε ποια περίπτωση είμαστε:

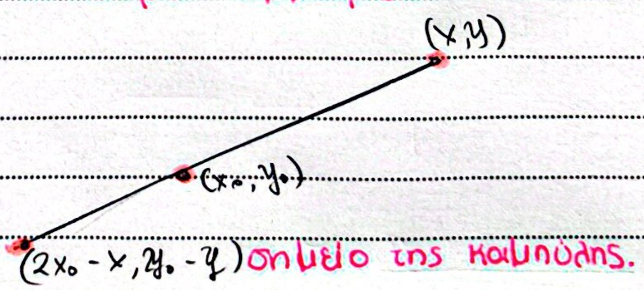
Διακρίνουσα: $(2B)^2 - 4 \cdot A \cdot \Gamma = 4(B^2 - A\Gamma)$

i) Εαν $4(B^2 - A\Gamma) < 0$ → ελλειψη

ii) Εαν $4(B^2 - A\Gamma) > 0$ → Υπερβολη

iii) Εαν $4(B - A\Gamma) = 0$ → Παραβολη

Να βραίξε αρχικά τα κέντρα συμμετρίας:



Αν έχουμε βρει το κέντρο, τότε το σημείο $(2x_0 - x, 2y_0 - y)$.
Πρέπει να είναι σημείο της καμπύλης επίσης. Οπότε,

$$A(2x_0 - x)^2 + 2B(2x_0 - x)(2y_0 - y) + \Gamma(2y_0 - y)^2 + 2\Delta(2x_0 - x) + 2E(2y_0 - y) + F = $$

$$Ax^2 - 4Ax_0x + 4Ax_0^2 + 8Bx_0y_0 + 2Bxy - 4Bx_0y - 4By_0x + \Gamma y^2 - 4\Gamma y_0 y$$
$$+ 4\Delta x_0 - 2\Delta x + 4Ey_0 - 2Ey + F + 4\Gamma y_0^2 = 0.$$

$-2\Delta x - 2Ex - F$

$(-4Ax_0 - 4By_0 - 4\Delta)x + (-4Bx_0 - 4\Gamma y_0 - 4E)y + 4Ax_0^2 + 8Bx_0y_0$

$+ 4\Delta x_0 + 4Ey_0 + 4\Gamma y_0^2 =$

Αναγκαστικά όλα πρέπει να είναι 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 = -\Delta \\ Bx_0 + By_0 = -E \quad (2) \\ Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + \Delta x_0 + \cancel{Ey_0} + \cancel{\Gamma y_0^2} = 0 \end{cases}$$

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{pmatrix} = A\Gamma - B^2 \neq 0$

(2) $Bx_0y_0 + \Gamma y_0^2 + Ey_0 = 0$

Αγλια

Κανονική Μορφή 2ου βαθμού καμπυλών (Κωνικές τομές)

19η διάλεξη

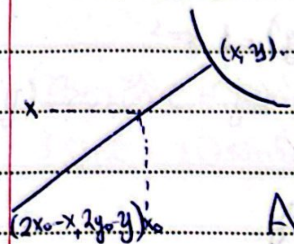
$A^2+B^2+\Gamma^2 \neq 0 \quad Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+F=0$

Διακρίνουσα $= 4(A^2-A\Gamma)$

i) $B^2-A\Gamma>0$, υπερβολή $\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ii) $B^2-A\Gamma<0$ έλλειψη $\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

iii) $B^2-A\Gamma=0$ Παραβολή $\qquad y^2=4bx.$

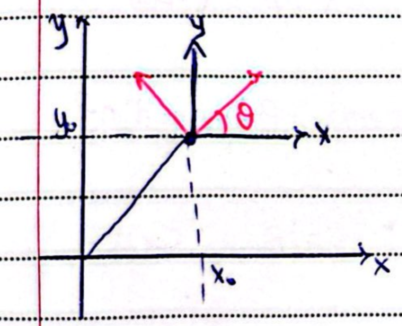


Αν $\Delta\neq 0$, Έχουμε: (x_0,y_0) Έλλειψη κ. Υπερβολή: Σημείο συμμετρίας

$Ax_0+By_0=-\Delta$ άξονας συμμετρίας

$Bx_0+\Gamma y_0=-E.$ Παραβολή άξονας συμμετρίας.

$$A(2x_0-x)^2+2B(2x_0-x)(2y_0-y)+\Gamma(2y_0-y)^2+2\Delta(2x_0-x)+2E(2y_0-y)+F=0.$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Η αντικατάσταση:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x&=x_0+\cos\theta x'-\sin\theta y'\\ y&=y_0+\sin\theta x'+\cos\theta y'\end{aligned}$$

$$\tilde{A}(x')^2+2\tilde{B}xy+\tilde{\Gamma}(y')^2+2\tilde{\Delta}x'+2\tilde{E}y'+\tilde{F}=0$$

Επιλογή του θ ώστε $\tilde{B}(\theta)=0$.

Παράδειγμα: Η καμπύλη $xy=1$ να γραφεί σε κανονική μορφή

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι αν (x,y) ένα σημείο τότε το $(-x,-y)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε το $(0,0)$ είναι ένα κέντρο συμμετρίας.

Οπότε θέτουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x' & -\sin\theta y' \\ \sin\theta x' & -\cos\theta y' \end{pmatrix}$$

και η εξίσωση γράφεται

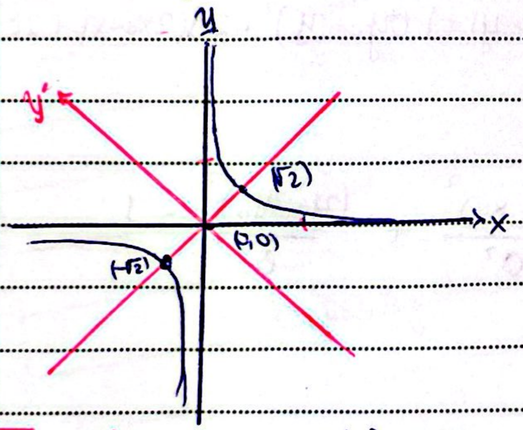
$$xy = 1 \iff (\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') = 1 \iff$$

$$\sin\theta\cos\theta (x')^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) x'y' - \sin\theta\cos\theta (y')^2 = 1$$

Επιλέγω θ $\cos 2\theta = 0$ $\quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4}$

Τότε: $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(x')^2 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(y')^2 = 1 \iff (x')^2 - (y')^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\iff \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$



Παράδειγμα 2: Να φέρουμε την καμπύλη στην κανονική της μορφή:

Απάντηση: Βρίσκουμε το κέντρο συμμετρίας (x_0, y_0):

$$\begin{cases} 3x_0 - 5y_0 = -7 \\ -5x_0 + 3y_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{vmatrix} -2x_0 - 2y_0 = -6 \\ -5x_0 + 3y_0 = 1 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} x_0 + y_0 = 3 \\ -5x_0 + 9 - 3x_0 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} y_0 = 3 - x_0 \\ -8x_0 = -8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 2. \end{matrix}$$

Θέτουμε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$x = 1 + \cos\theta x' - \sin\theta y'$ $\qquad y = 2 + \sin\theta x' + \cos\theta y'$

Τότε η εξίσωση:

$$3(1+\cos\theta x'-\sin\theta y')^2-10(1+\cos\theta x'-\sin\theta y')(2+\sin\theta x'+\cos\theta y')$$
$$+3(2+\sin\theta x'+\cos\theta y')^2+14(1+\cos\theta x'-\sin\theta y')-2(2+\sin\theta x'+\cos\theta y')+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3(1+\cos^2\theta(x')^2+\sin^2\theta(y')^2+2\cos\theta x'-2\sin\theta y'-2\sin\theta\cos\theta x'y')-$$

$$-10(2+\sin\theta x'+\cos\theta y'+2\cos\theta x'+\sin\theta\cos\theta(x')^2+\cos^2\theta x'y'-2\sin\theta y'-$$
$$\sin^2\theta x'y'-\sin\theta\cos\theta(y')^2)+3(4+\sin^2\theta(x')^2+\cos^2\theta(y')^2+4\sin\theta x'+4\cos\theta y'$$
$$+2\sin\theta\cos\theta x'y'+14+14\cos\theta x'-14\sin\theta y'-4-2\sin\theta x'-2\cos\theta y'+3=0.$$

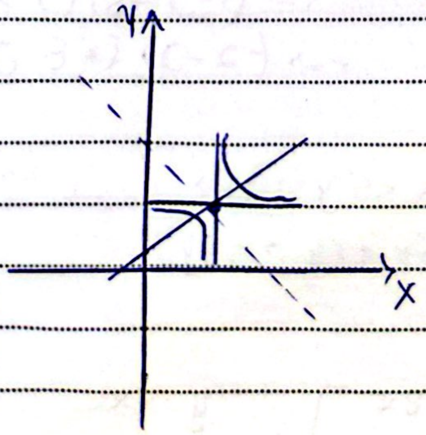
$$(3\cos^2\theta-10\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)(x')^2+(-6\sin\theta\cos\theta-10(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+6\sin\theta\cos\theta)x'y'$$
$$3\sin^2\theta+10\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta)(y')^2+(6\cos\theta-10\sin\theta-20\cos\theta+12\sin\theta+14\cos\theta$$
$$-2\sin\theta)x'$$

$$(-6\sin\theta-10\cos\theta+20\sin\theta+12\cos\theta-14\cos\theta-2\cos\theta)y'+8=0.$$

$$\Leftrightarrow(3-5\sin2\theta)(x')^2-10\cos2\theta\, x'y'+(3+5\sin2\theta)(y')^2+8=0.$$

Επιλέγουμε θ: $\cos2\theta=0$, $2\theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$$-2(x')^2+8(y')^2+8=0 \Leftrightarrow (-x')^2+4(y')^2=-4$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x')^2}{2^2}-(y')^2=1}$$



Άλλος τρόπος:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\quad)(x \; y) + 3 = 0.$$

$$(x \; y)^T \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix} = x(\alpha x + \beta y) + y(\gamma x + \delta y)$$

$$= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma xy + \delta y^2$$

$$= \alpha x^2 + (\beta + \gamma) xy + \delta y^2$$

$\alpha = 3$, $\delta = 3$

$\beta + \gamma = -10$

Επιλέγουμε τον πίνακα να είναι συμμετρικός

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \iff$$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)^2 - (-5)(-5) = 0$$

$$\iff (3-\lambda)^2 - 5^2 = 0$$

$$\iff (3-\lambda-5)(3-\lambda+5) = 0$$

$$\iff (-2-\lambda)(8-\lambda)$$

$\boxed{\lambda = -2}$ $\boxed{\lambda = 8}$

- $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3x - 5y = -2x \\ -5x + 3y = -2y \end{bmatrix} \iff x = y$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3x - 5y = 8x \\ -5x + 3y = 8y \end{bmatrix} \iff y = -x$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 = 0. \quad (1)$$

Θέτουμε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(x')^2 + 8(y')^2.$$

Έστω οι οικογένειες από καμπύλες:

$E: \{\{(x,y) \mid y^2 = 4a(x+a)\} \ a>0\}$.

$L = \{\{(x,y) \mid y^2 = 4a(-x+a)\} \ a>0\}$.

Εάν $P \in E$, $Q \in L$, τότε τέμνονται, μάλιστα τέμνονται ορθογώνια.

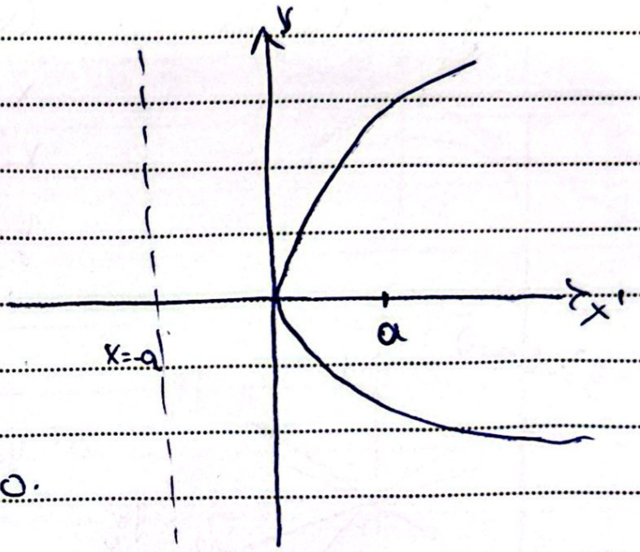
$P \in E$, $\exists \ a>0$

$y^2 = 4a\underbrace{(x+a)}_{x'}$

$= 2 \cdot 2a(x') \quad x' = x+a$

$x' = x+a$

$0 \iff x = -a$



Εστία: $x' = a \iff x+a = a \iff x=0$.

Εστία στο αρχικό σύστημα

Διευθετούσα: $x' = -a \iff x+a = -a \iff x = -2a$

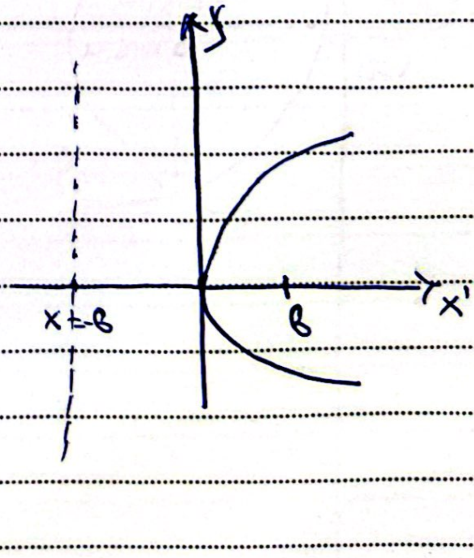
$Q \in L$: $\exists \ b>0$: $y^2 = 4b\overbrace{(-x+b)}^{x'}$

$x' = -x+b$

Κορυφή: $x' = 0 \iff x = b$.

$x' = -b \iff -x+b = -b$

$\iff x = 2b$



Σημεία τομής (x,y):

$$\begin{cases} y^2 = 4a(x+a) \\ y^2 = 4b(-x+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4a(x+a) \\ 4a(x+a) = 4b(-x+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4a(x+a) \\ ax + a^2 = -bx + b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4a(x+a) \\ \cancel{(a+b)}x = (b-a)\cancel{(b+a)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0^2 = 4ab \\ x_0 = b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = \pm 2\sqrt{ab} \\ x_0 = b-a \end{cases}$$

$$y^2 = 2 \cdot (\overset{p}{2a}) x'$$

(x_1', y_1)

$x' = x + a$

$x_1' = x_0 + a$

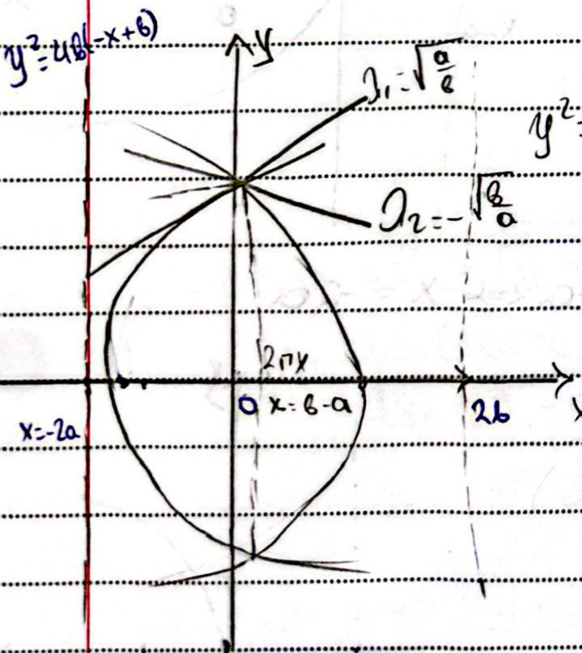
$y_1' = 2(2a)x_1'$

Εφαπτόμενη: $yy_1 = p(x' + x_1') \Rightarrow$

$yy_0 = 2a(x + a + x_0 + a)$.

$yy_0 = 2a(x + 2a + x_0)$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2a}{y_0} = \frac{2a}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.



$y^2 = 4a(x+a)$.

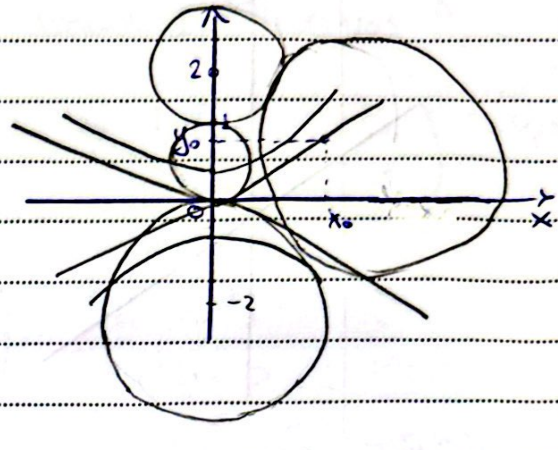
$\lambda_1 \lambda_2 = -1$

Άσκηση: Δίνονται οι κύκλοι

(e_1): $x^2+y^2-4y+3=0$.

(e_2): $x^2+y^2+4y=0$.

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά των κύκλων e_1, e_2.



$x^2+y^2-4y+3=0 \iff$

$x^2+(y^2-2\cdot 2y+2^2-2^2)+3=0$

$x^2+(y-2)^2-4+3=0$

$\iff x^2+(y-2)^2=1^2$.

$x^2+y^2+4y=0 \iff x^2+y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2=0$

$\iff x^2+(y+2)^2=2^2$

(e): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

e_1, e_2 εφάπτονται

$(x_0,y_0)-(0,2)=|(x_0,y_0-2)|=1+\rho$.

$\iff \sqrt{x_0^2+(y_0-2)^2}=1+\rho$.

$x_0^2+(y_0-2)^2=(1+\rho)^2$

(C_2) κ (C) Εφάπτονται

$(x_0,y_0+2)=2+\rho$

$\iff x_0^2+(y_0+2)^2=(2+\rho)^2$.

$x_0^2+y_0^2-4y_0+4=1+2\rho+\rho^2$

$x_0^2+y_0^2+4y_0+4=4+4\rho+\rho^2$

$8y_0=4+4\rho+\rho^2-(1+2\rho+\rho^2) \Rightarrow \rho=\frac{8y_0-3}{2}$

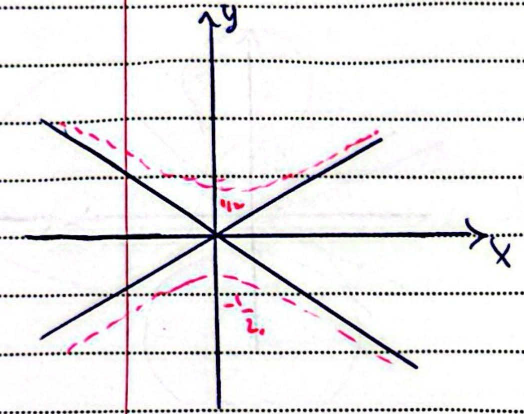
$\Rightarrow x_0^2+y_0^2-4y_0+4=(1+\rho)^2$

$\Rightarrow x_0^2+y_0^2-4y_0+4=\left(1+\frac{8y_0-3}{2}\right)^2 \iff x_0^2+y_0^2-4y_0+4=\frac{(8y_0-1)^2}{4}$

$$\Rightarrow 4x_0^2 + 4y_0^2 - 16y_0 + 16 = 64y_0^2 - 16y_0 + 1.$$

$$\Rightarrow 4x_0^2 - 60y_0^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow 15 = 60y_0^2 - 4x_0^2$$

$$1 = \frac{y_0^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{x_0^2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$



$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = \pm \frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$\boxed{y = \pm \frac{\sqrt{15}}{15} x}$$

$$\frac{8y_0 - 3}{2} = p \geq \frac{1}{2}.$$

$$\frac{8y_0 - 3}{2} = p \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8y_0 - 3}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8y_0 \geq 3 + 1 \Leftrightarrow y_0 \geq \frac{1}{2}$$

Ολοκληρώνουμε : $\rightarrow (x_0, y_0)$ κέντρο (έλλειψη παραβολή)

$\rightarrow$ στροφή $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Επιλέγουμε το $\theta \in [0, 2\pi)$: $\tilde{A}(x_0, y_0)(x')^2 + 2\tilde{B}(x_0, y_0, \theta) x' y' + \tilde{\Gamma}(y')^2 + 2\tilde{\Delta}x' + 2\tilde{E} + \tilde{F} = 0$

ώστε $\tilde{B}(\theta) = 0.$

Παράδειγμα: $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 14x - 2y + 3 = 0.$

λ ιδιοτιμή αν $\exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{(x, y) \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (14, -2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 = 0}$ ★

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2} \quad \boxed{\lambda_2 = 8}$$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιανυσμα $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ μηκος 1 Πινακας P.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ Πινακας στροφης

$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιανυσμα

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\det P = 1$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$ το αρχικό σύστημα

$(x, y) = (x', y')\, P^t \qquad P^t\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

$$(x', y')\left[P^t\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}P\right]\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x', y')\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$+ (14\ -2)\, P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 3 = 0.$$

$$-2(x')^2 + 8(y')^2 + (14\ -2)\begin{pmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 3 = 0.$$

$$-2(x')^2 + 8(y')^2 + \frac{14}{\sqrt{2}}(x'-y') - 2\frac{(x'+y')}{\sqrt{2}} + 3 = 0.$$

$$-2\left((x')^2 - 3\sqrt{2}\,x'\right) + 8\left((y')^2 - \sqrt{2}\,y'\right) + 3 = 0.$$

$$-2\left((x')^2 - 2\,\frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 8\left((y')^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right).$$

$$-2\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 = 0.$$

$$-2\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 9 - 4 + 3 = 0$$

$$-2\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 = 0.$$

$$\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2^2} + 1 = 0.$$

$$y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x'' = x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{(x'')^2}{2^2} - \frac{(y'')^2}{1} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$= P\begin{pmatrix} x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

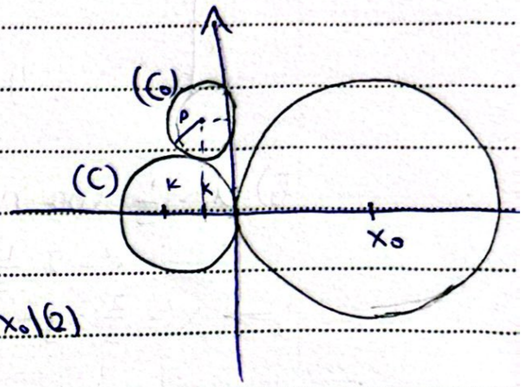
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Άλγεβρα
21η διάλεξη

Άσκηση: Δίνεται ο κύκλος
$(c): x^2+2x+y^2=0$
Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά του (c) και άξονα y'y.

Απάντηση: $x^2+2x+y^2=0 \iff x^2+2\cdot 1x+1^2-1^2+y^2=0$
$\iff (x+1)^2+y^2=1^2.$

Ο κύκλος (c) έχει κέντρο το σημείο (-1,0) και ακτίνα 1.



Ο c₀ εφάπτεται του (c) οπότε:
($\rho_1+\rho_2$ = απόσταση των κέντρων)
$\vec{K\Lambda}=(x_0,y_0)-(-1,0)=(x_0+1,y_0)$
$|\vec{K\Lambda}|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$
(1) $\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=1+\rho$ όπου ρ η ακτίνα του (c₀).
Επειδή ο (c₀) εφάπτεται του yy' $\Rightarrow \rho=|x_0|$ (2)
$\Rightarrow \sqrt{(x_0+1)^2+y^2}=1+|x_0|$
$\iff (x_0+1)^2+y^2=(1+|x_0|)^2 \iff x_0^2+2x_0+1+y_0^2=1+|x_0|^2+2|x_0|$
$\iff y_0^2=2|x_0|-2x_0$

Αν $x_0\geq 0 \Rightarrow y_0^2=2x_0-2x_0=0 \Rightarrow y=0.$
$\Rightarrow$ ο γ.τ. του κέντρου είναι $(x_0,0)$ $x_0>0$

Αν $x_0<0$ τότε $y_0^2=-2x_0-2x_0=-2\cdot\underset{\rho}{\underbrace{2}}x_0$

Είναι παραβολή με κορυφή το (0,0) και εστία στο $(-\frac{\rho}{2},0)=(-1,0)$

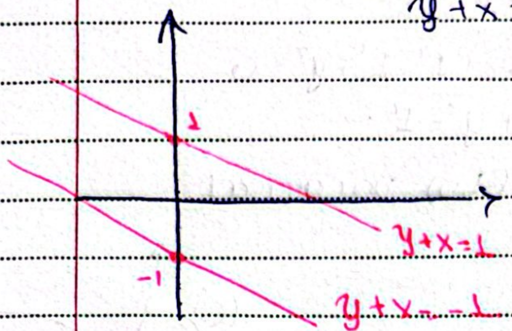
Άσκηση: Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η καμπύλη
$x^2+2\lambda xy+\frac{(\lambda+1)^2}{4}y^2+2(\lambda-1)x-1=0$ να παριστάνει παραβολή. Στη συνέχεια για τιμή της παραμέτρου λ που η καμπύλη είναι παραβολή να την φέρουμε σε κανονική μορφή.

Απάντηση: Για να είναι παραβολή, πρέπει $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0 \iff$
$(2\lambda)^2-4\frac{(\lambda+1)^2}{4}=$
$(2\lambda-(\lambda+1))(2\lambda+\lambda+1)$
$\iff (\lambda-1)(3\lambda+1)=0$
$\Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-\frac{1}{3}.$

α) Εάν $\lambda=1$ τότε $x^2+2xy+y^2-1=0$

$$\Rightarrow (y+x)^2-1=0 \Rightarrow (y+x-1)(y+x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x-1=0 \\ y+x+1=0 \end{cases}$$



β) $\lambda=-\frac{1}{3}$ τότε η καμπύλη είναι:

$$x^2-2\,\frac{1}{3}xy+\frac{(1-\frac{1}{3})^2}{4}y^2+2\left(-\frac{1}{3}-1\right)x-1=0.$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2-\frac{8}{3}x-1=0.$$

$$(\cos\theta x'-\sin\theta y')^2-\frac{2}{3}(\cos\theta x'-\sin\theta y')(\sin\theta x'+\cos\theta y')$$
$$+\frac{1}{2}(\sin\theta x'-\cos\theta y')-\frac{8}{3}(\cos\theta x'-\sin\theta y')-1=0$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta(x')^2-2\sin\theta\cos\theta x'+\sin^2\theta(y')^2-\frac{2}{3}(\sin\theta\cos\theta(x')^2+\cos^2\theta x'y'-$$
$$-\sin^2 x'y'-\sin\theta\cos\theta(y')^2)+\frac{1}{9}(\sin^2\theta(x')^2+2\sin\theta\cos\theta x'y'$$
$$+\cos^2\theta(y')^2)-\frac{8}{3}\cos\theta x'+\frac{8}{3}\sin\theta y'-1=0$$

$$\Rightarrow \left(\cos^2\theta-\frac{2}{3}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{9}\sin^2\theta\right)(x')^2+\left(-2\sin\theta\cos\theta-\frac{2}{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{9}\sin\theta\cos\theta\right)x'y'+\left(\sin^2\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{9}\cos^2\theta\right)(y')^2-\frac{8}{3}\cos\theta x'+\frac{8}{3}\sin\theta y'$$

Επιλέγουμε το θ ώστε:

$$\underbrace{-2\sin\theta\cos\theta}_{\sin(2\theta)}-\frac{2}{3}\underbrace{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}_{\cos(2\theta)}+\frac{2}{9}\sin\theta\cos\theta=0.$$

$$-\sin(2\theta)-\frac{2}{3}\cos(2\theta)+\frac{1}{9}\sin 2\theta=0$$

$$-\frac{8}{9}\sin 2\theta-\frac{2}{3}\cos 2\theta=0$$

$$\frac{4}{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \tan(2\theta)=-\frac{3}{4}$$
$$=\tan(\theta_0).$$

$2\theta=\theta_0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\theta_0}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{2}\right)$

και η κανονική μορφή είναι: $\left(\cos^2\theta+\frac{1}{9}\sin^2\theta-\frac{1}{3}\sin 2\theta\right)(x')^2+\sin^2\theta-\frac{1}{3}\sin 2\theta+\frac{1}{9}\cos^2\theta$

$-\frac{8}{3}\cos\theta x'+\frac{8}{3}\sin\theta y'-1=0.$

2ου βαθμού επιφάνειες:

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta yz+Ez^2+2Hxz+2Fx+2Gy+2Kz+\Theta=0$$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες κανονικές μορφές.

Αντίστοιχο:

2ου βαθμού καμπύλη στο επίπεδο:

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+F=0.$$

Κανονική Μορφή:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Έλλειψη

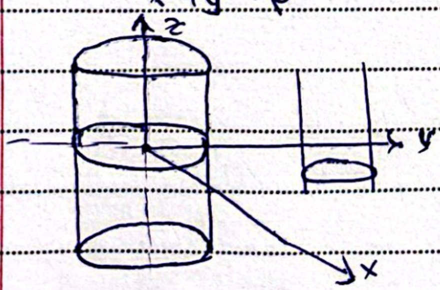
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Υπερβολή

$y^2=2px$ Παραβολή

\+ ευθείες

• $x^2+y^2=\rho^2$ στο επίπεδο (xoy) $\quad Ax+By+\Gamma z+\Delta=0.$

$x^2+y^2=\rho^2.$



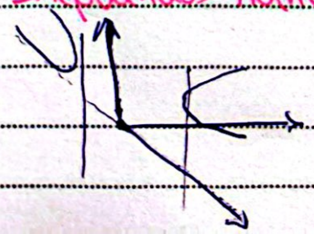
$x^2+y^2=\rho^2$ κύλινδρος στο $\mathbb{R}^3$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

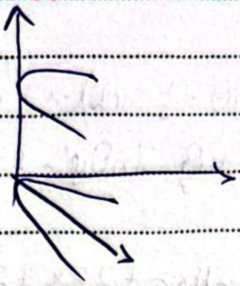
$(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2$

Ελλειπτικός Κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Υπερβολικός Κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

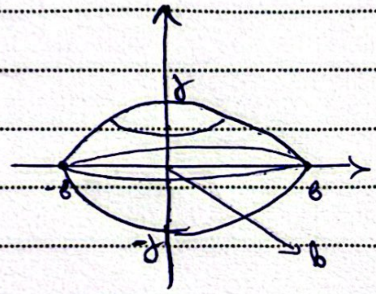


Παραβολικός Κύλινδρος: $z^2 = 2px$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1-\frac{z^2}{\gamma^2}\geq 0.$$

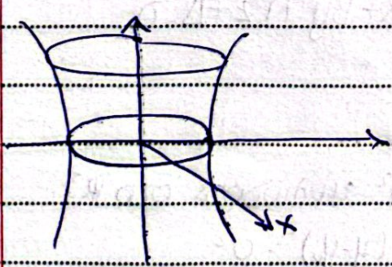
$$\pm a\left(1-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$



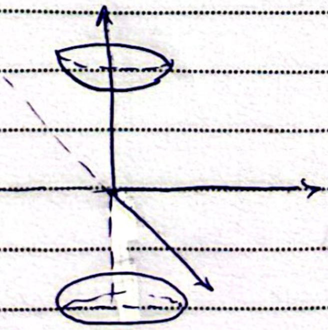
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

Ελλειπτικό υπερβολοειδές: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

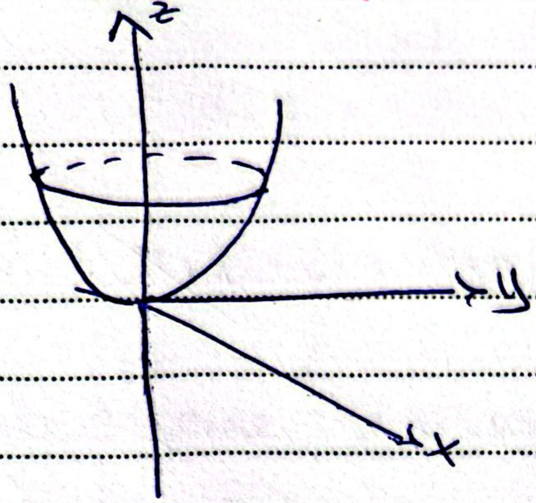
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1+\frac{z^2}{\gamma^2}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1$$



Ελλειπτικό παραβολοειδες: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$



Υπερβολικός Παραβολοειδές: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$

22η διάλεξη

Επιφάνειες

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta xy + 2Eyz + 2Zxz + 2Hx + 2\Theta y + 2Kz + F = 0$$

$|A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| + |E| + |Z| \neq 0.$

Να φέρουμε την επιφάνεια στην κανονική μορφή.

Ορθογώνιοι Πίνακες $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\boxed{A \cdot A^t = I_3, \quad \det A = 1}$$

$A \cdot A^t = I_2 \quad \det(A) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Διαγωνοποίηση του πίνακα της διγραμμικής μορφής $ax^2 + 2bxy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + F = 0.$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(\delta\ \varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

Άρα: $(x\ y\ z)\begin{pmatrix} A & \Delta & Z \\ \Delta & B & E \\ Z & E & \Gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(H\ \Theta\ K)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + F = 0.$

Παράδειγμα: Αποδείξτε πως η επιφάνεια:

$$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz - 2xz - 10x + 6y - 2z - 10 = 0.$$

είναι ελλειψοειδές. Να τη φέρουμε στην κανονική της μορφή. Ποιο είναι το κέντρο του?

Απάντηση:

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(-5\ 3\ -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 10 = 0.$$

Διαγωνοποίηση του $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Αν λ ιδιοτιμές: $\exists$ ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ώστε

$$(A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda I_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\phi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda-1 & -1+1 & -1+3-\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(6-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{(3-\lambda)}\,\underline{(6-\lambda)}\,\underline{(2-\lambda)}$$

$\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5a - b - \gamma = 2a \\ -a + 3b + \gamma = 2b \\ -a + b + 3\gamma = 2\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = b+\gamma \\ a = b+\gamma \\ a = b+\gamma \end{cases}$$

$a=0 \quad b+\gamma=0 \Rightarrow b=-\gamma$

Επιλέγουμε: $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\lambda=3$: $(\ )\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a - b - \gamma = 3a \\ -a + 3b + \gamma = 3b \\ -a + b + 3\gamma = 3\gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b = a \\ \gamma = a \end{bmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$\lambda=6 \quad (\ )\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\alpha-\beta-\gamma=6\alpha \\ -\alpha+3\beta+\gamma=6\beta \\ -\alpha+\beta+3\gamma=6\gamma \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \gamma-\alpha=3\beta \\ -\alpha+\beta=3\gamma \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \gamma=-\alpha-\beta \\ -2\alpha-\beta=3\beta \\ -\alpha+\beta=-3\alpha-3\beta \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma=\alpha-\beta \\ \\ \alpha=-2\beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha=-2\beta \\ \gamma=\beta \end{array}$ Άρα $\begin{pmatrix}-2\beta\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ Τελικά $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix} = P.$

$\det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt2}\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{2}{\sqrt{18}}+\frac{4}{\sqrt{18}}\right) = 1.$