/

23/9/2014

Ανάλυση 1:

Τερτίκας, καθε ελεύθερα ασκήσεις
www.math.uoc.gr/~tertikas
Γραφείο Ε-206
Βιβλία: rudin ή Διχρεπουσης

Η ανάλυση έχει: πεπερασμένα βήματα και ακαλλήλες άπειρες διαδικασίες.

"ΟΡΙΑ" → ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ.

● Πραγματικοί αριθμοί (Real numbers) $\mathbb{R}$:

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$a + b \mapsto a+b$

Άξιωμα: 1) $a+(b+c) = (a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2) $a+b = b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

3) $\exists\, 0$, ουδέτερο στοιχείο, $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, (-x)$ σύνθετο στοιχείο, $x+(-x) = 0$

$a,b \mapsto a \cdot b$

5) $a(bc) = (ab)c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

6) $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

7) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Άξιωμα

9) $x(y+z) = xy + xz$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Σώμα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Σύνολα (Sets):

subset

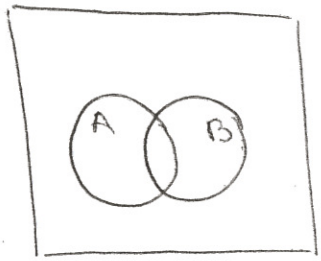
$A \subseteq \mathbb{R}$

$B \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ (ένωση)

$A \cap B \subseteq \mathbb{R}$ (intersection)

Διαγράμματα Venn:



Πότε το $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}$

Ορισμός: Κάθε στοιχείο του Γ είναι και στοιχείο του Δ

$\forall x \in \Gamma \Rightarrow x \in \Delta$ (φορμαλιστική έκφραση)

library genesis (Βιβλιοθήκη με βιβλία)

$\Gamma = \Delta$ όταν περιέχουν $\mathbb{R}$ ίδια ακριβώς στοιχεία

$\Gamma \subseteq \Delta$

$\Delta \subseteq \Gamma$ $\Rightarrow \Gamma = \Delta$

$\Delta \supseteq \Gamma$

$x \in \Gamma$

$\Gamma \ni x$

$A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A^c = \mathbb{R} \setminus A$ (complimet)

$\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ (το $A \neq \varnothing$ γιατί στο $\varnothing$ δεν μπορώ να "φτιάξω" στη θεωρεία θέλω).

Παράδειγμα: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x \notin A \Rightarrow x \in A^c \\ x \notin B \Rightarrow x \in B^c \end{array}\right| \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ ①

($\Leftarrow$) Έστω $x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \\ \& \\ x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \end{array} \right. \Rightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c$

δηλ. $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ∎

Παράδειγμα: Έστω $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ (induction) → (όταν έχω φυσιακούς δείκτες αυτό είναι το 1ο πράγμα που θα κοιτάξω)

Διάταξη (πραγματικών αριθμών): $\forall x \in \mathbb{R}$, είτε $x > 0$
είτε $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
είτε $x = 0$

μη αρνητικοί $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$

$\forall x, y$
είτε $x < y$
-//- $x > y$
Ολική διάταξη

Άνευ είναι ο τρόπος να διατάξω τα στοιχεία
(στους λιγμάδιους δεν έχω ολική διάταξη)

Ορισμός: Το $A \subseteq \mathbb{R}$ το λέμε άνω φραγμένο όταν $\exists\, M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall\, a \in A,\ a \leq M$.

(κάτω φραγμένο, $\exists\, m \in \mathbb{R},\ m \leq a,\ \forall\, a \in A$)

Αξίωμα: 10) **Πληρότητας:**

Κάθε (μη κενό) άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. (Ξ αριθμός Supremum) που είναι ελάχιστο άνω φράγμα)

Παραδείγματα:

1) $A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

   $\sup A = 1$

2) $B = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

   $\sup B = 1$

3) $\mathbb{N}$ (Natural) δεν είναι άνω φραγμένο

Απόδειξη: ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Έστω ότι $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο

$\Rightarrow$ Από το αξίωμα της πληρότητας

$\exists\, \sup \mathbb{N} = M,\ M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leq M$

(συνεχίζεται)

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ
- ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Αν ισχύει το $A \Rightarrow B$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

(η άρνηση της $B \Rightarrow$ την άρνηση της A)

ΣΥΣΧΕΤΙΖΟΥΜΕ

25/9/2014

Ανάλυση 1:

Άσκηση (συνέχεια): Το $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο σύνολο.

Απόδειξη: Απαγωγή σε άτοπο.

Έστω πως $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο σύνολο τότε από το αξίωμα του πληρωτικού: Εάν $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο της πληρωτικού, το $\mathbb{N}$ θα είχε supremum, δηλ $\exists M = \sup \mathbb{N}$ τότε το M είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα, τότε ο $M-1$ δεν είναι άνω φράγμα, οπότε $\exists n \in \mathbb{N}$

οπότε $n > M-1 \Rightarrow n+1 > M$ ⊗

γιατί το M είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ επίσης, αντίφαση.

(άνω φράγμα για το A σημαίνει ότι $\forall a \in A, a \leq M$)

(αν το M δεν είναι άνω φράγμα τότε $\exists a \in A : a > M$)

⊙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ:

i) $a \geq \beta \Leftrightarrow \boxed{a-\beta \geq 0}$

$x \geq y \Rightarrow a+x \geq \beta+y$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ είτε $-x \geq 0$

$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$

$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow x+y>0$

$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow xy>0$

Αν $a \geq \beta$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ μπορώ να έχω $\lambda a \geq \lambda \beta$?

• Αν $\lambda > 0$ $\lambda a \geq \lambda \beta \Leftrightarrow \lambda a - \lambda \beta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda (a-\beta) \geq 0$

$\lambda > 0$, $(a-\beta) \geq 0$

• Αν $-\lambda > 0$ $-\lambda a \geq -\lambda \beta \Leftrightarrow \lambda \beta \geq \lambda a$

Αν

$$\left.\begin{array}{l} a \geq \beta \geq 0 \\ x \geq y \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow ax \geq \beta y$$ αποδείξω

Αν

$$\left.\begin{array}{l} 0 \geq a \geq \beta \\ 0 \geq x \geq y \end{array}\right| \Rightarrow ax \leq \beta y$$

Γιατί

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq -a \leq -\beta \\ 0 \leq -x \leq -y \end{array}\right| \Rightarrow ax \leq \beta y$$

Θεώρημα: Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο

Ο s είναι το $\sup A$ αν και μόνο εάν το s έχει δύο ιδιότητες: i) $\forall a \in A, a \leq s$ ($\to a - s \leq 0$) → το s είναι άνω φράγμα

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$ → δεν θεωρείται άνω φράγμα

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Αν το $s = \sup A$ έχει τις ιδιότητες (i), (ii)

($\Leftarrow$) Αν το s έχει ~~τρεις~~ ιδιότητες (i), (ii) τότε το $\boxed{s = \sup A}$

Αν το $s' = \sup A$ θα έπρεπε $a \leq s'$ άρα αναγκαστικά $s' = s$

Σημείωση $a \leq \underline{5} = s$

$a - s < 5$

Άσκηση: Έστω $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, το B άνω φραγμένο. Τότε το A, B έχουν supremum και ισχύει
$\sup A \leq \sup B$

Απόδειξη: Από το αξίωμα της πληρότητας (το B είναι άνω φραγμέ-
(με το αξίωμα) νο) έπεται ότι έχει $\sup B$

και το A είναι άνω φραγμένο γιατί

$A \subseteq B$

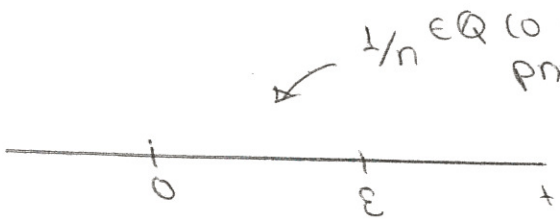
B άνω φραγμένο $\Big| \Rightarrow$ A άνω φραγμένο

(διατί) αν M άνω φράγμα του B
$\beta \leq M, \forall \beta \in B$
$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq M. \Rightarrow$ M άνω φράγμα για το A.
Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ιδιότητα με $M = \sup B$
$\forall a \in A \quad a \leq \sup B \Rightarrow$ το $\sup B$ είναι ένα άνω φράγμα του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup A \leq \sup B$

Απόδειξη (με τις ιδιότητες)

Θεώρημα: (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ ώστε το $\frac{1}{n} < \varepsilon$



Βασική ιδιότητα $\mathbb{N}$. είναι ότι δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδειξη: $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < n\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$

↳ Ισχύει πάντα αφού το n δεν έχει πού άνω φράγμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχει το $\inf A$ (δηλ. μέγιστο κάτω φράγμα)

Απόδειξη:

$A \subseteq \mathbb{R}^+ \quad \inf A = \frac{1}{\sup B}$, $B = \{\frac{1}{a}, a \in A\}$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-a / a \in A\}$ τότε το B είναι άνω φράγμα, διότι επειδή το A είναι κάτω φράγμα, $\exists\, -M \in \mathbb{R}$ ώστε $-M \leq a$, $\forall a \in A$.

$$-a \overset{\Downarrow}{\leq} M, \quad \forall a \in A$$

M άνω φράγμα του B, δηλ B άνω φραγμένο.

πάρχει το $\sup B = S$ με τις ιδιότητες i) $-a \leq S$, $\forall a \in A$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $S - \varepsilon < -a$ $\Big| \iff$

$$\iff \begin{cases} -S \leq a, \ \forall a \in A. \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \text{ ώστε} \\ \quad a < -S + \varepsilon \end{cases}$$

Συμπεράσμα: το $-S$ είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$\inf A = -S$

30/9/2014

Ανάλυση 1:

Άσκηση: Να αποδείξετε επαγωγικά (Αν Bernoulli)

$(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq -1$

Μαθηματική επαγωγή: $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
(ισοδυναμεία)

Βήμα 1ο: Αποδεικνύουμε την πρόταση για $n = n_0$
δηλ $P(n_0)$ είναι αληθής.

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ αληθεύει

Βήμα 3ο: Αποδεικνύουμε ότι αληθεύει και η $P(k+1)$

Απόδειξη: Βήμα 1ο: Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n = 1$
δηλ: $(1+x)^1 \geq 1+1x \Leftrightarrow 1+x = 1+x$ ισχύει

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k \in \mathbb{N}$, δηλ

$$(1+x)^k \geq 1+kx, \quad \forall x \geq -1$$

Βήμα 3ο: Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n = k+1$, δηλ

$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, $x \geq -1$

Παίρνουμε: $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$

Όπως το $(1+x)^k \geq 1+kx$ και $1+x \geq 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$

($x \geq -1 \Rightarrow 1+x \geq 0$)

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 = 1+(1+k)x+\underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)x$ που ισχύει.

↓
αυτό είναι ένας θετικός αριθμός
άρα είναι το $1+(1+k)x+kx^2 \geq 1+$

Διώνυμο Newton: $(a+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \beta^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sup A.

Θεωρήμα: 1) $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο το sup A είναι ο αριθμός

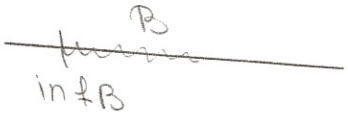
i) $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in A$, $\sup A - \varepsilon < b$

2) $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο, $\exists \inf B$

i) $\inf B \leq b$, $\forall b \in B$

ii) $\exists b' \in B$ $\inf B + \varepsilon > b'$



Εφαρμογή: Έστω $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένα. Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο, και καλίστε $\sup(A \cup B)$, $\sup A$, $\sup B$

$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

Απόδειξη: Επειδή τα A, B είναι άνω φραγμένα, $\exists \sup A$, $\sup B$ και καλίστε

$\forall a \in A$, $a \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\forall b \in B$, $b \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\forall x \in A \cup B$, $x \leq \max(\sup A, \sup B)$

Υποθέσαμε ότι $\sup A \geq \sup B$ άρα το δεξιότερο είναι:

$\max(\sup A, \sup B) = \sup A$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a' \in A$ $\sup A - \varepsilon < a'$

↳ αυτό είναι στοιχείο και στην ένωση

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists a' \in A \cup B : \sup A - \varepsilon < a'$

$\Rightarrow \sup(A \cup B) = \sup A$

Θεώρημα: Η εξίσωση: $x^2=2$ έχει θετική λύση.

Απόδειξη:

Θεωρώ το σύνολο $A=\{x>0 \mid x^2<2\}$

$\left(B=\{x>0 \mid x^2>2\}\right.$ όπου $\inf B = "\sqrt{2}"\left.\right)$

τότε $1\in A \neq \varnothing$

το 2 είναι άνω φράγμα για το A διότι:

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ: $\forall x\in A \Rightarrow x\leq 2$ ✓

$\exists x\in A$, ώστε $x>2$

$x>2>0 \Big| \Rightarrow x^2>4>2$ ΑΤΟΠΟ

~~Άρα το sup~~

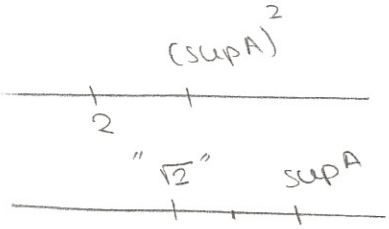
Οπότε από το αξίωμα της πληρότητας, το A έχει supremum ($\sup A$)

Θα αποδείξουμε ότι: $(\sup A)^2=2$

Έστω ότι $(\sup A)^2 \neq 2$

τότε είτε $(\sup A)^2>2$ ①

είτε $(\sup A)^2<2$ ②



① →

Αν καταφέρω να βρω ένα $\varepsilon>0$ για το οποίο ισχύει το $(\sup A-\varepsilon)^2>2$ τότε $\exists$ άνω φράγμα μικρότερο από το $(\sup A-\varepsilon)^2$

Άρα $(\sup A-\varepsilon)^2>2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2+\varepsilon^2-2\sup A\cdot\varepsilon>2$

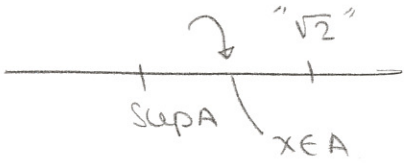
ΑΡΚΕΙ να βρω $\varepsilon>0$ ώστε: $(\sup A)^2-2\varepsilon\sup A>2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2-2>2\sup A\,\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{(\sup A)^2-2}{2\sup A}>\varepsilon>0$

↳ άνω φράγμα του A? $(\sup A-\varepsilon)$ άνω φράγμα του A

Άτοπο αφού είναι άνω φράγμα μικρότερο από την υπόθεση μου

3) → Αν $(\sup A)^2 < 2$



$(\sup A + \varepsilon)^2 < 2$

Θα βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε να έχουμε $(\sup A + \varepsilon)^2 < 2 \Leftrightarrow$

$\sup A + \varepsilon$ ↳ είναι στοιχείο του συνόλου

$(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 < 2$

Θεωρώ $0 \leq \varepsilon \leq 1$ και γράφω την παραπάνω:

$(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon < 2$

$0 < \varepsilon < \dfrac{2 - (\sup A)^2}{1 + 2\sup A}$

Αντίφαση διότι βρίσκουμε έναν αριθμό που είναι μεγαλύτερος από το sup αφού.

Άρα $(\sup A)^2 = 2$

Ιτιλίδα: i) Αποδείξτε ότι $\exists$ ρητός στο $(1,2)$

ii) Αποδείξτε ότι αν $a<b \Rightarrow \exists$ ρητός στο (a,b)

i) ~~Δεν~~ $\exists$ άλλος ενδιαμέσως ακέραιος γιατί $(2-1)<1$

$\beta-a>1 \Rightarrow \exists\ x \in \mathbb{Z}$

$0<b-a<1$, $n(b-a)>1$

~~αν $(\beta-a)>1$~~

Αν $m \in \mathbb{Z} \in [na, nb]$

$a<\frac{m}{n}<b$

$[x] = \sup\{m \in \mathbb{Z},\ m \le x\}$

2/10/2014

Ανάλυση 1:

Θεωρία: Η εξίσωση $x^2 = 2$, έχει θετική λύση

$A = \{ x \mid 0 < x,\ x^2 < 2 \}$ Στο τυχαίο διάστημα να δείχω ρητό

$(\sup A)^2 = 2$

Θεωρία1: Αν $a < b$, τότε στο δ/λα $[a,b]$, $\exists$ ρητο q, δηλ. $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ώστε το $a \le q \frac{m}{n} \le b$

Θεωρία 2: Αν $a < b$, τότε στο διάστημα $[a,b]$, υπάρχει αρητος δηλ: $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε $a \le k \le b$

$\longleftrightarrow$

$a < b$, $\exists$ ακεραιος, αν $b - a \ge 1$

Αν $x \in \mathbb{R}$ ακεραιο μέρος του $[x]$

→ είναι όλοι ακέραιοι;

$[x] := \sup \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \le x \}$
(ορ)

? $\exists m \in \mathbb{Z} : m \le x$

Έχω στον αρνητικό ακεραίους: $\exists -m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ $-m \le x$ $\Leftrightarrow$ $-x \le m$ (είναι δικαίωμα το σύνολο αφού $\exists +m \ge -x$)

Το x είναι άνω φραγμα

$\sup A \notin \mathbb{Z}$

$\sup A \leq x$

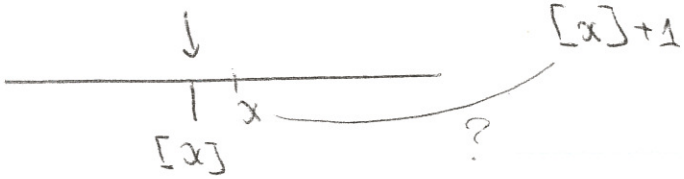
$\sup A - 1 < \sup A$ (αυτόματα)

$\Rightarrow \exists\, y \in A$ ώστε $\sup A - 1 < y$

$\sup A < y + 1$ (ακέραιος)

$\Rightarrow \sup A \in \mathbb{Z}$

Ιδιότητα:



) $[x] \leq x < [x] + 1$

Ασκήσεις:

1) Αποδείξτε ότι $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $[x+y] \geq [x] + [y]$ ισοδυναμούν;

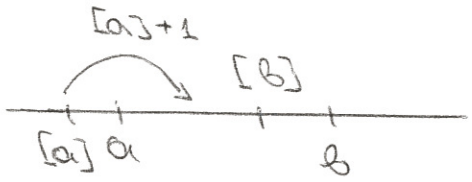
2) $n \in \mathbb{Z}$ $[x+n] = [x] + n$

Έαν $a < b$, Ερώτηση: Υπάρχει ακέραιος στο $[a, b]$

ΝΑΙ αν έχουν $\boxed{b - a \geq 1}$ βρείτε ένα

$[b] \in [a, b]$

Δεδομένου ότι ισχύει $b - a \geq 1$



Αν $0 < b - a < 1$



$[\beta]$
$[a] + 1$
} δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αν έχει δεκαδικό μηδέν 1

Ανάλυση του προβλήματος:

Έστω ότι έχω βρει α και β τ.ω. $a \le \frac{m}{n} \le b \Leftrightarrow$

$na \le m \le nb$ ← 2 παράλληλοι αριθμοί.

↓

ακέραιος

Αν χωρίζω ότι $nb - na \ge 1$ τότε είναι σίγουρο ότι ∃ ακέραιος

$\Leftrightarrow n(b-a) \ge 1 \Leftrightarrow \boxed{n \ge \frac{1}{b-a}}$ → Θέλω να βρω ℕ

δε αυτήν την ιδιότητα.

$$\left[\frac{1}{b-a}\right] \le \frac{1}{b-a} < \underbrace{\left[\frac{1}{b-a}\right] + 1}_{\| \; n}$$

Απόδειξη Θεωρήματος 1: Επιλέγω $n = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$, διότι

$b - a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b-a} > 0$

Τότε $\frac{1}{b-a} < n \Leftrightarrow n(b-a) > 1 \Leftrightarrow nb - na > 1$

επομένως στο διάστημα $[na, nb]$ μπορώ να βρω ακέραιο

για παράδειγμα επιλέγω $m = [na] + 1$

τότε $na \le m \le nb \Leftrightarrow a \le \frac{m}{n} \le b$

οπότε $q = \frac{m}{n} = \frac{[a + a[\frac{1}{b-a}]] + 1}{\left[\frac{1}{b-a}\right] + 1}$

Αρκεί να το $x>0$ $x^2=2$

Απαγωγή σε άτοπο: Ερώτηση $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Έστω ότι $x \in \mathbb{Q}$, $\exists\, m,n \in \mathbb{N}$ ώστε $x=\frac{m}{n}$ και απλοποιώ) $(m,n)=1$

και επομένως $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$

Αν ο m ήταν περιττός, δηλ $m=2k-1$, $k \in \mathbb{N}$

ώστε $m^2=(2k-1)^2 = 4k^2-2k+1 = 4k(k-1)+1$ περιττός

$\Rightarrow m$ άρτιος, $m=2m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}$

$4m_1^2 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2$

με τον ίδιο λόγο $\Longrightarrow$ n άρτιος, δηλ $n=2n_1$

$m=2m_1$ $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$

$2 \mid (m,n)$

ΑΤΟΠΟ

Εναλλακτικός τρόπος με άρτιο $\frac{m}{n} \cdot a = a'$ άρτιος

Εναλλ. Θεωρ 2:

$1 + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1}$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$, αναγκαία

$\exists \sup A \in \mathbb{R}$

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x, x^2 < 2 \}$

$\sup A = \sqrt{2}$

Απ Θεωρ 2:

Θα δρω $m \in \mathbb{Z}$ ~~ξεχωριστά~~

$n \in \mathbb{N}$ ωστε $a \le \underbrace{\frac{m}{n}\sqrt{2}}_{\text{διαφορά}} \le b \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \le \frac{m}{n} \le \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Από Θεωρητικά (1) $\exists$ ρητός $q = \frac{m}{n}$ που να ικανοποιεί την (1)

~~Από~~

Άσκηση: Βρείτε για $a < b$ με $\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ωστε

$$a \le \frac{m}{n} + \sqrt{2} \le b$$

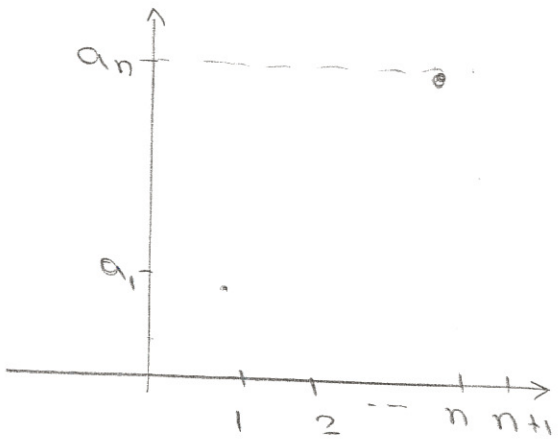
Ακολουθίες:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$f(n) = \dots \quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

f_n

Γραφική παράσταση:



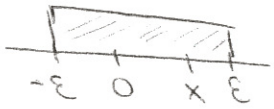
Πότε η a_n συγκλίνει είναι συγκλίνουσα ακολουθία

Αν $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ή $a_n \to \ell,\ n \to \infty$

Ορισμός: $\lim a_n = \ell$ όταν:

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - \ell| < \varepsilon,\ n \geq n_0$

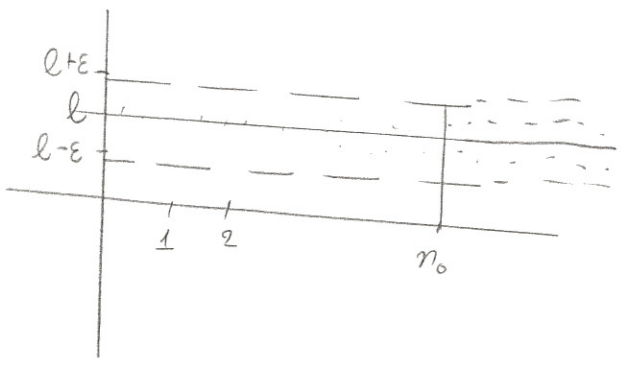
$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$



Τριγωνική ανισότητα: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$|a_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon,\ n \geq n_0$

$-\varepsilon < a_n < \varepsilon + \ell,\ n \geq n_0$



$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \text{ώστε } |a_n - 0| < \varepsilon, n \geq n_0$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$



Διαλέγουμε:

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Τότε αν $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

$\Rightarrow$ αν $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \; n \geq n_0$

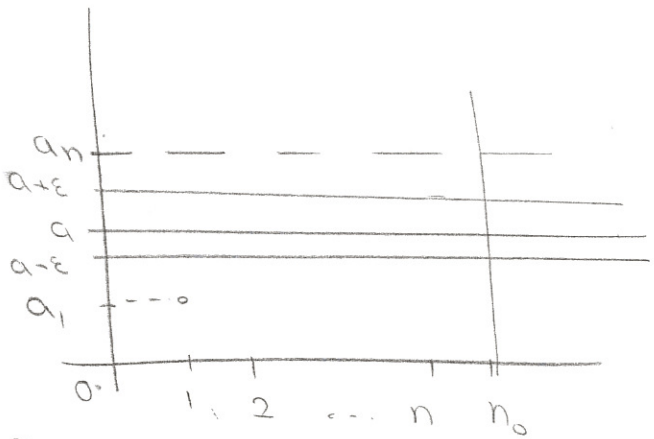
7/10/2014

Ανάλυση 1:

Ακολουθίες (Πραγματικών) Αριθμών:

Ορισμός: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ όταν για $\forall \varepsilon > 0$, να $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$|a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq n_0 \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $n \geq n_0$



Ερώτηση: Μπορεί η ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά (διαφορετικούς) αριθμούς?

δηλ. $\exists\, a, a'$, $a \neq a'$, ώστε (I) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, (II) $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$

Απόδειξη: Έστω ότι είναι δυνατόν, δηλ. έχουμε (I), (II)

Από τον ορισμό έχουμε ότι: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq n_1$

Επίσης $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists\, n_2 = n_2(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |a_n - a'| < \varepsilon'$, $n \geq n_2$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{|a-a'|}{4}$, τότε $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ $|a_n - a| < \frac{|a-a'|}{4}$, $n \geq n_1 \Rightarrow$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a'| < \frac{|a-a'|}{4}$, $n \geq n_2 \Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2) = n_0$

$\Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2) = n_0$

Τότε όμως: $|a-a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| <$

$$< \frac{|a-a'|}{4} + \frac{|a-a'|}{4}, \quad n \geq n_0$$

$|a-a'| < \frac{|a-a'|}{2} \iff \frac{1}{2}|a-a'| < 0$ ΑΔΥΝΑΤΟ.

Πρόταση: Έστω η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, είναι συγκλίνουσα ακολουθία
Τότε η ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Από τον ορισμό $\exists\, a\in\mathbb{N}$, ώστε, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_0=n_0(\varepsilon)$:

$|a_n-a|<\varepsilon,\ n\geq n_0$

Επιλέγουμε $\varepsilon=1$, τότε $a-1<a_n<a+1,\ n\geq n_0$

Τότε $\min(a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1},a-1)\leq a_n\leq \max(a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1},a+1),\ \forall n\in\mathbb{N}$

□

Ⅰ) Ακολουθία φραγμένη $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\exists\, m\leq M$

ώστε ~~$m\leq a_n\leq M,\ \forall n\in\mathbb{N}$~~ $-\max(|m|,|M|)\leq m\leq a_n\leq M\leq \max(|M|,|m|)$

Ⅱ) ~~Ακολουθία~~ Απολύτως φραγμένη. ($|a_n|$ φραγμένη)

$\exists\, M'>0 : |a_n|\leq M',\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ -M'\leq a_n\leq M$

Σειρούλα: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

a_n αύξουσα

$a_n\uparrow$ $\qquad a_{n-1}\leq a_n,\ \forall\, n=2,\dots$

$a_n\rightarrow$



a_n φθίνουσα

$a_n\downarrow$

$a_n\searrow$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n \uparrow$ άνω φραγμένη

Θεωρούμε το σύνολο: $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$

$a_1 \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$ επειδή η $a_n / n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη, $\exists M \in \mathbb{R}$

$a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ το M είναι άνω φράγμα για το A.

Οπότε επειδή πληρούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος της πληρότητας, θα $\exists \sup A$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(από τον ορισμό του supremum): $a_n \leq a$. (i)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_{n_0}$ ώστε $a - \varepsilon < a_{n_0}$ (ii)

Συγκρίνω a_{n_0} με τυχαίο όρο a_n

δηλ. $a - \varepsilon < \underbrace{a_{n_0} \leq a_n}_{a_n \uparrow} \leq a$, $n \geq n_0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: (i)

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

Αποδείξαμε το $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Άλγεβρα συγκλινουσών ακολουθιών:

Πρόταση: Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Τότε i) $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b$$

ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$$

Απόδειξη

$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1 = n_1(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon/2, n \geq n_1 \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$\lim b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_2 = n_2(\varepsilon): |b_n - b| < \varepsilon/2, n \geq n_2 \geq n_0$

↗ Για $\varepsilon>0$ $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

i) $|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a| + |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{2}$

ii) Πρόκειται: Αν ισχύει $|a_n-a|<\varepsilon$, $|b_n-b|<\varepsilon$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n-b) + b(a_n-a)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|a_n|}_{\varepsilon}|b_n-b| + |b|\underbrace{|a_n-a|}_{\varepsilon}$$

Επειδή η a_n συγκλίνει $\Rightarrow$ είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists$ ένα M

$$\leq M|b_n-b| + |b||a_n-a|$$

Έστω $\varepsilon>0$

$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1 = n_1(\varepsilon):$

$$|a_n-a| < \varepsilon/2|b| \quad n \geq n_1 \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$$

$\lim b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_2 = n_2(\varepsilon): |b_n-b| < \varepsilon/2M \quad n \geq n_2 \geq n_2$

- $\frac{\varepsilon}{2M} \leq M|b_n-b| + |b||a_n-a| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ (διαιρώ με $M \neq 0$)

- $\frac{\varepsilon}{2} \leq M|b_n-b| + |b||a_n-a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ∎

Πρόταση: 1) $a_n \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

$a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

2) Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$ και $|b_n| \leq M$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$

3/10/2014

Ανάλυση 1:

Φυλλάδιο 2:

Άσκηση 1:

Δίνεται το σύνολο $A=\{\frac{1}{n} / n\in\mathbb{N}\}$

Βρείτε με απόδειξη το $\inf A$.

Λύση:

$\inf A=0$

i) $\forall a\in A \quad a\geq \inf A$

ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists a\in A \quad a<\inf A+\varepsilon$

) $\frac{1}{n}\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$ άρα $a\geq 0 \ \forall a\in A$

) Έστω $\varepsilon>0$. Από Αρχ. ιδιότητα $\exists n\in\mathbb{N} \ \frac{1}{n}<\varepsilon$

$\exists a\in A, a<\varepsilon+0$

Άσκηση 2: $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$

$\sup A=S$

$\inf B=t$

Αυτό που θέλω να δείξω είναι ότι $\sup(A-B)=S-t$

) $\forall x\in A-B \quad x\leq S-t$

ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists x\in A-B \quad x>(S-t)-\varepsilon$

$\sup A=S \rightarrow \forall a\in A \ a\leq S$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists a\in A \ a>S-\varepsilon$

$\inf B=t \rightarrow \forall b\in B \ b>t$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists b\in B \ b<t+\varepsilon$

Δεδομένα

i) $x \in A-B$

$x = a-b$, για κάποια $a \in A$, $b \in B$

$a \leq s$

$b \geq t \Rightarrow -b \leq t$ $\Rightarrow a-b \leq s-t \Rightarrow x \leq s-t$

ii) Έστω $\varepsilon > 0$

$\exists a \in A \quad a > s - \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists b \in B \quad b < t + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -b > -t - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow a-b > s-t-\varepsilon$, $\varepsilon \in A-B$

Άσκηση 3: $\sqrt{2} \leq \frac{m}{n}\sqrt{3} < 2$

$a < b$

- $b-a \geq 1 \rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad a < k < b$

  $\Downarrow$

  $k = [b]$

$b-a < 1 \quad \exists n \in \mathbb{N}$

$n(b-a) \geq 1, \quad n = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1$

Ψάχνω $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \frac{m}{n} < \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ $\qquad \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 1$

$n = \left[\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}\right] + 1$

$n\frac{2}{\sqrt{3}} - n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \geq 1$

$\exists n \in \mathbb{N} \quad n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq m \leq n\frac{2}{\sqrt{3}}$

$m = \left[\frac{2n}{\sqrt{3}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}\,n}{\sqrt{3}}\right] + 1$

Αλλά είναι πράξεις βρίσκω $m \neq 3$ για $n = 3$

Έστω $s^3 > 3$

$(s-\varepsilon')^3 > 3$

$s^3 - 3s^2\varepsilon' + 3s\varepsilon'^2 - \varepsilon'^3 > 3$

Παίρνω $\varepsilon' \in (0,1)$ $\varepsilon' < \frac{s^3-3}{3s^2+1}$

$(s-\varepsilon')^3 = s^3 - 3s^2\varepsilon' + 3s\varepsilon'^2 - \varepsilon'^3 > s^3 - 3s^2\varepsilon' - \varepsilon' = s^3 - \varepsilon'(3s^2+1) >$

$> s^3 - \frac{s^3-3}{3s^2+1}(3s^2+1) = 3$

$(s-\varepsilon')^3 > 3$

$\exists\, a \in A \quad a > s-\varepsilon'$

$a^3 > (s-\varepsilon')^3 > 3$

Άτοπο

Άρα $\underline{s^3 = 3}$

Άσκηση 4:

Παίρνω $A=\{x>0 \mid x^3<3\}$

: $\sup A$ είναι ρίζα (θετική) της εξίσωσης $x^3=3$

δηλ. $(\sup A)^3=3 \Rightarrow s^3=3$

· Έστω ότι $s^3<3$

Θέλω ένα $\varepsilon>0$ τ.ω. $(s+\varepsilon)^3<3$



$\Downarrow$

$s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon^2+\varepsilon^3<3$

έαν $\varepsilon\in(0,1)$ τότε $\varepsilon^3<\varepsilon$

$\varepsilon^2<\varepsilon$ Άρα $s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon+\varepsilon<3 \Rightarrow$

$\varepsilon=\min\left\{1, \dfrac{3-s^3}{1+3s^2+3s}\right\} \Rightarrow \boxed{\varepsilon<\dfrac{3-s^3}{1+3s^2+3s}}$

Άρα

$(s+\varepsilon)^3=s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon^2+\varepsilon^3<s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon+\varepsilon=s^3+\varepsilon(3s^2+3s+1)<$

$<s^3+\dfrac{3-s^3}{1+3s^2+3s}(3s^2+3s+1) \Rightarrow (s+\varepsilon)^3<3$

$s+\varepsilon>s$

$s+\varepsilon\in A$

ΑΤΟΠΟ

Πέμπτη 9 Οκτωβρίου 2014

Ανάλυση 1

Ορισμός

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

$|a_n - a| < \varepsilon,\ n \geq n_0$

Θεώρημα

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει

ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΞΕΡΩ ΑΚΡΙΒΩΣ ΤΗΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ ΦΡΑΓΜΕΝΗ

Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, τότε $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα

ακολουθία και μάλιστα $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$

Απόδειξη

Έστω $\beta \neq 0$

Επειδή η a_n είναι συγκλίνουσα, θα είναι απολύτως φραγμένη, δηλαδή $\exists\ M>0$

$$|a_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω $\varepsilon>0$, επειδή η a_n συγκλίνει ($\lim a_n = a$)

$\exists\ n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

Αντιστοίχα, επειδή $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$

$\exists\ n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$|\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad n \geq n_2$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε για $n \geq n_0$

προσθέτω και αφαιρώ $a_n\beta$

$$|a_n\beta_n - a\beta| \leq |a_n||\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

Οπότε η $a_n\beta_n$ είναι συγκλίνουσα

$$\lim(a_n\beta_n) = a\beta$$

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ φορές}}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n} \cdot n\right)$$

$\neq$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΑΥΤΗ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Παραδείγμα

Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία, μάλιστα:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$2 < \frac{9}{4} < \frac{64}{27}$ Άρα αύξουσα

Θα αποδείξουμε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα:

δηλαδή:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \boxed{\frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}} \leftarrow \text{Άσκηση: Να αποδειχθεί με επαγωγή.}$$

Μήπως να χρησιμοποιήσαμε ανισότητα Bernoulli?

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \ n \in \mathbb{N}$$

$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1+x \iff x = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$ Τι πρέπει να είναι το x ...

$$x = -\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1 \iff$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 \iff (n+1)^2 \geq 1$$

Συνεχεία με 3Α

Συνέχεια από 2Β

Όμως:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x = 1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$



Επομένως $a_n \geq a_1 = 2$

Ιδιότητες Συγκλινουσών:

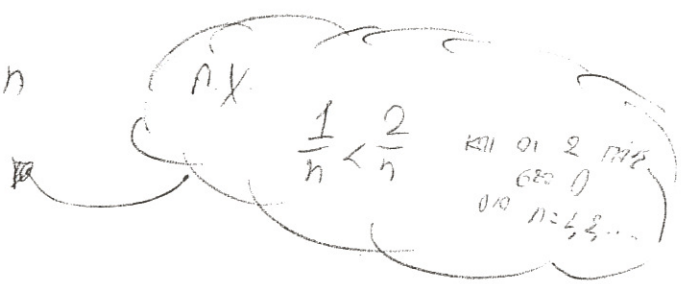
α) Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και b_n φραγμένη τότε $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και μάλιστα $\lim(a_n b_n) = 0$

β) Έστω a_n, b_n συγκλίνουσες ακολουθίες που επαληθεύουν κατά προσέγγιση:

$$a_n < b_n \quad n = 1, 2, \ldots$$

Τότε

$$\therefore \lim a_n \leq \lim b_n$$



γ) Κριτήριο Σάντουιτς ή Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ τέτοιες ώστε

$$a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι

$$\lim a_n = a$$

$$\lim \gamma_n = a$$

Τότε η β_n είναι συγκλίνουσα και μάλιστα

$$\lim \beta_n = a$$

$\lim \beta_n = -\infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$\beta_n < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq n_0$$

Κριτήριο

Αν $\beta_n \to -\infty$

$a_n \leq \beta_n \Rightarrow \lim a_n = -\infty$



Όπως:

$k_n \geq n_0, \forall n \geq n_1$

και επομένως a_{k_n} ικανοποιεί:

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon, \quad n \geq n_1$$

$\Rightarrow a_{k_n}$ συγκλίνουσα με $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{k_n} = a$.

SOS Για να μην συγκλίνει η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αρκεί να υπάρχουν δύο υπακολουθίες που να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

π.χ.

$a_n = (-1)^n$ είναι μη συγκλίνουσα ακολουθία, διότι

$$a_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = -1$$

Άσκηση: Έστω ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε:

a_{2n} συγκλίνει

a_{2n-1} συγκλίνει

Τότε η a_n είναι

Άσκηση

Αποδείξτε ότι η $Y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

είναι συγκλίνουσα ακολουθία

συγκλίνει $\ln 2$

14/10/2014

Ανάλυση 1:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η ακολουθία $(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Οι υπακολουθίες $a_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$a_{2n-1} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ Η a_n δεν συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Θα μπορούσα να το αποδείξω με βάση το κριτήριο παρεμβολής

δηλ) $y_n \le a_n \le z_n$ (θα αποτύχει αυτός ο τρόπος)

$\le x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \le \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n\text{-φορές}} = \frac{n}{n+1} \to 1$

$\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (n-φορές)

Άρα δεν καταλήγω κάπου αφού το ένα είναι $\frac{1}{2}$ και το άλλο 1

Ενώ στην πραγματικότητα η ακολουθία x_n συγκλίνει στο $\ln 2$

Πάμε τώρα στις ακολουθίες:

$n = 1 \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$n = 2 \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > x_1$

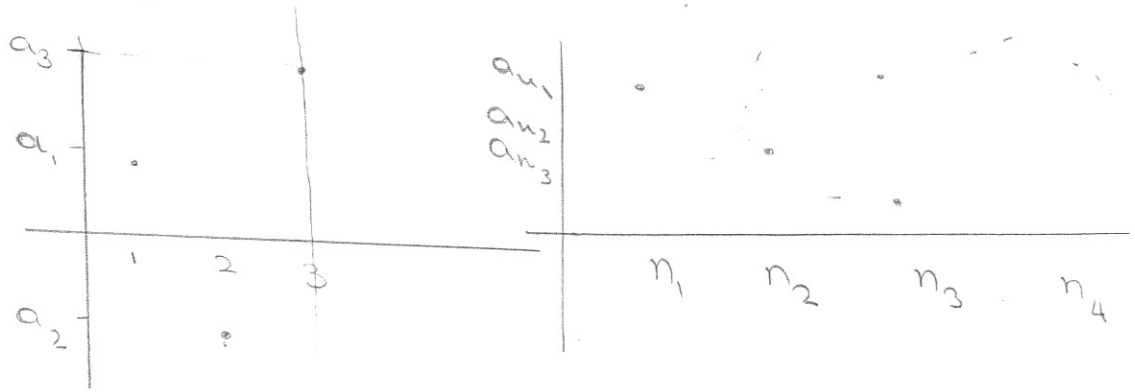
Αποδείξτε ότι $x_n \uparrow$

Η x_n είναι άνω φραγμένη, $x_n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano-Weirstrass)
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία
(Αν a_n φραγμένη $\Rightarrow \exists\, a_{n_k}$ συγκλίνουσα)

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μονοτονη υπακολουθία.

ΠΡΟΧΕΙΡΟ:



ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία. Ο όρος a_{n_0} είναι κορυφή
όταν $a_n \le a_{n_0}$, $n \ge n_0$
Έστω $A=\{n / a_n$ είναι κορυφή$\} \subseteq \mathbb{N}$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις
α) Α άπειρο σύνολο $A=\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ Τότε $a_{n_1} \ge a_{n_2} \ge a_{n_3} \ge \dots \ge a_{n_k} \ge \dots$
β) Α έχει πεπερασμένα (πλήθος στοιχείων), δηλ.
$A=\{n_1, n_2, \dots, n_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$
Θα φτιάξω τότε υπακολουθία που είναι αύξουσα.

$a_{\underbrace{n_{\ell+1}}_{m_1}}$

Αφού το $a_{n_{\ell+1}}$ δεν είναι κορυφή $\exists\, m_2 > m_1$ ώστε $a_{m_2} > a_{m_1}$
Πάλι ο a_{m_2} δεν είναι κορυφή άρα $\exists\, m_3 > m_2$ ώστε $a_{m_3} > a_{m_2}$
Κτλ επαγωγικά βρίσκω υπακολουθία a_{m_k} ώστε $a_{m_k} \uparrow$
Σε κάθε περίπτωση (ανάλογα αν το Α έχει πεπερασμένα πλήθος
στοιχείων ή όχι) βρίσκω ↑

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ Cauchy:

ΟΡΙΣΜΟΣ:
Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy όταν
$\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ ώστε: $|a_n-a_m|<\varepsilon$, $n,m\geq n_0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σύγκλιση, χωρίς να γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τότε είναι ακολουθία Cauchy και αντίστροφα (αν είναι ακολουθία Cauchy τότε συγκλίνει)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Η ακολουθία $x_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \sim \ln n$ (ονομάζεται αρμονική ακολουθία)

$1<1+\frac{1}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<\dots$ (είναι γνησίως αύξουσα, αύξουσα)

Έστω πως η x_n συγκλίνει. Επομένως είναι ακολουθία Cauchy
Οπότε $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ ώστε $|x_n-x_m|<\varepsilon$, $n,m\geq n_0$
Χωρίς βλάβη υποθέτω $m\geq n\geq n_0$ τότε θα είχαμε

$$\left|1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|-\left(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{m}\right)\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{m}<\varepsilon, \quad \forall m>n\geq n_0$$

Επιλέγω $m=2n$ τότε θα έπρεπε: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}<\varepsilon$

όμως $\frac{1}{2}=\frac{n}{2n}<\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}<\varepsilon$

ΑΔΥΝΑΤΟ για $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$

15/10/2014

Ανάλυση 1

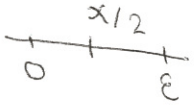
Φυλλάδιο 3

Άσκηση 1:

i) $x < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ (*)

Υδο. $x \leq 0$

Έστω $x > 0$,

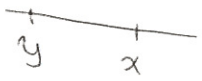


$\varepsilon = \frac{x}{2} > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} x < \frac{x}{2}$ ΑΤΟΠΟ (αφού θα έπρεπε να είναι $x > 0 \Rightarrow x > \frac{x}{2}$

ii) $x < y + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

Υδο $x \leq y$

Έστω ότι $x > y$



$\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0 \Rightarrow x < y + \frac{x-y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{y}{2} \Rightarrow x < y$ ΑΤΟΠΟ

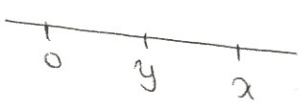
Άρα $x \leq y$

iii) $x < \varepsilon y \ \forall \varepsilon > 1$

$x, y > 0$

Υδο $x \leq y$

Έστω ότι $x > y > 0$



$\varepsilon = \frac{x+y}{2y} > 1$

$x + y > y + y = 2y$

$x < \frac{x+y}{2y} y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{y}{2}$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{x}{y} > 1$

$x < \frac{x}{y} y$

$\Rightarrow x < x$ ΑΤΟΠΟ

Άσκηση 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \left| \frac{n^2}{1+n^2} - 1 \right| < \varepsilon$

1ος τρόπος:

Έχουμε $\left| \frac{n^2}{1+n^2} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1+n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow 1+n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$

Αν $\varepsilon \leq 1 \rightarrow 1 \geq \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \Rightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1$

Αν $\varepsilon > 1 \rightarrow n_0 = 1$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $\varepsilon > 1$ παίρνω $n_0 = 1$

Αν $\varepsilon \leq 1$ παίρνω $n_0 = \left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1$

Τότε $\forall n \geq n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

$\varepsilon > 1 > \frac{1}{1+n^2} = \left| 1 - \frac{n^2}{1+n^2} \right|$

$\Rightarrow \frac{1}{1+n^2} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n^2}{1+n^2} - 1 \right| < \varepsilon$

$1 \geq \varepsilon$:

$$\left| \frac{n^2}{1+n^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{1+n_0^2} = \frac{1}{1+\left(1+\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]\right)^2} < \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

3ος τρόπος:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από Αρχ. Ι.Δ.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$n \geq n_0$

$$\left| \frac{n^2}{1+n^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n_0^2} < \frac{1}{n_0^2} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Asumsi 4:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1, \ |a_1 - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_1 \quad \frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2}$

$\varepsilon = b > 0 \quad \forall n \geq n_2 \quad b - b < b_n < b + b \Rightarrow b_n > 0$

Lösung 3:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \; |a_n - 1| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$

$$|a_n^2 - 1| = |(a_n - 1)(a_n + 1)| = |a_n - 1||a_n + 1| < \varepsilon |a_n + 1| = \varepsilon |(a_n - 1) + 2| \leq \varepsilon \left(|a_n - 1| + 2\right) < \varepsilon(\varepsilon + 2) = \varepsilon^2 + 2\varepsilon$$

16/10/2014

Ανάλυση 1:

(Συνέχεια ακολουθιών Cauchy)

Θυμίζω: Έστω a_n ακολουθία Cauchy αν

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $|a_n-a_{n-1}|<\varepsilon,\ m,n\geq n_0$

Θεώρημα: Η ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα αν είναι ακολουθία Cauchy

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) (Αν a_n συγκλίνουσα πρέπει ν.δ.ο a_n Cauchy)

Επειδή η a_n είναι συγκλίνουσα.

$\exists a\in\mathbb{R}: \lim a_n=a$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)$ τ.ω. $|a_n-a|<\varepsilon/2\ \forall n\geq n_0$

τότε για $n,m\geq n_0$ έχουμε $|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\leq|a_n-a|+|a_m-a|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ∎

($\Leftarrow$) Αν a_n: ακολουθία Cauchy. Θέλω ν.δ.ο η a_n συγκλίνει.

Επειδή η a_n: ακολ Cauchy. $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$ τ.ω.

$|a_n-a_m|<\varepsilon/2$, $n,m\geq n_0$ (1)

Θα αποδείξω ~~ότι~~ αρχικά ότι η a_n είναι φραγμένη

Όπότε για $\varepsilon=1$, $\exists n_1: |a_n-a_m|<1$ $n,m\geq n_1$

πότε αν $m=n_1$ τότε

$|a_n-a_{n_1}|<1$; $n\geq n_1$ $\Rightarrow$ (αιτιολόγηση: αιτιολόγηση τριγωνικής ανισότητα)

$|a_n|-|a_{n_1}|\leq|a_n-a_{n_1}|<1 \Rightarrow$ αυτόσεπτα

$|a_n|\leq 1+|a_{n_1}|$

Επομένως $|a_n| \leq M = \max(1+|a_n|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Επειδή η a_n είναι φραγμένη από το Θ. Bolzano-Weistrass υπάρχει
ομοιόμορφα υπακολουθία.

• Έστω $a_{n_k} \to a$ όταν $k \to \infty$ → από την ①

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon/2, \ k \geq k_1$ ②

Επιλέγω $N_0 = \max(n_0, n_{k_1})$ τότε $n, m \geq N_0$ και επομένως επιλέγω
για $m = n_k$ και έχω:

① → $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon/2$ $\quad n \geq N_0$, $k \geq k_1$ } Τότε

$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| +$

$+ |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

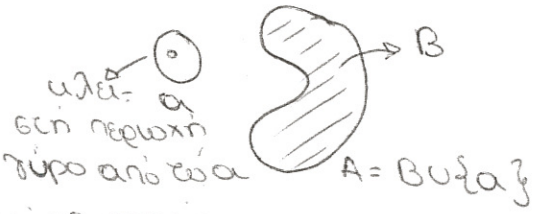
Άσκηση 1: Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και φραγμένο τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A$, τέτοιο
$\sup A - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a \leq \sup A$ και $\sup A - \varepsilon < a$
Επιλέγουμε αυθαίρετα $\frac{1}{n} = \varepsilon$, τότε $\exists a_n \in A$.
$\sup A - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup A$

-ρωτηση 1: Πότε α είναι σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου Α;

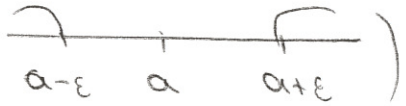
Το σημείο α είναι μεμονωμένο σημείο για το Α όταν $\exists\, n>0$:

$(A-\{a\}) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \varnothing$



Πότε το α είναι σημείο συσσώρευσης;

Το α είναι σημείο συσσώρευσης του Α όταν



$\forall \varepsilon>0,\ (A-\{a\}) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \varnothing$

Πρόταση: Το α είναι σημείο συσσώρευσης του Α, αν υπάρχει ακολουθία $a_n \in A-\{a\}$ ώστε $\lim a_n = a$

Αφού $\varepsilon = 1/n$ τότε $\exists\, a_n \in A$, όπου $a_n \in A-\{a\}$

$a - \frac{1}{n} \leq a_n \leq a + \frac{1}{n}$ (κριτήριο παρεμβολής) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = a$

Το 0 είναι σ.σ. του $(0,1)$ διότι $\frac{1}{2n} \to 0$

Αν έχω μια ακολουθία φραγμένη $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε:

$U_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$
$L_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$
$\Big\} \Rightarrow L_n \leq U_n$ (1)

Επίσης $\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \{a_k \mid k \geq n\}$

$\Rightarrow \sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{a_k \mid k \geq n+1\}$

$\Rightarrow U_n \geq U_{n+1}$ και $L_n \leq L_{n+1}$ (2)

Συνεπώς συνδυάζοντας με τα παραπάνω έχω

$$L_n \leq L_{n+1} \leq U_{n+1} \leq U_n$$

(2) (1)

Δηλαδή $L_n \uparrow$, $U_n \downarrow$

με $\lim_{n\to\infty} U_n := \lim_{k\to\infty} \sup a_k$

$\lim_{n\to\infty} L_n := \lim_{k\to\infty} \inf a_k$ ή $\lim_{k\to\infty} a_k$

$\Big\}$ $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} a_k$

Πρόταση: Αν a_{n_k} συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε το όριο της

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Απόδειξη:

$U_n = \sup\{a_k / k \geq n\} \Rightarrow a_n \leq U_n$ ($1^η$ ιδιότητα)

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, m \geq n : U_n - \varepsilon < a_m \leq U_n$ ($2^η$ ιδιότητα)

Αν επιλέξω συγκεκριμένα: $\varepsilon = 1/n$, $n \neq 0 \Rightarrow \exists\, m_0 \geq n$ ώστε

$U_n - \frac{1}{n} \leq a_{m_n} \leq U_n$

ώστε $a_{m_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

Ακολουθία συγκλίνουσα

Απόδειξη: Έχουμε $L_{n_k} \leq a_{n_k} \leq U_{n_k}$ (a_n: συγκλίνει, από υπόθεση)

↓ inf ακολουθίας, ↗ στοιχεία ακολουθίας, ↘ sup ακολουθίας

παίρνοντας όρια: $\lim_{k\to\infty} L_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} U_{n_k}$

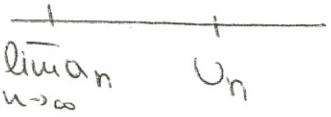
$=$ $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ $=$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

Πρόταση: Έστω a_n φραγμένη:

Να αο $\exists$ υπακολουθία a_{n_k} τ.ω $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

Απόδειξη. Επειδή $\lim_{n\to\infty} U_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τότε



$U_n - \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \varepsilon$, $n \geq n_0$

Επιλέγουμε $\varepsilon = 1/n \Rightarrow \exists\, m_n \geq n$: $U_n - \frac{1}{n} < a_{m_n} \leq U_n$

} ίδια

οπότε $a_{m_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

Επιλέγω $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k$: $U_{n_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ ①

ομοίως $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$: $U_n - \varepsilon < a_m \leq U_n$

επιλέγουμε $\varepsilon = 1/n$ $\exists m_n$: $U_n - \frac{1}{n} < a_{m_n} \leq U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ②

Από ① και ② έχω

$\lim_{m\to\infty} a_m - \frac{1}{k} < a_{m_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{m\to\infty}} a_m$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \lim_{m\to\infty} a_m$

4/11/2014

Άσκηση 1:

Κριτήριο Ολοκληρώματος:

Έστω $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$, $f\downarrow$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < +\infty$ $(\approx)$

$\Leftrightarrow \exists \lim_{A\to\infty} \int_1^A f(x)dx = k < +\infty$

Κριτήριο Συμπύκνωσης

Έστω $0\le a_n \downarrow$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει

Άσκηση: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$ αποκλίνει.

Συνήθως το κριτήριο ολοκληρώματος χρειάζεται διότι μετατρέπει το διακριτό σε κάτι το συνεχές.

• Στις ασκήσεις δεν χρειάζεται D' Hôpital

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x+1)},\quad x\ge 1$$

$$f'(x) = \frac{-(x\ln(x+1))'}{(x\ln(x+1))^2} = -\frac{\ln(x+1)+x\frac{1}{x+1}}{x^2(\ln(x+1))^2} < 0 \text{ άρα } \text{η } f(x)\downarrow$$

άρα $\exists \lim_{A\to\infty}\int_1^A f(x)dx$

τότε $\int_1^A f(x)dx = \int_1^A \frac{dx}{x\ln(x+1)}$

Ιδιαίτερη αλλαγή μεταβλητής:

$\ln(x+1) = y \Rightarrow dy = \frac{1}{x+1}dx$

άρα $\int_1^A \frac{dx}{x\ln(x+1)} = \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{(x+1)\,dy}{x\,y}$ με $x+1 = e^y$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{e^y dy}{(e^y-1)y} \ge \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{dy}{y} = (\ln y)\Big|_{\ln 2}^{\ln(A+1)}$$

↳ είναι πάνω ≥ 1

$$\ge \ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2) \Rightarrow$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx \geq \lim_{A\to\infty}\left(\ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2)\right) = +\infty$$

Λύση με το κριτήριο συμπύκνωσης: (αυτο που νομίζει είναι να αλλάξει την μεταβλητη)

$$a_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει

Δεν αυτία βάζω να νομίζω την αλλαγή $n+1 = 2^m$

Θέλω να φτιάξω τον όρο $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n+1)} \geq \frac{1}{\ln 2(n+1)}$ ~~$\frac{1}{n\ln 2}$~~

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln 2}$ Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n+1)} = +\infty$$

Απόδειξη κριτηρίου συμπύκνωσης

$\Rightarrow$) Αν $\sum a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει επίσης

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$

$S_n = 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$

$S_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n}$

Παρατηρώ ότι $2S_{2^n} \geq S_n$

Επομένως και τα συγκλίνουν.

Η αν είναι ↓ αρα

$a_1 \geq a_2$

$a_1 + a_2 \geq 2a_2$

$2(a_3+a_4) \geq 4a_4$

$2(a_5+a_6+a_7+a_8) \geq 8a_8$

} Ιδέα

Απόλυτη συγκλιση σειρων:

Κριτηρια απολυτου συγκλισης

Ερωτηση: Ποτε λεμε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει απολυτως;

Απαντηση: Αν συγκλινει η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Προταση: Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει απολυτως ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλινει) τοτε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει επισης.

(Μαλιστα $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$)

Παραδειγμα: Αν $a>0$, $b \in \mathbb{R}$ τοτε η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^b)}{n^{1+a}}$ συγκλινει;

Απόδειξη: Εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^b|}{n^{1+a}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλινει

→ εδω βαζουμε το απολυτο, γιατι θελω να περιορισω το sin στις θετικες του τιμες

1η λυση: Κριτηριο ολοκληρωσεως.

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+a}}, \quad x \ge 1$$

$$f'(x) = -\frac{(1+a)}{x^{2+a}} < 0$$

Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλινει αν $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπαρχει.

$$\int_1^A f(x)dx = \int_1^A \frac{dx}{x^{1+a}} = \int_1^A x^{-(1+a)}dx = \int_1^A \left(\frac{x^{-a}}{-a}\right)' dx$$

$$= \left(-\frac{x^{-a}}{a}\right)\Big|_1^A = -\frac{A^{-a}}{a} + \frac{1}{a} \qquad a>0$$

Αρα $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f(x)dx = \frac{1}{a}$, οποτε η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλινει.

$\Rightarrow$ Κριτηριο συγκλισης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^b|}{n^{1+a}}$ συγκλινει και απο την προταση η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^b}{n^{1+a}}$ συγκλινει.

Προκειμένου: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ δεν χρειάζεται να συγκλίνει
$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ δεν χρειάζεται να συγκλίνει $\Rightarrow$

$-\tilde{S}_n \le S_n \le \tilde{S}_n$

$\Rightarrow$ οπότε πάλι σε κριτήριο Cauchy

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Cauchy (μιλάμε για σειρές θετικών για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. ($\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$) δεν χρειάζεται το 'αρα)

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$
$|\tilde{S}_n - \tilde{S}_m| < \varepsilon$, $m > n \ge n_0$
Οπότε $\left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$, $m > n \ge n_0$

$= \left| -\sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$

$\sum_{k=n+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$, $m > n \ge n_0$

Θα αποδείξουμε ότι και η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι ακολουθία Cauchy επίσης.
Για το $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιούμε το n_0 που βρήκαμε προηγουμένως. Τότε για $m > n \ge n_0$ έχουμε $|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right|$

$= \left| -\sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |-a_k| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ $\forall$ S_n είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει.

Κριτήριο Dirichlet

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοιες ώστε:

$S_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k$ η S_n είναι ανολοίεως φραγμένη, και $b_n \downarrow 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (απλά) αλλά δεν συγκλίνει απολοίτως

Απόδειξη: Συγκλίση απολοίτη: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Συγκλίση απλά, διότι:
Θέτουμε $b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$

και $a_n = (-1)^n$ τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$, τότε $|S_n| \leq 1$, $n\in\mathbb{N}$

Γιατί $S_1 = -1$
$S_2 = 0$
$S_3 = -1$
$S_4 = 0$
$\vdots$
άρα $|S_n| < 1$

Άρα αυτή η σειρά συγκλίνει απλά όμως δεν
ξέρω ακόμα από το κριτήριο δεν ξέρω αν απολοίτως συγκλίνει

5/11/2014

Ανάλυση 1:

Φυλλάδιο 6

άσκηση 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}$$

$$\Rightarrow 1 = A(n+3) + Bn$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)n + 3A$$

$$\Rightarrow A+B=0 \text{ και } 3A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$B=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-3} -$$

$$- \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

άσκηση 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

α) Κριτήριο Σύγκρισης

$a_n = \frac{1}{n^3}$ $\quad$ $\sum b_n$ συγκλίνει

$\lim \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty$

$b_n = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < +\infty$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει

Αλλιώς

$c_n = \frac{1}{n(n+3)}$

$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n(n+3)}} = \lim \frac{n+3}{n^2} = 0 < +\infty$ συγκλίνει.

1) Κριτήριο Cauchy: Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$n > n \geq N = \max(n_0, 3)$

$|S_m - S_n| = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{m^3} \leq \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+5)} + \dots +$

$+ \frac{1}{m(m+3)}$ $\forall n, m \geq 3$

$\frac{1}{3}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{n+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+5} + \dots + \frac{1}{3}\frac{1}{m} - \frac{1}{3}\frac{1}{m+3}$

$\frac{1}{3}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+3}$

$\therefore \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \leq \frac{1}{3}\frac{3}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

άσκηση 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^2} \overset{n=1}{=} \frac{1}{1(\ln 2)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^2}$$

α) Κριτήριο Ολοκληρωτικός (η f είναι ↓)

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x+1))^2} dx \leq \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \qquad \begin{matrix} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx \end{matrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{y} \right]_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} < +\infty$$

β) Κριτήριο Συμπύκνωσης $a_n = \frac{1}{n(\ln(n+1))^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\ln(2^n+1))^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^2} =$$

→ αφού η σειρά συγκλίνει αρα όλο συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

άσκηση 4:

$a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum a_n$ συγκλίνει

$\lim n a_n = 0$

$\Rightarrow n a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim n a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

0 $l-\varepsilon$ l

Έστω $\lim n a_n = l > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, \ n a_n \geq l - \varepsilon$

$\varepsilon = l/2 \quad n a_n \geq \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{2}{l} a_n$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Άτοπο

$\sum a_n$ συγκλίνει

Άρα $\lim n a_n = 0$ δηλ δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν

6/11/2014

Άσκηση 1:

Πρόταση: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (απλά)

Κριτήριο: του Dirichlet

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω.

i) Η $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι φραγμένη δηλ $\exists M: |S_n| \le M, \forall n\in\mathbb{N}$.

ii) $b_n \downarrow 0$ (b_n φθίνουσα, με όριο μηδέν $\lim b_n = 0$)

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο Leibnitz:

Αν $b_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη: Θέτουμε $a_n = (-1)^n$, οπότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

$|S_n| \le 1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Άσκηση: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Αν $a_n = (-1)^n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $|S_n| \le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

και η $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι φθίνουσα διότι $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n+1}} = b_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Οπότε από το κριτήριο του Dirichlet, η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ $\rightarrow$ πρέπει να δείξουμε ότι συγκλίνει.

όπως $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\rightarrow$ φραγμένη

Θέλω να βρίσω το a_n αφού δεν ξέρω είναι τα, γι' αυτό.
Λοιπόν γράφω: $a_n = S_n - S_{n-1}$, $S_0 = 0$

Λοιπόν $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (S_n - S_{n-1}) b_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k \qquad k-1 = \ell$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} S_\ell b_{\ell+1}$$

γράφω αυτό γιατί δεν μου αρέσει το S_0

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - \sum_{\ell=1}^{n} S_\ell b_{\ell+1} - \cancel{S_0 b_1}^{0}$$

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k b_k - S_k b_{k+1})$$

τα ξέρω αυτά

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

συνεπώς έχει.

έχει $\lim_{n\to\infty} S_n b_n = 0$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy, δηλαδή:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$?

$|\bar{S}_m - \bar{S}_n| < \varepsilon$, $m > n \geq n_0$

$$|\bar{S}_m - \bar{S}_n| = \left| S_m b_m + \sum_{k=1}^{m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \right|$$

$$= \left| S_m b_m - S_n b_n + \sum_{k=n}^{m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \right| \leq$$

από τριγωνική ανισότητα

$$\leq |S_m| b_m + |S_n| b_n + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1})$$

$$= |S_m| b_m + |S_n| b_n + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1})$$

που έχω S_n βάζω το M.

$$\leq M b_m + M b_n + \sum_{k=n}^{m-1} M (b_k - b_{k+1})$$

$$= M b_m + M b_n + M \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1})$$

$(b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{m-1} - b_m) = b_n - b_m$

Άρα $M b_m + M b_n + M(b_n - b_m) = 2M b_n$

Θα χρησιμοποιήσω το ότι το $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ οπότε $\forall \varepsilon > 0$,
$\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon)$

$$|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad n \geq n_1$$

Άρα για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $n_0 = n_1$ και είτε για $m > n \geq n_0$,
έχουμε: $|\bar{S}_m - \bar{S}_n| \leq 2M b_n < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$

Άρα η $\bar{S}_n$ είναι ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει.

Άσκηση Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ συγκλίνει. → Δεν βλέπω απόλυτα γιατί
Χρησιμοποιώ Dirichlet έτσι δεν θα συγκλίνει η σειρά
Απόδειξη: Θέτουμε $a_n = \sin n$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

Τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$

$\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$ → πώς θα το φτιάξω αυτό;
$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(nx)$

Μπορώ να βρίσκω σειρές όταν 1) έχω γεωμετρική πρόοδο $\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = \frac{1}{1-\omega}$
όταν $|\omega| < 1$,

2) έχω απλά κλάσματα όπως στα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
Μ'αυτά μπορούσε να έχουμε τηλεσκοπικές σειρές
στα άλλα έχουμε απλά ευκλείδειες.

Από τον τύπο του Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
De' Morgan: $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ → αυτό θα χρησιμοποιήσω
Εδώ ο σκοπός μου είναι το $\sin x + \dots + \sin(nx)$ να το φέρω σε
μια μορφή τέτοια ώστε να είναι από στοιχεία που ξέρω

3) $S_n(x) = \sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$

$= \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) + i(\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx))$

$= \overbrace{(\cos x + i\sin x)}^{\omega} + (\cos 2x + i\sin 2x) + \dots + (\cos(nx) + i\sin(nx))$

$= (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \dots + (\cos x + i\sin x)^n$

$\boxed{\omega = \sin x + i\sin x}$

$= \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n \quad = n, a\omega = 1 \; x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

$= \omega(1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}) \quad \frac{(1-\omega)}{1-\omega}, \omega \neq 1$

$= \frac{\omega}{1-\omega}(1-\omega^n), \omega \neq 1$

$= \frac{(\cos x + i\sin x)}{1-\cos x - i\sin x}(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$

$= \frac{(\cos x + i\sin x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))}{1 - \cos x - i\sin x}$

$\frac{(1-\cos x + i\sin x)}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}(\cos x + i\sin x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$

$\cos x(1-\cos x) + i\sin x(1-\cos x) + i\sin x\cos x - \sin^2 x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$ / $2 - 2\cos x$

$\frac{1}{2(1-\cos x)}[\cos x - 1 + i\sin x](1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$

$A = \frac{1}{2(1-\cos x)}[(\cos x - 1)(1 - \cos(nx)) - i\sin(nx)(\cos x - 1) + i\sin x \cdot (1 - \cos(nx)) + \sin x \sin(nx)]$

$\frac{1}{2(1-\cos x)}[\cos x - \cos x\cos(nx) - 1 + \cos(nx) + \sin x\sin(nx) +$

$[\sin x + \sin\cos(nx) - \cos x \sin(nx) + \sin(nx)]$

$$\frac{\cos x + \cos(nx) - 1 - \cos((n+1)x)}{2(1-\cos x)} + i\,\frac{\sin x + \sin(nx) - \sin((n+1)x)}{2(1-\cos x)}$$

Συνεφαπτομένα: $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) =$

$$= \frac{\cos x + \cos(nx) - 1 - \cos((n+1)x)}{2(1-\cos x)} \qquad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin x + \sin(nx) - \sin((n+1)x)}{2(1-\cos x)}$$

Άρα $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin(n\cdot) = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 - \sin(n+1)}{2(1-\cos 1)}$

Συνεπώς $\boxed{|S_n| \leq \dfrac{3}{2(1-\cos 1)}}$ → άρα ισχύει το κριτήριο του Dirichlet.

Θεώρημα Riemann → (δείχνει γιατί έχει σημασία η σειρά που αθροίζουμε)
Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά να μην συγκλίνει απολύτως.
τότε $\forall\, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_n} = x$
αναδιάταξη απολαβών

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$a_7, a_8, a_4, a_3, a_2, a_1, a_5, a_6, a_9, a_{10}, \dots$

για $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a_{τ_n} ΙΣΧΥΕΙ

$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, που "1-1" και επί.

$\tau(1) = 7$ $\tau(5) = 2$ $\tau(6) = 1$

$\tau(2) = 8$ $\tau(7) = 5$ ⋮

$\tau(3) = 4$ $\tau(4) = 3$ $\tau(n) = n$, $n \geq 9$

$a_1, a_2, \dots, a_{100}$ $\quad \tau : \{1,2,\dots,100\} \to \{1,2,\dots,100\}$
1-1, επι.

$a_{\tau_1}, a_{\tau_2}, \dots, a_{\tau_{100}}$

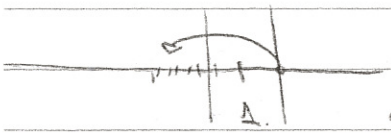
$\sum_{k=1}^{100} a_{\tau_k} = \sum_{i=1}^{100} a_i$ → η ισότητα ισχύει γιατί έχω πεπερασμένο αθροίσμα όρων
αν όλοι οι όροι ήταν άπειροι, αυτό δεν θα ίσχυε. Άρα αλλάζει κι εδώ ο Riemann.

Πρόταση: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που συγκλίνει απολύτως τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
η αναδιάταξη του a_n

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (απλά)
αλλά δεν συγκλίνει απολύτως

$S_n - S_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n}$

$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$



Όταν θέλω να ξεπεράσω το 1 προσθέτω θετικά
όταν ξεπεράσω το 1 προσθέτω αρνητικούς
Παίρνω τους θετικούς όρους μέχρι να ξεπεράσω το 1
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} > 1$ τώρα βάζω αρνητικούς όρους

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -1, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{3}$

Έτσι η ~~S_n~~ σειρά των άρτιων απολήγει
n -//- περιττών -//-
η ακολουθία S_n συγκλίνει στο 1 (όπου 1 είναι αριθμός που έχω επιλέξει)

12/11/2014

Ödevden 1:

xercon 1

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$\Rightarrow A+B=0$ ve $A=1$

$\Rightarrow B=-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} -$

$- \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} + 1 = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ Açı yakınsıyor.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}$

$\left| \frac{\sin n}{n(n+1)} \right| = \frac{|\sin n|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yakınsıyor

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n(n+1)} \right|$ yakınsıyor

$\therefore$ Açı n $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}$ yakınsıyor.

ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Κριτήριο Dirichlet

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ φθίνουσα γιατί $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ έχει φραγμένη μερική ακολουθία

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1+1-1+1-1+1 \dots +1 = 0, & n \text{ άρτιος} \\ -1+1-1+1+ \dots -1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

άρα $|S_n| \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

η) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^{3/2}}$

Κριτήριο Συμπύκνωσης

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n+1))^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2^n+1))^{3/2}} = \frac{1}{(\ln 2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2^n+1))^{3/2}} \le$$

$$\le \frac{1}{(\ln 2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2^n))^{3/2}}$$

$$\frac{1}{(\ln 2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^{3/2}} = \frac{1}{(\ln 2)^{3/2}} + \frac{1}{(\ln 2)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Συγκλίνει γιατί $\frac{3}{2} > 1$

Ejercicio 2:

$\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = a_n$ decreciente.

$a_{n+1} - a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{n+1} - \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = \frac{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n}+\frac{n}{n+1}-(n+1)-\frac{n+1}{2}-\cdots-\frac{n+1}{n}}{n(n+1)}$

$\frac{\overbrace{[n-(n+1)]}^{=-1} + \frac{1}{2}[n-(n+1)] + \cdots + \frac{1}{n}[n-(n+1)] + \frac{n}{n+1}}{n(n+1)}$

$\frac{-1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n(n+1)} < \frac{-1\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+1}{n(n+1)} =$

$= \frac{-1-1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+1}{n(n+1)} = \frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} \leq 0$

$a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow a_n$ decreciente

b) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$

$n > m \geq n_0$

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{n} \Big| = \_\_\_\_\_$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^n}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα

$a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}$ φθίνουσα

$\to 0 \overset{(\ell)}{\Rightarrow} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

άρα από κριτήριο Dirichlet συγκλίνει

Άσκηση 3:

$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum a_n$ συγκλίνει

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n^2} \qquad b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2}$$

$$\sum \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}} \qquad c_n = \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$$

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n^2} = 1 < +\infty$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

$$\lim \frac{c_n}{b_n} = \lim \frac{1}{1+\sqrt{a_n}} = 1 < \infty$$

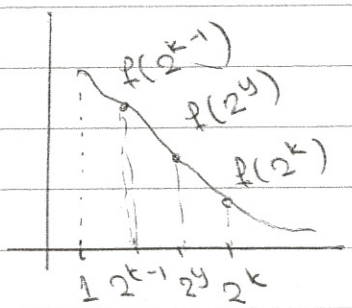
Άρα $\sum c_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 4:

$f: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ φθίνουσα

τ.δ.ο $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^k) \leq \int_1^{2^n} f(x)dx \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^{k-1})$



$$\int_1^{2^n} f(x)dx = \int_0^n f(2^y) \ln 2\, 2^y \, dy$$

$x = 2^y$

$dx = \ln 2\, 2^y \, dy$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(2^y) 2^y \ln 2 \, dy$$

$e^y \quad e^y$

$2^y \quad 2^y \ln 2$

~~$\int_{k-1}^{k} f(2^y) 2^y \ln 2 \, dy$~~

$$\int_{k-1}^{k} f(2^k)\,2^y \ln 2\,dy \le \int_{k-1}^{k} f(2^y)\,2^y \ln 2\,dy \le \int_{k-1}^{k} f(2^{k-1})\,2^y \ln 2\,dy$$

$$f(2^k)\int_{k}^{k-1} 2^y \ln 2\,dy = f(2^k)\,2^{k-1} \qquad f(2^{k-1})\,2^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(2^k)\,2^{k-1} \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(2^y)\,2^y \ln 2\,dy \le \sum_{k=1}^{n} f(2^{k-1})\,2^{k-1}$$

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1})$$

Έστω ότι συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1})$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{2^n} f(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}) = c \in \mathbb{R}$$

άρα $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^k) \le \int_{1}^{2^n} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^{k-1})$$

Έστω ότι υπάρχει $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$

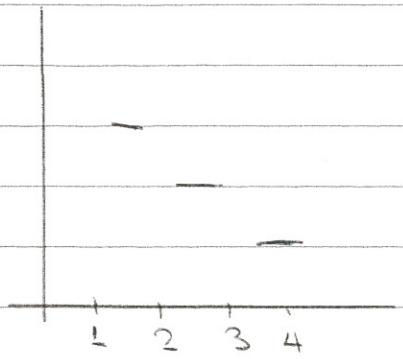
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{2^n} f(x)\,dx = c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^k) \le c \quad \text{άρα} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^k)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}) = \sum_{l=0}^{\infty} 2^l f(2^l) = f(1) + \sum_{l=1}^{\infty} 2^l f(2^l) = f(1) + 2\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l-1} f(2^l)$$

συγκλίνει.

b)



13/11/2014

Άσκηση 1:

Φυλλάδιο 7 / άσκηση 3:

$a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

$\Rightarrow$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ συγκλίνει

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$ συγκλίνει

Συνέχεια: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

$0 \leq b_n \leq k a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

↳ ολοκλήρωση

i) $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq a_n$ # λογική είναι ότι $\frac{1}{1+a_n^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+a_n^2$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο σύγκρισης, δηλ. ότι αν

$(a_n), (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n, b_n \geq 0$

$0 \leq b_n \leq k a_n$

$\exists k > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θα συγκλίνει επίσης καλύτερα

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

i) $b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2}$, τότε $\frac{1}{1+a_n^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+a_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

καλώ $k = 1$ $a_n \geq 0 \Rightarrow b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq a_n$ Όμως από το κριτήριο σύγκρισης

η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Θ Riemann: Αν έχουμε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, υπάρχει αναδιάταξη της ακολουθίας a_{σ_n} ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} = x$

Θεώρημα: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$

αυτό είναι το ανάλογο στις σειρές με πεπερασμένους όρους, που δεν έχει σημασία η σειρά άθροισης. Εδώ ισχύει το ίδιο εάν μια σειρά έχει απόλυτη σύγκλιση. Αλλιώς με νέα η σειρά άθροισης στις σειρές με άπειρους όρους)

Γινόμενο ακολουθιών:

$(a_n), (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n b_n|\right)^2 \le$

Cauchy-Swartz: (είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)

$|x \cdot y| = |\|x\| \|y\| \cos\theta| \le |x| \cdot |y|$

$\left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2\right)$

$\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)$

Συνέλιξη: $(a_n), (b_n) \Rightarrow (c_n)$

$c_n = a_n * b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

δυναμοσειρές

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Πως πολ/ζω πολ/να: $(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x$
$+(\dots$

ονομα: Πότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και αν συγκλίνει, αν έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

βάσανο: Έχω ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ και θέλουμε μια ταυτότητα αν ένα από τα δύο να συγκλίνει απολύτως. Τότε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και θέλουμε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Συνέχεια Συναρτήσεων:

Έστω: $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x)$

Πρέπει το $a \in A$ για να μπορούμε να θέλουμε για όρια; ($a \in A$)

Όχι απαραίτητα

$A = \{a\} \cup [1, +\infty)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν μπορεί να έχω lim για $x \to 0$ γιατί τα σημεία γύρω από το 0 ~~δεν ανήκουν το 0~~ δεν δείχνει και δεν έχω άλλα αφού είναι εκτός του π.0. ~~και~~ του A και δεν δείχνει το 0 ως σημείο αλλά τα γύρω άλλα κοντά του. Και αφού δεν $\exists$ στο A τότε δεν μπορώ να δω το lim. για $x \to 0$

Πότε ένα σημείο δεν είναι μεμονωμένο;

Πότε το a είναι μεμονωμένο σημείο για το A:

Όταν $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) = \varnothing$

Άρνηση του μεμονωμένου σημείου, είναι το σημείο συσσώρευσης)

Πότε το a είναι σημείο συσσώρευσης του A?

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$

αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists a_n \in A \setminus \{a\} : a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$

Λέμε το α είναι οριακό σημείο (Ο.Σ) Α, όταν $\exists a_n \in A \setminus \{a\}$,
έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ Το 0 είναι Ο.Σ. του Α αλλά κανένα άλλο δεν είναι.
(είναι μοναδικό)

Θα λυθάμε για $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ Αν α είναι Ο.Σ. του Α.

Βρίσκω $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
$0 < |x-a| < \delta$, $x \in A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Παράδειγμα: $\lim_{x\to 1} (x + \frac{1}{x})$ όπου $f(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 1} (x + \frac{1}{x}) = 2$

Βρίσκω $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
$0 < |x-1| < \delta$, $x > 0$
$\Rightarrow |x + \frac{1}{x} - 2| < \varepsilon$

$|x + \frac{1}{x} - 2| = |x - 1 + \frac{1}{x} - 1| = |x - 1 + \frac{1-x}{x}| \leq |x-1| + \frac{|1-x|}{x} < \delta + \frac{\delta}{x} <$
$\Xi \varepsilon \omega$
$0 < |x-1| < \delta$ $\qquad \delta + 2\delta = 3\delta \leq \varepsilon$
$|x-1| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$ $\qquad x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < 2$
Θέλω κάτι καλύτερο από το 0.
$< \frac{1}{2} < 1 - \delta < x < 1 + \delta$

$\delta < \frac{1}{2}$

25/11/2014

Ανάλυση 1:

Θ. Bolzano Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)f(b)<0$, τότε $\exists\, \xi\in(a,b) : f(\xi)=0$ (Αξιωλογία της πληρότητας)

Πόρισμα Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, ① συνεχής και ② "1-1". Τότε η f (όπου I είναι ένα διάστημα και είναι: $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b), I = interval) είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση (δηλ και αντιστρέψιμη λόγω των ① και ②)

Απόδειξη: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε θα είχαμε:

▶ Αν f γνησίως μονότονη, f "1-1"

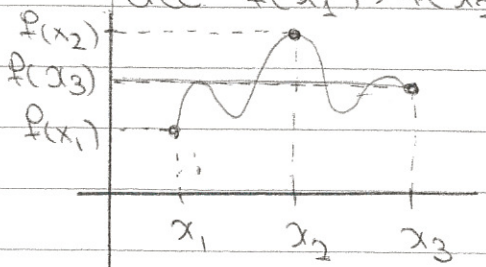
i) $f\uparrow \Rightarrow \forall x,y\in I,\ x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

ii) $f\downarrow \Rightarrow \forall x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

Χρειάζονται 3 σχέσεις για να χαθεί η μονοτονία

Η άρνηση αυτού είναι: Υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in I$ τέτοια ώστε $x_1<x_2<x_3$ τέτοια ώστε: $f(x_1)<f(x_2)$, $f(x_3)<f(x_2)$ ή $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_3)>f(x_2)$

υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in I$ ώστε είτε $f(x_1)<f(x_2)$ και $f(x_3)<f(x_2)$ είτε $f(x_1)>f(x_2)$ και $f(x_3)>f(x_2)$



• Θα αποδείξουμε ότι η f δεν είναι "1-1" αφού θα είναι π.χ. $\exists\, x$ για τα οποία το $f(x)$ είναι το ίδιο.

Θα αποδείξουμε ότι η f δεν είναι "1-1":

Έστω $f(x_3) > f(x_1)$ (. $f(x_2) > f(x_3) > f(x_1)$)

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση του $f(x) = f(x_3)$

έχει λύση στο διάστημα (x_1, x_2), διότι $g(x) = f(x) - f(x_3)$

$g(x_1)\,g(x_2) = (f(x_1) - f(x_3))(f(x_2) - f(x_3)) < 0$

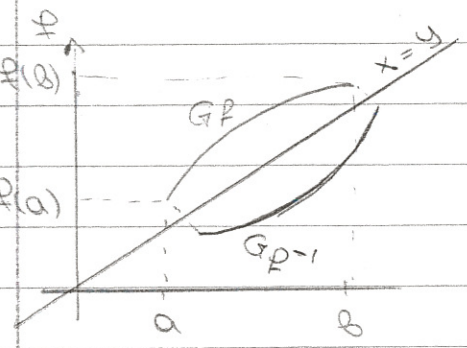
$\Leftrightarrow \exists\, f(\xi) = f(x_3)$ αντίφαση γιατί η f είναι "1-1".

Πρόταση: $f: I \to f(I)$, συνεχής και "1-1", $\xrightarrow{\text{τότε}}$ $f^{-1}: f(I) \to I$

είναι συνεχής συνάρτηση επίσης

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση, η f είναι γνησίως μονότονη

Έστω ως η f είναι ↗



$I = [\alpha, \beta]$

$f(I) = [f(\alpha), f(\beta)]$

• $f \circ f^{-1}(y) = y$ λαμβάνει την ταυτοτική συνάρτηση.

$f^{-1}: [f(\alpha), f(\beta)] \to [\alpha, \beta]$

Έστω $y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists\, x_0 \in I : f(x_0) = y_0$

Η f συνεχής στο x_0:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, 0 < \rho \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists\, 0 < \rho_2 \in \mathbb{R} \quad |y - y_0| < \rho_2 \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y_0) - \varepsilon_2 < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$x_0 - \varepsilon_2 < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y) - x_0 < \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$(f^{-1}(y_0-\varepsilon),\ f^{-1}(y_0+\varepsilon)) \subset f((x_0-\delta,\ x_0+\delta))$

$(f(x_0-\delta),\ f(x_0+\delta))$

Επιλέγω το δεύτερο

Άσκηση 1: Έστω $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς τέτοιες ώστε
$f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}$
Αποδείξτε ότι $f\equiv g$.
Από Έστω $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Θα αποδείξουμε ότι $\exists$ ακολουθία $y_n\in\mathbb{Q}$, ώστε $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$
στο διάστημα $(x,\ x+\frac{1}{n})$, υπάρχει ρητός
$y_n\in(x,\ x+\frac{1}{n}),\ y_n\in\mathbb{Q},\ x<y_n<x+\frac{1}{n}$

τότε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$

Τότε όμως $f(y_n)=g(y_n)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$

Επειδή η f,g είναι συνεχής στο x, έχουμε:

$(\forall x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x))$
τότε το όριο της $f(y_n)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$ ①, $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)=g(x)$ ②
(οι ①, ② ισχύουν λόγω συνέχειας)
Όμως $f(y_n)=g(y_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) \Rightarrow$

$f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ $f\equiv g$

$f(x+a)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ καλείται περιοδική συνάρτηση και ο αριθμός a περίοδος

Άσκηση: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$
Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη:

- $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$

$f(x+\frac{2}{n})=f(\underbrace{x+\frac{1}{n}}_{=y}+\frac{1}{n})=f(y+\frac{1}{n})=f(y)=f(x+\frac{1}{n})=f(x)$

Επαγωγή στο k

$\Rightarrow f(x+\frac{k}{n})=f(x)$, $\forall k\in\mathbb{N}$

(Αποδείξτε το επαγωγικά)

- $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$ Θέτω $x=x-\frac{1}{n}$

$f(x-\frac{1}{n})=f(x)$?

$f(x-\frac{1}{n}+\frac{1}{n})=f(x-\frac{1}{n})$

$f(x)=f(x-\frac{1}{n})$

Επαγωγικά $\Rightarrow f(x-\frac{k}{n})=f(x)$, $k\in\mathbb{N}$

Οπότε η f είναι σταθερή συνεχόμενη

Έστω $y\in\mathbb{R}$, τότε $\exists\, x_n\in\mathbb{Q}$, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$

Τότε $f(x+x_n)=f(x)$

Επιλέγω $x=0\Rightarrow f(y)=f(0)$ $\forall y\in\mathbb{R}$

οπότε $f=$ σταθ.

Άσκηση

α) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $|f(x)| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Τότε είτε $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

β) Βρείτε όλες τις συνεχείς $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$g(x) \cdot (g(x) - x^2) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη:

α) Θαν δεν ∃ άλλη λύση από τις $\begin{cases} f_1(x) = 1, & x \in \mathbb{R} \\ f_2(x) = -1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

(Αν η f δεν ήταν συνεχής τότε θα υπήρχαν άπειρες συν/σεις $A \subseteq \mathbb{R}$

Αν θέσω $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$

Έστω πως ~~υπάρχει~~ υπήρχε f: συνεχής ώστε ε.ω να υπήρχαν δύο διαφορετικά $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) = 1$

$f(x_2) = -1$

τότε επειδή η f είναι συνεχής από το Θ Bolzano

$f(x_1) f(x_2) < 0$ θα ∃ ξ: $f(\xi) = 0$

όμως $|f(x)| = 1$

Άρα άτοπο διότι $|f(\xi)| = 0$

26/11/2014

Ανάλυση 1:

Φυλλάδιο 9:

Άσκηση 3:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Ν.δο $\exists M > 0$ $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(αν δεν απειρίζεται στο άπειρο δεν απειρίζεται πουθενά αλλού αφού είναι φραγμένη)

Κοίτο: επαναλαμβάνω τις ίδιες πράξεις που έκανα στο δ. (έχοντας υπόψη την άσκ 2)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$

Για $\varepsilon = 1$ $\exists M_1 > 0$

$x > M_1 \Rightarrow |f(x)+3| < 1$

$\Downarrow$

$-4 < f(x) < -2$

Άρα $\forall x > M_1$, $|f(x)| \leq 4$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Για $\varepsilon = 1$ $\exists M_2 > 0$ τ.ω.

$x < -M_2 \Rightarrow |f(x) - 1| < 1$

$\Downarrow$

$0 < f(x) < 2$

Άρα $\forall x < -M_2$: $|f(x)| < 2$



(Μπορώ απειρίζεται εσωτερικά σημεία; Θα το δω από τη συνέχεια)

Στο $[-M_2, M_1]$ η συνάρτηση f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

$\exists \xi_1, \xi_2 \in [-M_2, M_1]$ τ.ω. $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$

$\forall x \in [-M_2, M_1]$

$N = \max\{|f(\xi_1)|, |f(\xi_2)|\}$

Τότε $|f(x)| \leq N \quad \forall x \in [-M_2, M_1]$

Οπότε αν $M = \max\{N, 4\}$

Τότε η $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\xi \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f^2(x) + f(x) \geq f^2(\xi) + f(\xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ορίζω $h(x) = f^2(x) + f(x)$ (η $h(x)$ αλλιώς χαρίζεται:

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

$g(y) = y^2 + y$

$h(x) = (g \circ f)(x) = f^2(x) + f(x)$

• $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} g(f(x)) = \lim_{y \to \infty} g(y) = +\infty$ ①

• $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim_{y \to \infty} g(y) =$

$= \lim_{y \to -\infty} y(y+1) = +\infty$ ②)

① $\Rightarrow \forall N > 0 \quad \exists M_1 > 0$

$x > M_1 \Rightarrow h(x) > N$

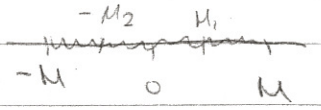
② $\Rightarrow \forall N > 0 \quad \exists M_2 > 0$

$x < -M_2 \Rightarrow h(x) > N$

Παίρνω $M > 0$

Στο $[-M, M] \quad \exists \xi \in [-M, M]$ τ.ω. $h(x) \geq h(\xi) \quad \forall x \in [-M, M]$

1ο σχήμα

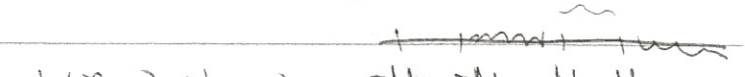


$N = h(\xi) \quad \exists M_1 > 0 \quad \forall x > M_1 \Rightarrow h(x) > h(\xi)$

$\exists M_2 > 0 \quad \forall x < -M_2 \Rightarrow h(x) > h(\xi)$

- Αν $M_1 < M$ και $M_2 < M$ τότε $\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) \geq h(\xi)$

- Αν $M_1 > M$ $\exists \xi_1 \in [M, M_1]$ τ.ω. $h(\xi_1) \leq h(x)$ $\forall x \in [M, M_1]$



Τότε παίρνω $h(x) \geq \min\{h(\xi), h(\xi_1)\}$, $\forall x \geq 0$

- Αν $M_2 > M$ $\exists \xi_2 \in [-M_2, -M]$ τ.ω. $h(\xi_2) < h(x)$ $\forall x \in [-M_2, -M]$

Τότε παίρνω $h(x) \geq \min\{h(\xi), h(\xi_2)\}$, $\forall x \leq 0$

Τότε παίρνω $h(\xi_0) = \min\{h(\xi), h(\xi_1), h(\xi_2)\}$

Δηλ. το ξ_0 ανεξ από τα ξ, ξ_1, ξ_2 όπου η h παίρνει ελαχίστων τιμή

Τότε $h(x) \geq h(\xi_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

Άρα $f^2(x) - f(x) \geq f^2(\xi) - f(\xi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

άσκηση 1

$f(0,1) \to \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) > 0$

α) Ν.δ.ο $\exists \delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ τ.ω. $\forall x \left(\frac{1}{2} - \delta_1, \frac{1}{2} + \delta_1\right) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$

Ορισμός ορίου: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$

$1 - \varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$ για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ τότε $\exists\ 0 < \delta_1$

$|x - \frac{1}{2}| < \delta_1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} - \delta_1 < x < \frac{1}{2} + \delta_1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$

Άρα $\exists \delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$

β) Νδο $\exists \delta_2 \in (0,1)$ τω $x \in (0, \delta_2) \Rightarrow f(x) > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$a - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + a$

Θέλω $0 < f(x)$.

Άρα για $\varepsilon = \frac{a}{2}$ $\exists \delta_2 \in (0,1)$ τω

$0 < x < \delta < 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$

άσκηση 2:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Για να είναι συνεχής η f στο x_0 θα πρέπει $x_0^2 = x_0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$

• Για $x_0 \neq 0, 1$

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0

Παίρνω ακολουθία ρητών $q_n \to x_0$

-//- -//- αρρήτων $r_n \to x_0$

$\boxed{f(q_n) = q_n, \ \forall n \in \mathbb{N}}$ $\quad$ $\boxed{f(r_n) = r_n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}}$

Άρα $\lim_{n \to \infty} f(q_n) = \lim_{n \to \infty} q_n = x_0$ Άτοπο επειδή $\lim q_n = \lim r_n = x_0$

$\lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n^2 = x_0^2$

• Για $x_0 = 0$ Έστω $\varepsilon > 0$ Θέλω να βρω $\delta > 0$ ώστε

$|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Έστω $|x|<\delta$

$x\in\mathbb{Q} \Rightarrow |f(x)| = |x| < \delta$

$x\notin\mathbb{Q} \Rightarrow |f(x)| = x^2 < \delta^2 < \delta$

Επιλέγω $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$

$|x|<\delta \Rightarrow |f(x)| < \delta \leq \varepsilon$

- Για $x_0 = 1$

Έστω $\varepsilon > 0$

Θέλω $\delta>0$ τ.ω $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

Επιλέγω $\delta = 1$: $|x-1|<1 \Rightarrow \boxed{0<x<2}$

Αν $x\in\mathbb{Q}$: $|f(x)-f(1)| = |x-1|$

Αν $x\notin\mathbb{Q}$: $|f(x)-f(1)| = |x^2-1| = |x-1||x+1| < |x-1|3 < \varepsilon$

$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}}$

Επιλέγω $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

Τότε $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-1| < 3|x-1| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Άρα η f συνεχής μόνο στο 0 και το 1

2/12/2014

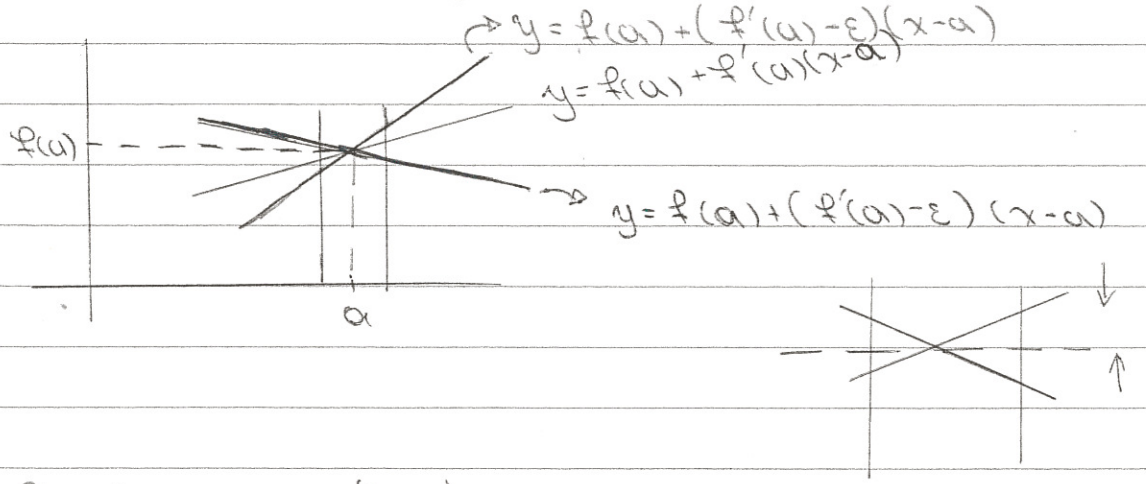
Ανάλυση 1:

Μια παράγωγος υπάρχει αν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το

$\lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x)$ όπου υπάρχει.

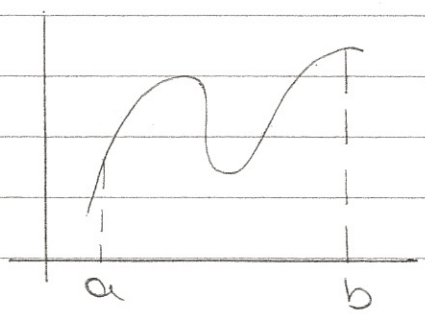
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall \; 0 < |x-y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x) \right| < \varepsilon$

$y \in A$



① Fermat. (δεν μπορώ να δω αμέσως στα άκρα a και b)

α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, και είναι τέτοιο ώστε $\xi \in (a,b)$, ώστε το ξ να είναι ολικό ~~τέτοιο~~ τοπικό ακρότατο, για την f, και η f παραγωγίζεται στο ξ, τότε $f'(\xi) = 0$



Πότε το ξ είναι ολικό τοπικό ακρότατο για την f είτε τοπικό μέγιστο είτε τοπικό ελάχιστο;

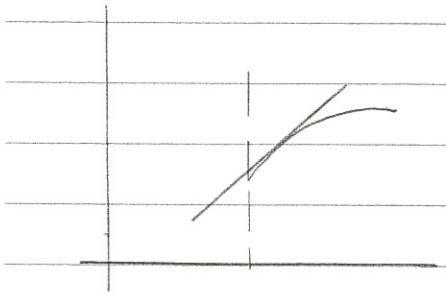
$\forall \exists \delta > 0 : \; |x-\xi| \le \delta, \; x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \le f(\xi)$ } το ξ τοπικό μέγιστο

Το ξ είναι τοπικό ελάχιστο αν $\exists \delta > 0$:

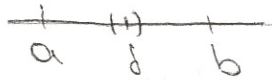
$$\left.\begin{array}{l} |x-\xi| < \delta \\ x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)$$

i) Αν το a είναι τοπικό μέγιστο για την f, και η f παραγωγίσιμη στο a, τότε $f'(a) \leq 0$

ii) αν το a είναι τοπικό ελάχιστο για την f, και η f παρ/τη στο a, τότε $f'(a) \geq 0$



Απόδειξη:



$\exists \delta > 0 \quad (\xi-\delta, \xi+\delta) \subset [a,b]$ και αν η f

παίρνει μέγιστο $f(x) \leq f(\xi), \forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$

$\Rightarrow f(x) - f(\xi) \leq 0, \forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \setminus \{\xi\}$

↳ πρέπει να χωρίζω το πρόσημο για να βάλω πράξεις.

Παίρνω περιπτώσεις:

I) $x \in (\xi, \xi+\delta) \Rightarrow x - \xi > 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \overset{①}{\leq} 0, \forall x \in (\xi, \xi+\delta)$ ↳ Αφού μπορώ να πάρω το πλευρικό ~~συνήθη~~ όριο

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^+} \left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \right) \leq 0 \Leftrightarrow f'(\xi^+) \leq 0$

II) $x \in (\xi-\delta, \xi) \Rightarrow x - \xi < 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0, \forall x \in (\xi-\delta, \xi)$

$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \geq 0$

Άρα από Ⓘ, Ⓘⓘ $\Rightarrow f'(\xi)=0$

(Γι' αυτό δεν λειτουργεί το κριτήριο Fermat στα άκρα, γιατί εκεί παίρνουμε μόνο το ένα πλευρικό όριο.)

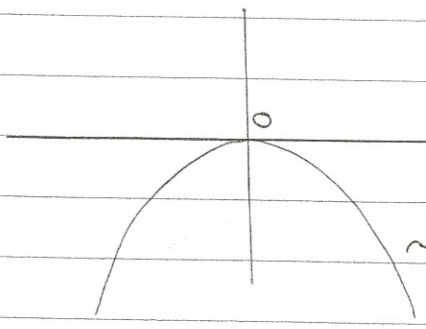
Σχόλια: Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $\xi\in(a,b)$ σημείο τοπικού μεγίστου της f. Υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ξ.

Τότε $f'(\xi)=0$ και η $f''(\xi)\leq 0$

Αντίστοιχα, αν το ξ ήταν σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε

$f'(\xi)=0$

$f''(\xi)\geq 0$



$\rightsquigarrow y=-x^2$

$(-x^2)' = -2x$

στο $(0,0)$: $y'=0$

και $y''=-2\leq 0$

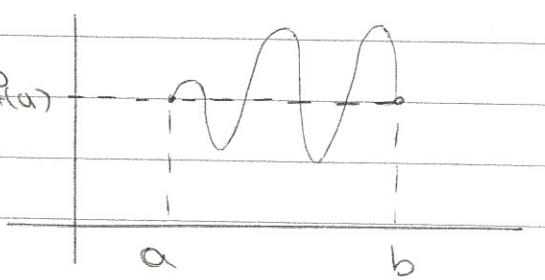
Άρα $(0,0)$ σημείο τ.μ.

Θ. Rolle: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b)

Υποθέτουμε επίσης ότι $f(a)=f(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$

↳ το παραπάνω αυτό αναγκάζει την γραφική παράσταση στα άκρα

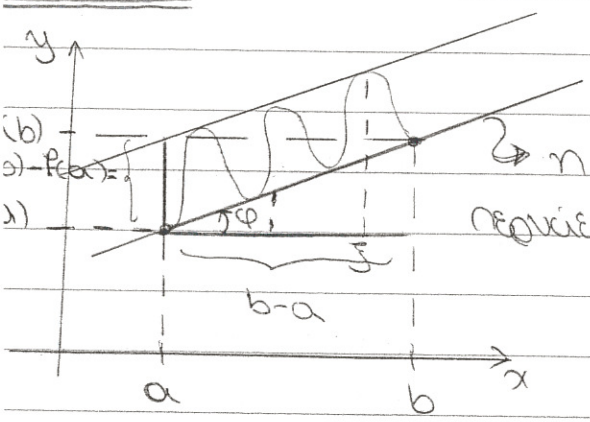
(Αν δεν υπάρχει $f(x)$ μεγαλύτερη ή μικρότερη του $f(a)$, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση)



ΘΜΤ Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b)

Τότε $f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$

Απόδειξη:



$\tan\varphi = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

η ευθεία αυτή περνάει από τα $f(a)$ και $f(b)$

$f(b)-f(a)-f'(x)(b-a)$)

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(f(b)-f(a))x-f(x)(b-a)$, $x\in[a,b]$ και $g:[a,b]$

$g(a)=(f(b)-f(a))a-f(a)(b-a)=$ ~~$(f(b)-f(a))a-f(a)(b-a)$~~

$=f(b)a-af(a)-bf(a)+af(a)$

$=f(b)a-bf(a)$

$g(b)=(f(b)-f(a))b-f(b)(b-a)=$ ~~$f(b)b$~~ $-bf(a)-$ ~~$bf(b)$~~ $+af(b)$

Άρα $g(a)=g(b)$ άρα η παράγωγος θα έχουν τα a και b επί g θα δώσει μηδέν.

Θεώρημα 1) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής παντού στο $[a,b]$ και
ω. $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$
Τότε η f είναι σταθερή δηλ.
$\exists\,\xi\in(a,b),\ f(x)-f(a)=f'(\xi_0)(x-a)=0$

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής παντού στο (a,b) είναι τέτοια ώστε
$f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(a,b)$
Τότε η $f\uparrow[a,b]$

για $a\leq x\leq y\leq b$, εφαρμόζουμε ΘΜΤ
$\exists\,\xi_{x,y}\in(x,y)$

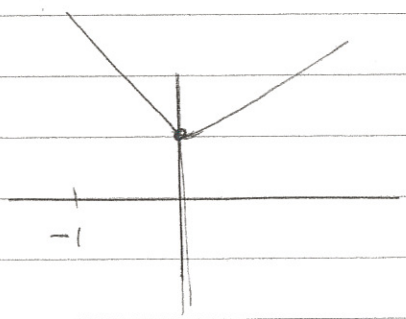
$$f(y)-f(x)=f'(\xi_{x,y})(y-x)\overset{\geq 0}{\underset{+}{\geq}}0$$

μηση: i) Έστω $x>-1$, $x\neq 0$, $0<a<1$. Τότε $(1+x)^a<1+ax$

Έστω $x>-1$, $x\neq 0$, $a>1$. Τότε $(1+x)^a>1+ax$
ιόδειξη:
) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο
$g(x)=(1+x)^a-1-ax$
αι παντού συνεχ δηλ. ...
$g'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=a\left[(1+x)^{a-1}-1\right]$ → δεν βλέπω το πρόσημο, αρα παίζω. αφού το $(1+x)^{a-1}$ δεν διευκρινίζεται

$g''(x)=a(a-1)(x+1)^{a-2}$, $x>-1$
Διακρίνουμε περιπτώσεις για το a:
$a>1\Rightarrow a-1>0$, $g''(x)>0$, $x>-1$
$g'\uparrow$, παρατηρώ ότι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
$g'(x)>g'(0)=0$, $x>0$

$g'(x)<g'(0)=0$, $-1<x<0$
$g\uparrow[0,+\infty)$ & $g\downarrow(-1,0]$



$0<a<1 \Rightarrow g''(x)<0$, $x\in(-1,+\infty)$

$\Rightarrow g'\downarrow$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $\Rightarrow$ ~~$g(x)<g(0)$, $x\in(0,+\infty)$~~

$\Rightarrow g'(x)<0=g'(0)$, $x\in(0,\infty)$
$g'(x)>0$, $x\in(-1,0)$

$\Rightarrow g(x)<g(0)=0$, $\forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$

Άσκηση: Αποδείξτε ότι $e^x \le \frac{1}{1-x}$, $x<1$

Απόδειξη

$\Updownarrow$

$(1-x)e^x \le 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(1-x)e^x-1$, $x<1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ και $f'(x)=-e^x+(1-x)e^x$

$=-xe^x$, $x\in(-\infty,1)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,0]$

ii) $0<x<1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[0,1)$

Οπότε $f(x)\le f(0)=0$, $\forall x\in(-\infty,1)$

Άσκηση: Έστω $x,y>0$, αποδείξτε ότι $xy \le x\ln x + e^{y-1}$

Απόδειξη: Για $y>0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$f'(x)=y-\ln x - x\frac{1}{x}$

$=y-1-\ln x$

$f''(x)=-\frac{1}{x}<0$, $x>0 \Rightarrow f'\downarrow(0,\infty)$

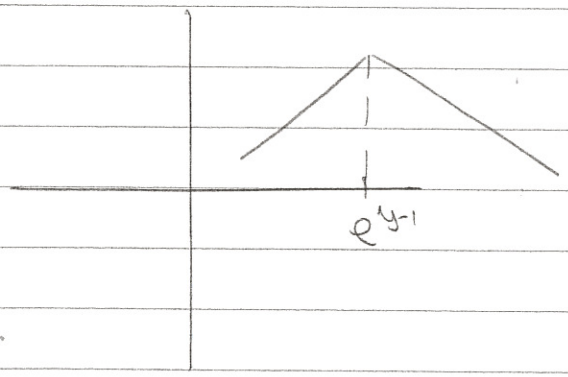
$f'(x)=0 \Leftrightarrow y-1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=y-1 \Leftrightarrow x=e^{y-1}$

$f'(x) < f'(e^{y-1}) = 0$, $x \in (e^{y-1}, +\infty)$

$\Rightarrow f \downarrow$ στο $[e^{y-1}, +\infty)$

$f'(x) > f'(e^{y-1}) = 0$ στο $x \in (0, e^{y-1})$

$x < e^{y-1} \Rightarrow f \uparrow$ στο $(0, e^{y-1}]$



$\Rightarrow f(x) \leq f(e^{y-1})$, $\forall x > 0$

$e^{y-1} y - e^{y-1} \ln e^{y-1} - e^{y-1}$

$(y-1) e^{y-1} = 0$

Άσκηση: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Τότε η f είναι σταθερή

Απόδειξη: Έστω $y \neq x \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |y - x| \Leftrightarrow$

$$-(y-x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq (y-x)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$, $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ είναι σταθερή

18/11/2014

Ανάλυση 1:

$\lim f(x) = \ell$

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ $\left(\forall \varepsilon > 0, (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset \right)$

$\Leftrightarrow (\exists\, x_n \in A \setminus \{a\}$

$x_n \to a)$

Ένα λογισμικό δεν έχει δε γιατί

$\cap x \ A = \{0\}$

$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \emptyset = \emptyset$

Ορισμός (ορίου) $f: A \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$\left(\begin{matrix} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in A \end{matrix} \right) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τον $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

$a_n = a - \frac{1}{n} \to a$.

Δοθέντος του $\varepsilon > 0$, $(\exists ?)$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$

Σκέψη:

$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a||x+a| < \varepsilon$

$|x-a| < \delta$

$|x+a| = |x-a+2a| \leq |x-a| + |2a| < \delta + 2|a|$

~~Άρα από τη δεύτερη δ θα πρέπει~~

άρα $|x+a| = |x+2a-a| \leq |x-a||x+a| < \delta + 2|a| < \varepsilon$

$\delta^2 + 2|a|\delta + |a|^2 < \varepsilon + |a|^2$

$(\delta + |a|)^2 < \varepsilon + |a|^2$

$\Leftrightarrow \delta + |a| < \sqrt{\varepsilon + |a|^2}$

$\delta < \sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a| \right)$

Στα οποία δεν επιτρέπεται $x = a$

Στη συνέχεια επιτρέπεται $x = a$

Το δ είναι δεσμευμένο, λόγω του ε.

Επιλέγω $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)$, τότε για $0<|x-a|<\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)$

$$|x^2-a^2| = |x-a||x+a| \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)\cdot(|x-a|+2|a|)$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)^2\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)+2|a|\right)$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|\right)^2}{\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+|a|}\right)\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+3|a|\right)$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+|a|}\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+3|a|\right) < \varepsilon$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+3|a|}{4\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+|a|\right)} \le \frac{3\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+|a|\right)}{4\left(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}+|a|\right)} = \frac{3}{4}$$

Δεν βολεύει τρόπος προσδιορισμού του δ.
(Κανείς δεν αρχική επιλογή στο δ)
πρώτη
$\delta = 1 \qquad |x-a|<1$
$$|x^2-a^2| = |x-a||x+a|$$
$$= |x-a|(|x-a+2a|)$$
$$\le |x-a|(|x-a|+2|a|) \le |x-a|(1+2|a|) < \varepsilon$$
$$\delta(1+2|a|) < \varepsilon$$
$$\delta(1+2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}$$

Επιλέξαμε $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$

Τότε για $0<|x-a|<\min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$
έχουμε ~~$|x^2-a^2| < \varepsilon^2 |x-a|$~~
$$|x^2-a^2| \le |x-a|(|x-a|+2|a|)$$
$$\le |x-a|(1+2|a|)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}(1+2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$(\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R})$

Πρόταση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και a είναι σ.σ. του A

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{a\}$, τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Έχουμε $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ (υποθέτουμε (i), θα αποδείξουμε (ii))

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |x-a| < \delta \\ \forall x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Έστω επίσης $x_n \in A \setminus \{a\}$, ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Για το $\delta > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta)$:

$0 < |x_n - a| < \delta$, $n \geq n_0$

Τότε όλως για $n \geq n_0$: $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

οπότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta(\varepsilon))$

$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$, $n \geq n_0$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

$(\Leftarrow)$ (από το (ii) στο (i))

Υποθέτουμε ότι $\forall (x_n) \subseteq A \setminus \{a\}$, τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ έχουμε $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

(ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ) Έστω ότι $\nexists \left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell \right)$

Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$, ώστε $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$

$0 < |x - a| < \delta$ ώστε $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in A$

$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$

ώστε $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ ⊛

(Από το (ii)) $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to \ell$

Παίρνουμε όμως: $0 = |l-l| \geq \varepsilon_0$ άτοπο.

Ορισμός συνέχειας:
$f: A \to \mathbb{R}$
Η f είναι συνεχής στο διεκουμένη σημείο του A.
Στο σημείο αυτό προϋπ $\lim_{x \to \infty} f(x) = f(a)$
Ορισμός $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω.
$$\left.\begin{matrix} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Πρόταση: Αν $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) Η f είναι συνεχής στο a
ii) $\forall (x_n) \subseteq A$ τ.ω. $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, έχουμε $\lim_{n \to a} f(x_n) = f(a)$

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, και $a \in A$ τ.ω. η f να είναι συνεχής στο a. Τότε:
i) Εαν $f(a) > 0$ $\exists \delta > 0$, ώστε $f(x) > 0$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$

Παράδειγμα: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, τ.ω. f συνεχής στο $\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ τότε $\exists \delta > 0$, $\forall x: \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$

Άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων
$f, g: A \to \mathbb{R}$
Έστω $a \in A$ και f, g συνεχείς στο a
$\Rightarrow$ i) $f+g$ είναι συνεχής στο a
ii) $f \cdot g$ -//- -//-
iii) Αν $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$, ορίζεται κοντά στο a και είναι συνεχής επίσης

Αν $f: A \to B$, $a \in A$, f συνεχής στο a

$g: B \to \Gamma$, $f(a) \in B$, g συνεχής στο $f(a)$

$\Downarrow$

$gof: A \to \Gamma \quad ((gof)(x) = g(f(x)))$

Τότε η gof είναι συνεχής στο a.

Έστω $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

επειδή f συνεχής στο $a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{f(x_n)}^{y_n} = f(a)$

Η g είναι συνεχής στο $f(a)$, $\forall y_n \in B$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(a)$

$\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(a))$

$\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$

19/11/2024

Ανάλυση 1:

Φυλλάδιο 7:

άσκηση 2

β) $a_n \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 \quad |a_n| < \varepsilon/2$

Για $n<n_0 \quad |a_n| \le M$ (κάποιο $M>0$)

Δηλ έχω-ιση ανίσο-ση

$$\forall n \ge n_0 \quad \left|\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right| \le \frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|}{n} \le \frac{|a_1|+\dots+|a_{n_0-1}|+|a_{n_0}|+\dots+|a_n|}{n}$$

$$\le \frac{(n_0-1)M+(n-n_0+1)\varepsilon/2}{n} \le \frac{(n_0-1)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Θέλω $\frac{(n-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n_1} \le \frac{\varepsilon}{2(n_0-1)M}$

$\forall n \ge n_1 \quad \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_1} \le \frac{\varepsilon}{2(n_0-1)M}$

$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = 0$

Άσκηση 4

α) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1})$ συγκλίνει

• Υποθέτω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1})$ συγκλίνει

Άρα $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f(2^{k-1})$ συγκλίνει

$0 < \int_1^{2n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(2^{k-1}) 2^{k-1}$

Άρα $n \int_1^{2n} f(x)dx$ συγκλίνει

$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2n} f(x)dx$ συγκλίνει

$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2^n} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx$

Υποθέτω ότι $\exists \int_1^{\infty} f(x)dx$

$\lim \int_1^{2^n} f(x)dx = c \in \mathbb{R}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(2^k) 2^{k-1} \leq \int_1^{2^n} f(x)dx$

Άρα $\lim_{n\to\infty} S_n \leq c$ Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} f(2^k) 2^{k-1}$ συγκλίνει

$t_n = \sum_{k=1}^{n} f(2^{k-1}) 2^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} f(2^l) 2^l = 2 \sum_{l=0}^{n-1} f(2^l) 2^{l-1} =$

$= 2\left[f(1)\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n-1} f(2^l) 2^{l-1}\right] = f(1) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} f(2^l) 2^{l-1}$

$\lim t_n = f(1) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} f(2^l) 2^{l-1} < f(1) + 2c$

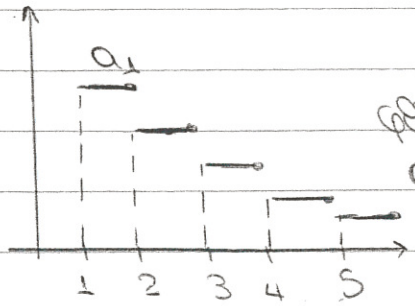
άρα συγκλίνει

β) $\{a_n\}$ φθίνουσα

$a_n \geq 0 \ \forall n$

$f(x) = a_n, \ n \leq x \leq n+1$

$f \downarrow \ f: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$



φθίνει η ακολουθία

Θέλω

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2k} \leq \int_1^{2n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2k-1}$$

Παίρνω από την (α)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2^k} 2^{k-1} \leq \int_1^{2^n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_{2^{k-1}} 2^{k-1}$$

γ) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(2^{k-1})$ συγκλίνει

παίρνω την ισοδυναμία και την εφαρμόζω για την $f(x) = a_n$ για να δείξω

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

- $\int_1^{2^n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} a_k dx = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Δείξαμε ότι $\boxed{\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ υπάρχει} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει}}$ ②

- $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2k-1} = \sum_{l=0}^{\infty} 2^l a_{2^l} = a_1 + \sum_{l=1}^{\infty} 2^l a_{2^l}$

οπότε

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^l a_{2^l} \text{ συγκλ.} \leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} f(2^{k-1}) \text{ συγκλίνει}} \ ①$$

Από ① και ② βγαίνει αυτό που θέλω

Φυλλάδιο 8:

Άσκηση 1:

Αν $A = [0,1) \cup \{2\}$

Τα σημεία συσσώρευσης του A είναι το $[0,1]$

Άρα το $(0,1)$ είναι ανοικτό, περιέχεται μέσα στο $[0,1)$

$x \in (0,1)$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$

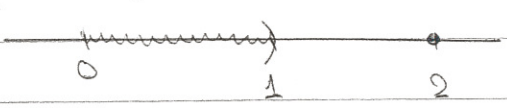
$\forall \varepsilon > 0$ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$

$x_0 = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \setminus \{0\} \neq \varnothing$

$x_0 = 1$: $\forall \varepsilon > 0$ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap A \setminus \{1\} \neq \varnothing$ → γιατί $(1-\varepsilon, 1) \cap A \neq \varnothing$

$x_0 = 2$: δεν είναι σ.σ. γιατί $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) \cap [0,1) = \varnothing$



$x_0 \in (1,2)$ $\varepsilon = \min\left\{\frac{2-x}{2}, \frac{x-1}{2}\right\}$

Τότε $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \varnothing$

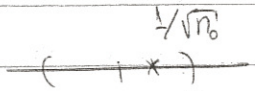
$x_0 > 2$ $\varepsilon = \frac{x_0 - 2}{2}$ Τότε $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \varnothing$

$x_0 < 0$ $\varepsilon = -\frac{x}{2}$ Τότε $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \varnothing$

$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \mid n = 1, 2, \ldots\right\}$

Σ.σ. του B είναι το 0.

$\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$



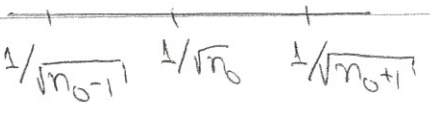
Άρα $\frac{1}{\sqrt{n_0}} \in B$ και $\frac{1}{\sqrt{n_0}} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

άρα $\frac{1}{\sqrt{n_0}} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (B \setminus \{0\})$

Αν υποθέσουμε ότι $\exists\, n_0$ ώστε $\frac{1}{\sqrt{n_0}}$ σ.σ. του B

$\frac{1}{\sqrt{n_0 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \frac{1}{\sqrt{n_0 + 1}}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\left\{\frac{1}{\sqrt{n_0 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n_0}}, \frac{1}{\sqrt{n_0}} - \frac{1}{\sqrt{n_0 + 1}}\right\}$



Τότε $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n_0}} - \frac{1}{\sqrt{n_0+1}}$ και $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n_0-1}} - \frac{1}{\sqrt{n_0}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_0+1}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} - \varepsilon$

Άρα $\frac{1}{\sqrt{n_0+1}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} + \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n_0-1}}$

Άρα $\left(B \setminus \{1/\sqrt{n_0}\}\right) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{n_0}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{n_0}} + \varepsilon\right) = \varnothing$

$C = \{-1, 1\}$ Δεν έχει ΣΣ.

$x_0 = -1$ δεν είναι ΣΣ. γιατί για $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\left(-1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\right) \cap C \setminus \{-1\} = \varnothing$

$x_0 = 1$ δεν είναι ΣΣ. για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ το $\left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \cap \left(C \setminus \{1\}\right) = \varnothing$

$\mathbb{Q}$ (οι ρητοί)

Τα ΣΣ. του $\mathbb{Q}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$

γιατί υπάρχει $q \in \mathbb{Q} \setminus \{x_0\}$ τ.ω. $x_0 - \varepsilon < q < x_0 + \varepsilon$

γιατί $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $q \in \left(x_0 - \varepsilon, x_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

άσκηση 2:

$f(x)=x^3$, $x_0=1$

Έστω $\varepsilon>0$

Θέλω $\delta>0$ ώστε $|x-1|<\delta \Rightarrow |x^3-1|<\varepsilon$

Αs πάρουμε $|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow 1<x^2+x+1<7$

$|x^3-1|=|x-1||x^2+x+1|<|x-1|7$

Αρκεί να βρω $\delta>0$ ώστε αν $|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|7<\varepsilon$

Θα πάρω $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$

Τότε έχω $|x-1|<\delta \Rightarrow |x^3-1|<|x-1|7<\frac{\varepsilon}{7}7=\varepsilon$

Πιο γενικά:

$x_0=a$

Έστω $\varepsilon>0$

Υποθέτω ότι έχω $|x-a|<a \Rightarrow 0<x<2a \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<x^2+ax+a^2<4a^2+2a^2+a^2=7a^2$

$|x^3-a^3|=|x-a||x^2+ax+a^2|<|x-a|7a^2$

Αρκεί $|x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|7a^2<\varepsilon$

Παίρνω $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7a^2}, a\}$

Τότε $|x-a|<\delta$

$\Rightarrow |x^3-a^3|<|x-a|7a^2<\delta 7a^2<\frac{\varepsilon}{7a^2}7a^2=\varepsilon$

$f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=0$

Έστω $\varepsilon>0$

Θέλω $\delta>0$ ώστε $0\le x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}|<\varepsilon$

Άν πάρω $\delta=\varepsilon^2$

Τότε $0\le x<\delta=\varepsilon^2 \Rightarrow 0\le\sqrt{x}<\varepsilon$

άσκηση 3:

$|b_n| \leq M \quad \forall n$

$S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ συγκλίνει

$\Rightarrow S_n$ Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ ώστε $\forall m > n \geq n_0 \ |S_m - S_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

$r_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$|r_m - r_n| = |a_{n+1} b_{n+1} + \dots + a_m b_m| \leq |a_{n+1}||b_{n+1}| + \dots + |a_m||b_m| \leq$

$\leq |a_{n+1}| M + \dots |a_m| M \leq M(|a_{n+1}| + \dots + |a_m|) \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Άρα r_n Cauchy άρα συγκλίνει.

20/11/2014.

Ανάλυση 1.

1) $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ η f είναι συνεχής
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$
$\forall x \in A$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

2) f, g $A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $a \in A$
Η $(f+g)$ είναι συνεχής στο a
fg -''- -''-
$\frac{f}{g}$ -''- -''-

3) $f \circ g$: Η g είναι συνεχής στο a } Η $f \circ g$ είναι συνεχής
Η f -''- $g(a)$ } στο a

Παράδειγμα 1: (Dirichlet)
Η συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού

Άρνηση της f, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ είναι συνεχής στο a
Πότε η f δεν είναι συνεχής στο a;
Όταν $\exists \varepsilon_0 > 0$ τ.ω. $\forall \delta > 0$ υπάρχει $x \in A$,
$|x-a| < \delta$, τ.ω $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon_0$
Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists x_n \in A$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$,
τέτοια ώστε $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$
Επομένως: Η f δεν είναι συνεχής στο a, αν $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$,
$\lim_{n \to \infty} x_n = a$ τ.ω. $f(x_n)$ να μην συγκλίνει στο $f(a)$.

συνέχεια του παραδείγματος 1

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις
α) $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(a) = 1$
Θα έχω αποδείξει ότι η f δεν είναι συνεχής στο a, αν
καταφέρω να βρω ακολουθία x_n, τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Ανάλυση 1

3/12/2014

Φυλλάδιο 10:

άσκηση 2:

$(f(x))^{2015} + f(x) - 2014x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$g(y) = y^{2015} + y$, αύξουσα, συνεχής και "1-1"

$g(f(x)) = 2014x$

Άρα η g "1-1" είναι αντιστρέψιμη

$g^{-1}(g(f(x))) = g^{-1}(2014x) \Rightarrow f(x) = g^{-1}(2014x)$

Επειδή g συνεχής και η g^{-1} συνεχής $\Rightarrow$ $f(x)$ συνεχής
$2014x$ συνεχής } ως σύνθεση συνεχών.

άσκηση 1:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και τ.ω. $f\left(x + \frac{1}{n^2}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Ν.δ.ο. η f σταθερή

1ο Βήμα $f\left(x + \frac{m}{n^2}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ (θέλω να δείξω αυτό)

Αν $m \in \mathbb{N}$: $f\left(x + \frac{m}{n^2}\right) \overset{x = x + \frac{m-1}{n^2}}{=\!=\!=} f\left(x + \frac{m-1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = f\left(x + \frac{m-1}{n^2}\right)$

$= f\left(x + \frac{m-2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = f\left(x + \frac{m-2}{n^2}\right) = \dots =$

$= f\left(x + \frac{1}{n^2}\right) = f(x)$

• Αν $m = 0$: $f\left(x + \frac{m}{n^2}\right) = f(x)$

Αν $m=-k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$

$$f\left(x+\frac{m}{n^2}\right)=f\left(x-\frac{k}{n^2}\right)=f\left(x-\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n^2}\right)=f(x)$$

- $f(x+r)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$ (για οποιουδήποτε ρητό)
  ↳ για όλους τους ρητούς

Έστω $r\in\mathbb{Q}$ Τότε $r=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$

Άρα $r=\frac{mn}{n^2}=\frac{k}{n^2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Άρα $f(x+r)=f\left(x+\frac{k}{n^2}\right)=f(x)$

$f(x+y)=f(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ (για όλους τους πραγματικούς αριθμούς)

Έστω $y\in\mathbb{R}$ $\exists q_n$ με $q_n\in\mathbb{Q}$ $\forall n$

Από εδώ παρατήρηση: $f(x+q_n)=f(x)$, $\forall n$
($f(x+r)=f(x)$) ρητού

- f συνεχής

Άρα $\lim_{n\to\infty} f(x+q_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}(x+q_n)\right)=f(x+y)$

$\lim f(x)=f(x+y)\Rightarrow \boxed{f(x+y)=f(x)}$

Για $x=0$: $f(y)=f(0)$, $\forall y\in\mathbb{R}$
Άρα η f σταθερή

άσκηση 3:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Λύση:

Για $x\neq 0$: η f είναι παραγωγίσιμη στο x (γιατί είναι γινόμενο παραγωγίσιμων)

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

Για $x=0$ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|-1$ (κάτω: 0, 0)

άρα από κριτήριο παρεμβολής και η λέξη πάει στο 0

Για $x\neq 0$ η g παίζει στο x με

$$g'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

Για $x=0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ Δεν υπάρχει το όριο του $\sin\frac{1}{x}$ όταν $x\to 0$

$x_n=\frac{1}{2\pi n}\xrightarrow{n\to+\infty}0$

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0$

$y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to 0$

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1$

άσκηση 4:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο a

$f'(a) = 1$

Νδο $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ υπάρχει και υπολογίζεται το

Λύση:

$$f'(a) = 1 \underset{\text{παραγωγίσιμη}}{\overset{f}{\Longrightarrow}} \lim \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = 1$$

Δεν είμαι σίγουρη γιατί δεν βλέπω αν υπάρχει

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \frac{xf(a) - af(x) + af(a) - af(a)}{x-a}$$

$$= \frac{f(a)(x-a)}{x-a} - \frac{a(f(x) - f(a))}{x-a} = f(a) - \frac{a(f(x) - f(a))}{x-a}$$

$$\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}}_{\text{αφού } \exists \text{ το όριο}} = \lim_{x \to a} \left(f(a) - a \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) =$$

$$= f(a) - a \lim \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$= \boxed{f(a) - a \cdot 1} \text{ ίσο με}$$

άσκηση Έστω $x, y > 0$ αποδείξτε ότι $xy \leq x \ln x + e^{y-1}$

Απόδειξη Για $y > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(0, +\infty) \to \mathbb{R}$

με τύπο $f(x) = y - \ln x - x \frac{1}{x}$

$$f'(x) = y - 1 - \ln x$$

$f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$, $x > 0 \Rightarrow f' \downarrow (0, +\infty)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow y - 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = y - 1 \Rightarrow x = e^{y-1}$

$f'(x) < f'(e^{y-1})$, $x \in (e^{y-1}, +\infty)$

$\quad\quad\quad

$\Rightarrow f \downarrow$ στο $[e^{y-1}, +\infty)$

$f'(x) > f'(e^{y-1})$ στο $x \in (0, e^{y-1})$
$\quad\quad\quad

4/12/2014

Ανάλυση 1:

Fermat: α) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\xi\in(a,b)$ όπου η f έχει τοπικό ακρότατο, και η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε $f'(\xi)=0$

β) Αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο a και είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε $f'(a)\le 0$

ΘΜΤ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b) Τότε $\exists\,\xi\in(a,b)$

$$\boxed{f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi)}$$

Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy:

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχείς, και παραγωγίσιμες στο (a,b).

Τότε $\exists\,\xi\in(a,b)$ τ.ω.

$$\boxed{(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)}$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $Q:[a,b]\to\mathbb{R}$, με τύπο:

$$Q(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x),\quad x\in[a,b]$$

Η Q είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b)

$$Q(b)=(f(b)-f(a))g(b)-(g(b)-g(a))f(b)=-g(b)f(a)+g(a)f(b)$$

$$Q(a)=(f(b)-f(a))g(a)-(g(b)-g(a))f(a)$$
$$=f(b)g(a)-g(b)f(a)=Q(b)$$

Οπότε από θεώρημα Rolle, $\exists\,\xi\in(a,b):Q'(\xi)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow(f(b)-f(a))g'(\xi)-(g(b)-g(a))f'(\xi)=0$$

Υπόθεση: Έστω $f, g \in C[a,b]$, $f, g \in D(a,b)$ και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

↓

δεν εξασφαλίζει ότι η g δεν μπορεί να έχει κοινές ρίζες με την f. Γιατί αν $g(a)=g(b)$ από Θ. Rolle θα υπήρχε η g' κάπου τέτοιο στο (a,b) να είναι $=0$ και αυτό δεν γίνεται.

Θεώρημα l' Hôpital:

1) Έστω $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ $[a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}]$ παραγωγίσιμες συνάρτ. στο (a,b)

Εάν $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$

και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Επίσης υποθέτουμε ότι το $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ $(l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}})$

Τότε $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ δηλ. $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, και επιπλέον το $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (και $g(x) \neq 0$)

2) Έστω $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ $[a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}]$ παρόμοιες συνθήκες στο (a,b)

Εάν $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

και επιπρόσθετα $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ $(l \in \overline{\mathbb{R}})$

Τότε υπάρχει το όριο $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

Απόδειξη

α) Πρέπει δηλαδή να αποδείξουμε ότι $g(x)\neq 0$, για x κοντά στο a^+:

Έστω $\exists x_1\in(a,b): g(x_1)=0$

τότε για $x\in(a,x_1)$ η g θα ικανοποιεί όλα $\exists \xi_x\in(x,x_1)$

$g(x)-g(x_1) = (x-x_1)g'(\xi_x)$

$\quad\parallel \quad\quad\quad \neq 0$

0

$\Rightarrow g(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,x_1)$ και επομένως το πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$

ορίζεται κοντά $\forall x\in(a,x_1)$

β) Cauchy: στο $[x,y]\subset(a,b)$, τότε $\exists \xi_{x,y}\in(x,y)$, $g'(t)\neq 0\ \forall t\in(a,b)$

τέτοιο ώστε $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$

αν θεωρήσω αρχικά $y\to a^+$ $\quad \xi_x\in(a,x)$

$$\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$\exists$ το $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$;

$a<\xi_x<x$ Έχει όριο και δείχθηκε είναι l.

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = l$$

Συναλλαγείς ορίζω στην $f:[a,b)$, $G:[a,b)$

με τύπους $F(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ f(x), & x>a\end{cases}$

$$G(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ g(x), & x>a\end{cases}$$

Τότε F, G συνεχείς στην $[a,b]$, οπότε το Θ. Cauchy θα το εφαρμόσω στο $[a,x]\subset[a,b)$

Τότε $\exists\, \xi_x\in(a,x)$

τ.ω. $\dfrac{f(x)-f(a)}{G(x)-G(a)}=\dfrac{f'(\xi_x)}{G'(\xi_x)}$

$$\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Άσκηση Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παρ/μη και τ.ω.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$

Αποδείξτε ότι $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$

και τ.ω. $\exists\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)=0$

Λύση

Εφαρμόζω ΘΜΤ στο $[n,n+1]$, όπου $n\in\mathbb{N}$, τότε $\exists\,\xi_n\in(n,n+1)$ τ.ω.

$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(n+1)-f(n)\big)=\lim\limits_{n\to\infty}f(n+1)-\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$

$=l-l=0$

και επιπροσθέτως $\xi_n>n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$

Άρα για $[n,n+1]$,

Το ίδιο θα μπορούσα να δουλέψω, $n\in\mathbb{N}$ $[n,2n]$

$\exists\ \xi_n \in (n, 2n)$

$$f(2n) - f(n) = n f'(\xi_n)$$

$$n < \xi_n < 2n$$
$$1 < \frac{\xi_n}{n} < 2$$

καὶ ὡς γρήγορα $= \frac{n}{\xi_n}\ \xi_n f'(\xi_n) \Leftrightarrow$

↑ τείνει στο 0.

↳ είναι ισοδύναμες ώστε ὁ ένας τείνει στο limit

↑ τείνει στο ∞ ↑ τείνει στο ∞

$\Leftrightarrow \xi_n f'(\xi_n) = \frac{\xi_n}{n} (f(2n) - f(n))$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_n f'(\xi_n) = 0$

Άσκηση 2 Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής, παίρνει στο (a,b) ώστε δε την επιπρόσθετη ιδιότητα $f(a) = f(b) = 0$

Για $\lambda \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\exists\ \xi \in (a,b)$ τ.ω. $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$

Άσκηση 3: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παίρνει, $f(0) = 0$ και $\exists M > 0$ τέτοιο

$$|f'(x)| \le M |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

↳ η f είναι τοπικά ίση με δε μηδέν

★ Λύση άσκηση 2:

Πρέπει να τροποποιήσω την προηγούμενη συνάρτηση.

$G'(x) = f'(x) - \lambda f(x)$

$G(x) = e^{-\lambda x} f(x)$

$H(x) = \lambda f(x)$

$$f'(x) = \lambda f(x)$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$(\ln f(x))' = (\lambda x)'$$
$$\Leftrightarrow (\ln f(x) - \lambda x)' = 0$$
$$(e^{-\lambda x} f(x))'$$

Λύση άσκησης 3:

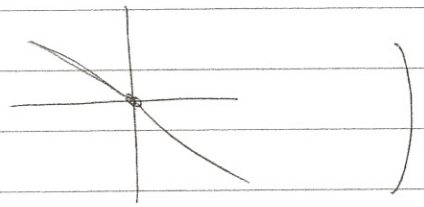
~~Αν δεν έχει τα απόλυτα:~~ $f'(x) \le \mu f(x) \Leftrightarrow$

$$\underbrace{-\mu x\,(f'(x) - \mu f(x))}_{<0}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\mu x} f(x)\right) \le 0$$

$$\Rightarrow f(x) \le f(0) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$f(x) \ge f(0) = 0, \quad \forall x < 0$$



Θεωρώ τη συνάρτηση $G(x) = f^2(x)$

$$G'(x) = 2 f(x) f'(x)$$

$$|G'(x)| = 2|f(x)||f'(x)| \le 2\mu |f(x)|^2 = 2\mu G(x)$$

$$-2\mu G(x) \le \underbrace{G'(x) \le 2\mu G(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-2\mu x}\left(G'(x) - 2\mu G(x)\right) \le 0$$

$$\left(G(x)\, e^{-2\mu x}\right)' \le 0$$

$$\Rightarrow G(x) e^{-2\mu x} \le \underbrace{G(0) e^{-2\mu 0}}_{0}, \quad x > 0$$

$$f^2(x) = G(x) \le 0, \quad \forall x > 0$$

$$f(x) = 0, \quad \forall x \ge 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2\mu x} G(x)\right) \ge 0$$

$$e^{2\mu x} G(x) \le e^{2\mu 0} G(0) = 0, \quad x < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x < 0$$

/

Ασκηση 1

Ερώτημα 5:

άσκηση 1:

$\sum_{n=1}^{\infty}$

Απόδειξη: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Rightarrow 1 = A(n+2) + Bn \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = (A+B)n + 2A$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1/2 \\ A=1/2 \end{array}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} \right) =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}$

$- \frac{1}{2(n+2)}$

Άρα: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$

άσκηση 2

a) $\limsup_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ x_n < a + \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_0$

$\limsup_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ y_n \leq b + \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_0$

$\varepsilon > 0 \ \forall n \geq \mathbb{N} = \{n_0, n_1\} : x_n + y_n \leq a + b + \varepsilon$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq a + b$

B) $c = \liminf x_n$

$d = \liminf y_n$

$\varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_2 \quad x_n \geq c - \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists n_3 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_3 \quad y_n \geq d - \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \geq \mathbb{N}' = \max\{n_2, n_3\}$

$x_n + y_n \geq c + d - \varepsilon$

$\Rightarrow \liminf(x_n+y_n) \geq c+d \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \inf(x_n+y_n) \geq \liminf x_n + \lim y_n$

ασκηση 3

$x_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l + \varepsilon$

Επιλέγω $\varepsilon > 0$ έστω $l + \varepsilon < 1 \left(\varepsilon = \frac{1-l}{2}\right)$

$n \geq n_0$ $x_n = \underbrace{\frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} \cdots \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}}_{n-n_0} \leq$

$\leq (l+\varepsilon)(l+\varepsilon)\cdots(l+\varepsilon)\, x_{n_0} = (l+\varepsilon)^{n-n_0} \cdot x_{n_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0 \cdot x_n}{(l+\varepsilon)^{n_0}} = 0$

Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Υποδείξη $\underbrace{\overbrace{x_1 \cdots x_{n_0}}^{n_0} \overbrace{x_{n_0+1} \cdots x_n}^{n-n_0 \text{ αριθ}}}_{n}$

ασκηση 4

$\{a_n\}$ ακολουθία

$3a_n \leq 2a_{n-1} + a_{n+1}, \ \forall n = 2, 3, \ldots$

ν.δ.ο $\lim_{n\to\infty}$

$2a_n - 2a_{n-1} \leq a_{n+1} - a_n$

$2(a_n - a_{n-1}) \leq a_{n+1} - a_n$

$\vdots$

$b_n = a_{n+1} - a_n$

$2b_{n-1} \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

7.

1η περίπτωση

Έστω ότι υπάρχει $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $b_{n_0} > 0$

Θέλω $b_n > 0 \ \forall n \geq n_0$

Επαγωγή

$n = n_0 \quad b_{n_0} > 0$

Υποθέτω ότι $b_k > 0$

$k+1 \quad : b_{k+1} > 2b_k > 0$

Άρα τελικά $(\forall n \geq n_0) \ a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n$ αυξ. 6α

2η περίπτωση

Αν δεν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} \ b_{n_0} > 0$

Δηλαδή $b_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

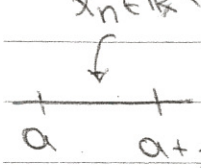
Τότε $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow a_n$ φθίνουσα

Άρα και στις δύο περιπτώσεις είναι γν. μονότονη

Αφού $\{a_n\}$ φραγμένη και μονότονη η $\{a_n\}$ συγκλίνει

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$$

χρησιμοποιώ $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$



$a < x_n < a+\frac{1}{n}$

Σαν εικόνα το Dirichlet και 2 ακόμα

) // λεπτομέρειες.

και $f(x_n) \not\to f(a) = 1$

Αν βρω ακολουθία $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τότε $f(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq 1 = f(a)$

Πρέπει να βρω $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, τ.ω. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

β) Αν $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, τότε $f(a) = 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $y_n \in \mathbb{Q}$: $a < y_n < a+\frac{1}{n}$

όπου $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

και $f(y_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0 = f(a)$

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

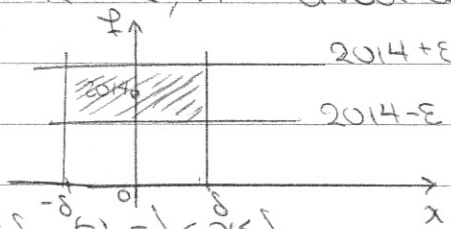
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

$g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

Εδώ η f είναι συνεχής μόνο στα σημεία που η g και η h ταυτίζονται.

Παράδειγμα 3: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η f είναι συνεχής στο 0 είναι $f(0) = 2014$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2014$



$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall |x-0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - 2014| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - 2014 < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 2014 - \varepsilon < f(x) < 2014 + \varepsilon$

Για $\varepsilon = 1 \quad 2013 < f(x) < 2015$

Οι συνεχείς Πρόταση: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $(a<b)$ συνεχής σε καθε συ-
νάρτησεις σε κλειστό και $[a,b]$ $(f \in C[a,b])$
κλειστό διά- Τότε η f είναι φραγμένη
στηκε είναι Απόδειξη: Αρχικά θα αποδείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη
μερικές Θα αποδείξουμε με αναγωγή σε άτοπο, έστω ότι δεν
π.χ $g:[0,1]$ είναι άνω φραγμένη
συνεχής αλλά $\{f(x) / x \in [a,b]\}$ (Η f είναι
μη φραγμένη Άνω φραγμένη $\exists M$: $f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$)
άρνηση → Η f δεν είναι φραγμένη: $\forall M>0$, $\exists x \in [a,b]$, $f(x)>M$
έτσι
το πάνω Επιλέγουμε $M=n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$, τ.ω. $f(x_n)>n$.
άτοπο. Αφού $x_n \in [a,b]$ → η x_n είναι φραγμένη → αρά από
το θεώρημα Weirstrass:
Η x_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω
$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in [a,b]$

$a \le x_{n_k} \le b$
$\Downarrow$
$a \le x \le b$

$x_n \le y_n$
$\lim x_n = x$ και $\lim y_n = y$ $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ τότε $\lim x_n \le \lim y_n$
αν είχα $x_n < y_n \Rightarrow \lim x_n \le \lim y_n$

Η f όλως είναι συνεχής στο x, Φτάνει λοιπόν να κάνει-
ναι $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ τα π.χ $0 < \frac{1}{n}$
όλως $\lim 0 = 0$ και
Μια άλλη φραγμένη συνάρτηση είναι $\lim \frac{1}{n} = 0$ αρα ίδια.
~~είναι~~ είτε ~~άνω~~ είτε κάτω φραγμένη
αν η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα.
Πρόταση: Έστω $f:[a,b] \xrightarrow{a<b} \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο
του $[a,b]$, τότε: $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$
$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, $\forall x \in [a,b]$

απόδειξη: Έστω $A=\{f(x)/x\in[a,b]\}$ είναι φραγμένο
είτε ορίζεται το $\sup A$, $\inf A$. Οπότε $\forall \varepsilon>0$,
$\exists y\in A$, $\sup A-\varepsilon < y < \sup A$

Επιλέγουμε $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $\exists y_n\in A$.

$$\sup -\frac{1}{n} < \underset{\parallel}{y_n} < \sup A.$$
$$f(x_n)$$

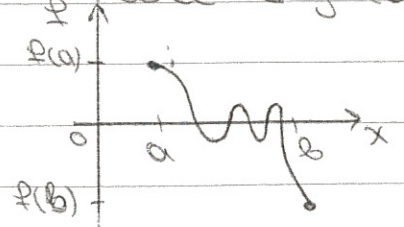
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in[a,b]$:
$\sup A-\frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) < \sup A$ ①
Από Θ. Bolzano Weinstrass $\exists x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_2\in[a,b]$
Από τη συνέχεια της f στο x_2
$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_2)$ ②

Από ①, ② : $\left.\begin{array}{l}\sup A\le f(x_2)\le \sup A\\ f(x_2)=\sup A.\end{array}\right\}\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\in[a,b],\ f(x)\le \sup A = f(x_2)$
Άρα $\exists$ κάποιο x για το οποίο η f παίρνει την μεγαλύτερη τιμή.

τη σελίδα ο $k\to\infty$ ο $\frac{1}{n_k}=0$

ο $f(x_2)$ είναι στοιχείο του συνόλου, ο-άν κάποιο στοιχείο του συνόλου ίσον $=\sup A$ είτε το $\sup A$ υλοποιείται ανό κάποιο στοιχείο του συνόλου, είτε μπορούμε να το πάρει μεγαλύτερο στοιχείο συνόλου

Θεώρημα: (Bolzano)
Έστω: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)f(b)<0$
είτε $\exists\ \xi\in(a,b)$, τ.ω. $f(\xi)=0$



• Συνεχής συνάρτηση έχουμε όταν στην γραφική της παράσταση, δεν σηκώνουμε μολύβι.

Απόδειξη: Έστω $f(a)>0$ τότε $f(b)<0$

Ορίζουμε το σύνολο $\{x\in[a,b] \mid f(t)>0, \forall t\in[a,x]\} = A$

οπου $A\subset[a,b]$ δεν είναι κενό αφου $a\in A \Rightarrow A\neq\varnothing$

Δεν έχει το A δεύτερο στοιχείο α. γιατί

$f(a)>0$, συνεχής $\Rightarrow \exists\delta>0, \forall t\in[a,a+\delta] \Rightarrow f(t)>0$

Το A είναι λοιπόν κενό, άνω φραγμένο, άρα έχει $\sup A = \xi$

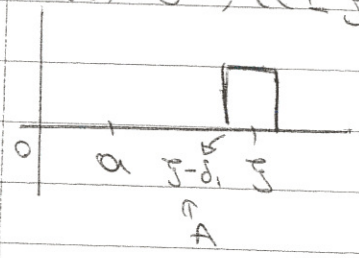
Θα αποδείξω ότι $f(\xi)=0$

Απαγωγή σε άτοπο

Έστω ότι δεν αληθεύει $\Rightarrow$ { είτε $f(\xi)>0$ / είτε $f(\xi)<0$

- Αν $f(\xi)>0$, λόγω συνέχειας της f στο ξ. $\exists\delta_1>0$

$f(t)>0$, $t\in[\xi-\delta_1, \xi+\delta_1]$



$\forall t\in[a,\xi+\delta_1] \Rightarrow f(t)>0$

$\Rightarrow \sup A \geq \xi+\delta_1$ Άτοπο

$\sup A = \xi$

- Αν $f(\xi)<0$ λόγω συνέχειας της f στο ξ

$\exists\delta_2>0$ $f(t)<0$, $t\in[\xi-\delta_2, \xi+\delta_2]$

$A\subseteq[a,\xi-\delta_2] \Rightarrow \sup A \leq \xi-\delta_2$ άτοπο

$\sup A = \xi$

άρα είναι ίσο

9/12/2014

Ανάλυση 1

ΘΜΤ Cauchy: Έστω $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, παρ/σιμες στο (a,b). Τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$

$$(f(b)-f(a))\,g'(\xi) = (g(b)-g(a))\,f'(\xi)$$

Παραγωγισιμότητα σύνθετης συνάρτησης

Σχόλιο: Αν f παρ/σιμη στο x_0, η g παρ/σιμη στο $f(x_0)$

$f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$

$x \in A$ $\quad f(x_0) \in B$

$g \circ f: A \to \Gamma$

Τότε η $g \circ f$ είναι παρ/σιμη στο x_0 και ισχύει

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Λήμμα:

Αν $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ h'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Τότε η H είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη: Ορίζουμε $G: B \to \Gamma$

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}, & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0) \end{cases}$$

Τότε $G(f(x)) =$

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \underset{x\to x_0}{G(f(x))} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}$$

$$= G(f(x_0))\, f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Πρόταση: Έστω $f:[x_0-\delta, x_0+\delta] \to [f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)]$ γνησίως αύξουσα
υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $f'(x_0)\neq 0$
Τότε $f^{-1}:[f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)] \to [x_0-\delta, x_0+\delta]$, είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ορίζουμε $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}, & x\neq x_0 \\ \dfrac{1}{f'(x_0)}, & x=x_0 \end{cases}$

επειδή η f είναι παρ/μη στο x_0, $(f'(x_0)\neq 0)$, η h είναι συνεχής, στο x_0

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} = h(f^{-1}(y))$$

$y=f(x) \Leftrightarrow$
$x=f^{-1}(y)$
$h(f^{-1}(y)) = \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x))}{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}$

$$\lim_{h\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} =$$

$$= \lim_{y\to f(x_0)} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(f(x))) = h(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής (Θεώρημα Taylor)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(n-1)$ παρ/μη και $f^{(n-1)}$ παρ/μη στο (a,b). Τότε $\exists\, \xi\in(a,b)$ τ.ω

πολ/κο Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$$\begin{cases} f(b) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ \dots + \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n \end{cases}$$

Άσκηση: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παρ/λη, 2 φορές παρ/λη στο $(0,1)$. Επιπροσθέτως γνωρίζουμε:

$f(0)=0$, $f(1)=1$

$f'(0)=0$, $f'(1)=0$

Αποδείξτε ότι $\exists\, \xi\in(0,1)$ τ.ω $|f''(\xi)|\geq 4$

Απόδειξη: (ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ)

Έστω ότι $|f''(x)|<4 \quad \forall x\in(0,1)$

Εφαρμόζω Taylor γύρω από το 0, τότε για $0\leq x\leq 1$

$\exists\, \xi_1\in(0,x)$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2$$

$$f(x)=\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2 \Rightarrow |f(x)|=\frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|<2x^2$$

Εφαρμόζουμε Taylor γύρω από το 1, (τότε $0\leq x\leq 1$)

$\exists\, \xi_2\in(x,1)$

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2$$

$$=1+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow |f(x)-1|=\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(x-1)^2<2(x-1)^2$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το πολυώνυμο

$x \in [a,b]$

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Επιλέγουμε $M \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(b) = p(b) + M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

και θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση

$g:[a,b] \to \mathbb{R}$, όπου

$$g(x) = f(x) - p(x) - M\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Τότε $g(b)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)=0, \ldots, g^{(n-1)}(a)=0$

$\hookrightarrow \exists\, \xi_1 \in (a,b)$, $g'(\xi_1)=0$ | $g'(a)=0$ $\Rightarrow$ ΘΜΤ $[a,\xi_1] \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{\xi_2 \in (a,\xi_1)}$

$g''(\xi_3)=0 \Rightarrow$

$$g(x) = f(x) - p(x) - M\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$g'(x) = f'(x) - p'(x) - M\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\Rightarrow \boxed{a < \xi_3 < \xi_2 < \xi_1}$

$g'''(\xi_3)=0$

$g'(a) = f'(a) - p'(a) = 0$

$\Rightarrow \exists\, a < \xi_{n-1} < \xi_{n-2} < \ldots < \xi_1 < b$

$g^{(n-1)}(\xi_{n-1})=0$ | $g^{(n-1)}(a)=0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n = n!}$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \underbrace{p^{(n)}(x)}_{\equiv 0} - \frac{M \cdot n!}{n!}$$

$$0 = g^{(n)}(\xi_n) = \boxed{f^{(n)}(\xi_n) = M}$$

$$f(b) = p(b) + M\frac{(b-a)^n}{n!} \Rightarrow f(b) = p(b) + f^{(n)}(\xi_n)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Άσκηση: Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια $f(0)=0$, $f'\uparrow$

$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x>0$

Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα

Λύση:

Η g είναι παραγωγίσιμη (άρα επίσης παραγωγίσιμη)

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad x>0$$

Όμως $xf'(x)-f(x)=xf'(x)-xf'(\xi_x)=x[f'(x)-f'(\xi_x)]$

↳ (λόγω των παραπάνω)

Εφαρμόζεται ΘΜΤ στην f στο $[0,x]\Rightarrow\exists\,\xi_x\in(0,x)$ τ.ω.

$$f(x)=f(0)+xf'(\xi_x)\Rightarrow f(x)=xf'(\xi_x)$$

Άσκηση: Έστω $a>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}|x|\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Τότε i) Η f είναι συνεχής,

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη για $a>1$

iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν $a=1$

Λύση

ii) $x\neq 0$ $\sin\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη

$|x|^a$, $x\neq 0$ $\forall a\in\mathbb{R}$

$g(x)=|x|^a$, για $\forall x$

$=e^{a\ln|x|}$

$g'(x) = e^{a\ln|x|}(a\ln|x|)'$

$= |x|^a \left(a\frac{(|x|)'}{|x|}\right)$, $(|x|)' = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

$= |x|^a \left(a\frac{x}{|x|^2}\right) = a\,|x|^{a-2}x$

iii) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|^a}{x}\sin\frac{1}{x}$, $a>1$

$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{|x|^a}{|x|}\left|\sin\frac{1}{x}\right| = |x|^a\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|^{a-1}$, $a-1>0$

Αν $a>1$, $\exists f$ παραγωγίσιμη στο 0, $f'(0)=0$

$x>0$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\frac{1}{x}$ αρα δεν $\exists$ αριθ αφού παίρνει σε άπειρες άλλες π x_n, y_n

$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

$\frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$

10/12/2014

Ανάλυση 1

Άσκηση 3:

α) $x^2 = x\sin x + \cos x$

$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ παρ/λυη

$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$, $2 - \cos x > 0$ $\forall x$

γιατί $-1 \le \cos x \le 1$

$f'(x) > 0$ για $x > 0 \Rightarrow f$ αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και

$f'(x) < 0$ για $x < 0 \Rightarrow f$ φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

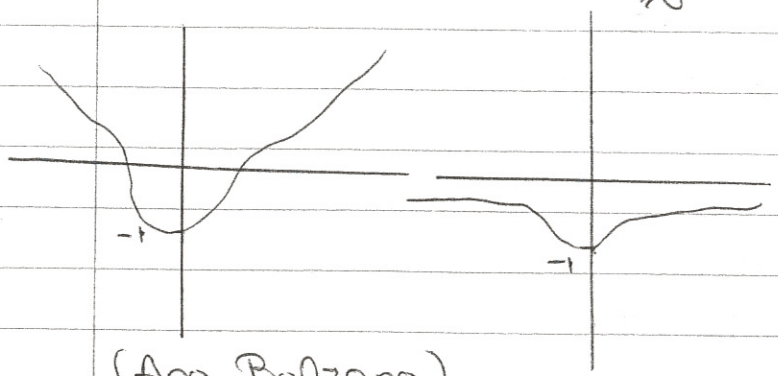
(Δουλεύω ριζές:)

$f(0) = -1 < 0$

$f(2) = 4 - 2\sin 2 - \cos 2 = 2 - 2\sin 2 + 2 - \cos 2$

$= 2(1 - \sin 2) + (2 - \cos 2) > 0$

≥ 0 > 0



(Από Bolzano)

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

και επειδή f αύξουσα στο $[0, +\infty)$ μπορεί να έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα έχει ακριβώς 1 ρίζα στο $[0, +\infty)$

$f(0)<0$

$f(-2)=4+2\sin(-2)-\cos(-2)>0$

Υπαρχει $\xi_2 \in (-2,0)$ τ.ω $f(\xi_2)=0$

και επειδη f φθινουσα στο $(-\infty,0]$, ειναι η μοναδικη ριζα της f σε αυτο το διαστημα

Αρα η f εχει ακριβως 2 ριζες

β) Ν.δ.ο $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$, $\forall x>0$

$g(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, $x\geq 0$ παραγωγισιμη

$g'(x)=e^x-1-x$

$g''(x)=e^x-1>0$ $\forall x>0$

Αρα g' αυξουσα στο $[0,+\infty)$

$g(x)\geq g'(0)$ $\forall x>0$

$g'(0)=0$

Αρα $g'(x)\geq 0$ $\forall x>0$

Αρα η g αυξουσα στο $[0,+\infty)$

$g(0)=0$

αρα $g(x)\geq g(0)$ $\forall x>0$

Αρα $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$, $\forall x>0$

άσκηση 4

Για $x>0, y>0$ νδο

$$x\log x + y\log y \leq (x+y)\log(x+y)$$

Έστω $y>0$

$$f(x) = x\log x + y\log y - (x+y)\log(x+y),\quad x>0$$

$$f'(x) = \log x + 1 - \log(x+y) - 1 = \log\left(\frac{x}{x+y}\right) < 0$$

$x, y>0$

$x+y > x$

$$\frac{x}{x+y} < 1$$

Οπότε η f φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[x\log x + y\log y - (x+y)\log(x+y)\right] =$$

$$= y\log y - y\log y$$

$$\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{DL'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$f(x) \leq 0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow x\log x + y\log y \leq (x+y)\log(x+y) \quad \forall x>0$

Άρα $x\log x + y\log y \leq (x+y)\log(x+y),\ \forall x, y>0$

Άσκηση 1

Τρόπος α'

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2x)+f(x)-2f(0)}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{3x}+\frac{f(2x)-f(0)}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{3x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2x)-f(0)}{3x}$$

$$=\frac{f'(0)}{3}+\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2x)-f(0)}{3x}=\frac{f'(0)}{3}+\frac{2}{3}f'(0)=f'(0)$$

$u=2x$

$\lim u = 0^+$

$\lim 2x = 0$

$x\to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2x)-f(0)}{3x}=\lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)-f(0)}{\frac{3u}{2}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{2(f(u)-f(0))}{3u}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)-f(0)}{u}=\frac{2}{3}f'(0)$$

Τρόπος β'

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:0<x<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

Αν πάρω $x=2y\Rightarrow y=\frac{x}{2}$

$$0<y<\frac{\delta}{2}\Rightarrow\left|\frac{f(2y)-f(0)}{2y}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

Όπου γενικά αν έχω πχ $0<x<\frac{\delta}{2}$ τότε

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

και

$$\left|\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-f'(0)\right|<\varepsilon\Rightarrow$$

$$x(f'(0)-\varepsilon) < f(x)-f(0) < (f'(0)+\varepsilon)x$$

$$2x(f'(0)-\varepsilon) < f(2x)-f(0) < (f'(0)+\varepsilon)2x$$

$$\frac{3x(f'(0)-\varepsilon)}{3x} < \frac{f(x)+f(2x)-2f(0)}{3x} < \frac{3x(f'(0)+\varepsilon)}{3x}$$

$$\left|\frac{f(x)+f(2x)-2f(0)}{3x} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)+f(2x)-2f(0)}{3x} = f'(0)$

άσκηση 2

$g(y) = y^{2015} + y$ συνεχής, "1-1", επί άρα, παραγωγίσιμη

⊛ $g(f(x)) = 2014x \Rightarrow f(x) = g^{-1}(2014x)$

$\exists g^{-1}$

$g'(y) = 2015y^{2014} + 1 > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Άρα η g' δεν μηδενίζεται, η g^{-1} είναι και αυτή παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$

f παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγίσιμων) $\forall x \in \mathbb{R}$

⊛ $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2014 \Rightarrow f'(x) = \frac{2014}{g'(f(x))}$

$$f'(0) = \frac{2014}{g'(f(0))} = \frac{2014}{g'(0)} = \frac{2014}{1} = 2014$$

$$\left.\begin{array}{l} g(f(0)) = 0 \\ g(f(0)) = (f(0))^{2013} + f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\left[1 + f(0)^{2014}\right] = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

11/12/2014

Ανάλυση 1

Θεώρημα Darboux (Ανάλογο του Θ Bolzano)

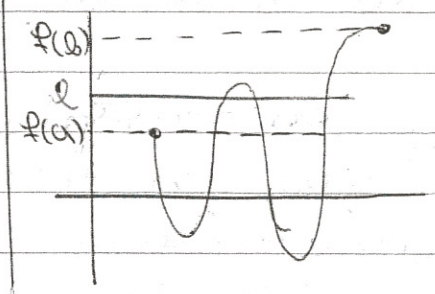
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και έστω $f'(a)<f'(b)$

Αν $f'(a)<\ell<f'(b)$

Τότε $\exists \xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\ell$

↳ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)<f(b)$ και $f(a)<\ell<f(b)$

$\Rightarrow \exists \xi\in(a,b)$, $f(\xi)=\ell$.



Προσέχω

$f'(x)=\ell \Leftrightarrow (f(x)-\ell x)'|_{x=\xi}=0$

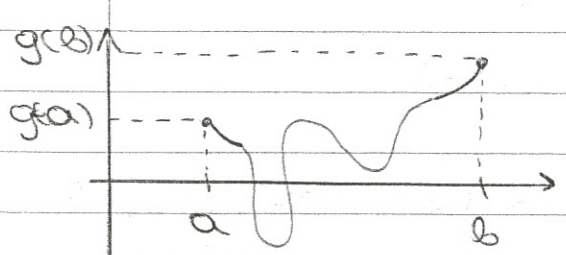
$g(x)=f(x)-\ell x$

↓ Fermat.

Η g για ~~όποιο~~ έχει ελαχίστου αριστερά

$$\boxed{g'(a)=f'(a)-\ell<0} \quad (*)$$

$g'(b)=f'(b)-\ell>0$



Δηλ θα αποδείξουμε: $\exists\, \delta>0$, $\forall x\in(a,a+\delta)$ $g(a)>g(x)$ για την $(*)$

Δηλ από τον ορισμό: $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$

$a<x<a+\delta \Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right|<\varepsilon+g'(a)$

($\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$, $x-a>0$, $g'(a)>0$)

επιλέγω $\varepsilon=-\frac{g'(a)}{2}$

αν παραδεχθώ έτσι το ε το $g'(a)$

<0

Άρα ισχύει το $g(a) > g(x)$

Απόδειξη:
Θεωρώ τη συνάρτηση $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, με τύπο
$g(x) = f(x) - lx$, $x \in [a,b]$

Η g είναι παρ/τη σαν διαφορά παρ/των συν/σεων

Βήμα 1: Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\exists\ 0<\delta<b-a$ ώστε $g(a) > g(x)$, $\forall x \in (a, a+\delta)$
Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για το γεγονός ότι $g'(a) = f'(a) - l < 0$
Οπότε επιλέγουμε $\varepsilon = -\frac{g'(a)}{2} > 0$, $\exists\ 0<\delta<(b-a)$ ώστε $a < x < a+\delta$, να έχουμε
$$\left| \frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a) \right| < -\frac{g'(a)}{2} \quad (*)$$

$$\frac{g'(a)}{2} < \frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a) < -\frac{g'(a)}{2}, \quad \forall a < x < a+\delta$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3g'(a)}{2} < \frac{g(x)-g(a)}{x-a} < \frac{g'(a)}{2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x) - g(a) < 0 \quad \forall x,\ a < x < a+\delta$

Βήμα 2 $b-a > \delta_2 > 0$ $g(x) < g(b)$, $\forall x \in (b-\delta_2, b)$
(Με χρήση του ορισμού ότι $g'(b) > 0$)
$\varepsilon = \frac{g'(b)}{2} \Rightarrow \exists\ \delta_2 > 0$

$b - \delta_2 < x < b$
$$\left| \frac{g(x)-g(b)}{x-b} - g'(b) \right| < \frac{g'(b)}{2} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{g'(b)}{2} < \frac{g(x)-g(b)}{x-b} < \frac{g'(b)}{2} \Rightarrow g(x) < g(b)$

Επομένως τα σημεία a, b δεν είναι σημεία τοπικού ελαχίστου για την g. Η ελάχιστη τιμή της g στο $[a,b]$ υλοποιείται σε σημείο $\xi \in (a,b)$

Οπότε από το Θ Fermat παίρνουμε ότι

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \ell$

Άσκηση: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τ.ω.

$2x \le f(x) \le 2x + 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο 0 και βρείτε την $f'(0)$

Απόδειξη: Για $x=0$ στην ανισότητα, παίρνουμε

$0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Πρόχειρο:

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

$2x \le f(x) \le 2x + 3x^2$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

$x > 0$

$x < 0$

$2 \le \frac{f(x)}{x} \le 2 + 3x$

$2 \ge \frac{f(x)}{x} \ge 2 + 3x$

Για $x > 0$, έχουμε $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le 2 + 3x$

οπότε από ιδιότητα παρεμβολής: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$

$(f'(0^+) = 2)$

Αντίστοιχα για $x<0$ ⇒

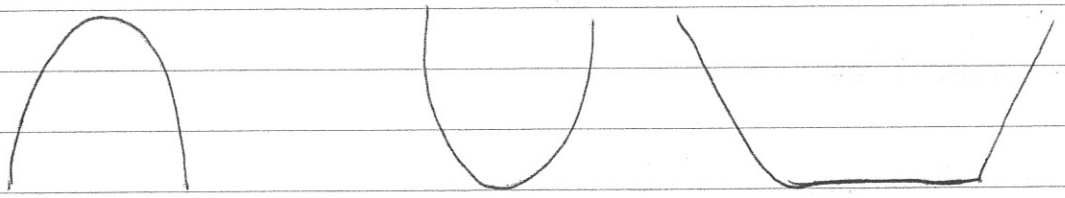
$$2 \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq 2+3x$$

και $\exists \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2 = f'(0^-)$

και επομένως η f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$

Προσοχή! Αν τα πλευρικά όρια στο 0 δεν ήταν ίδια, η $f(0)$ δεν θα ήταν παράγωγος αλλά τα πλευρικά όρια θα διαφοράζαν και έχαν παράγωγος, με διαφορετικές τιμές.

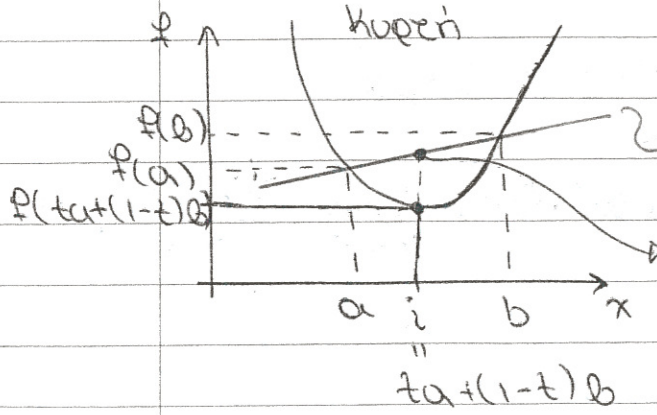
Κυρτές συναρτήσεις



κοίλη κυρτή

η απόδειξη ότι δεν έχαν όλες οι κοίλες παράγωγο σε όλα τα σημεία

Βασική ιδιότητα:



Κυρτός συνδυασμός

$x = ta + (1-t)b, \quad t \in (0,1)$

$\rightarrow y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

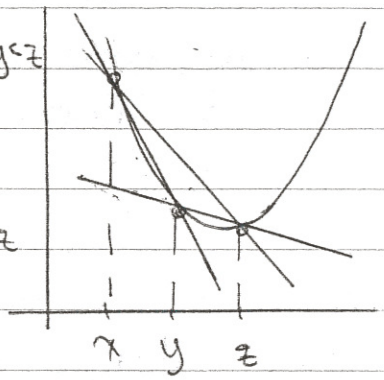
$\rightarrow tf(a)+(1-t)f(b)$

f κυρτη αν $\forall a,b \in \mathbb{R}$
$\forall t \in [0,1]$
$f(ta+(1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

Πρόταση: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, $\forall x<y<z$

ii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$, $\forall x<y<z$



iii) $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$, $\forall x<y<z$

iv) f κυρτή $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in (0,1)$
$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, τότε είναι συνεχής, δεν ισχύει όμως ότι κάθε συνεχής είναι τοπικά Lipschitz συνάρτηση.

Lipschitz συνάρτηση:
$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$

π.χ. $f(x)=|x|$ είναι κυρτή συνάρτηση, είναι παντού εκτός από το $x=0$ δεν είναι παντού παραγωγίσιμη.

Hölder συνάρτηση (με εκθέτη $\alpha \in (0,1)$) είναι τα σημεία, αλλά στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη.
$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}$

Σημείωση: Άρα κάθε συνάρτηση είναι Lipschitz, τότε είναι και Hölder (τοπικά)

$([a,b], \exists M>0 \; |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|, \forall x,y \in [a,b])$

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) f κυρτή
ii) f' ↑

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 2 φορές παρ/μη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
i) f κυρτή
ii) $f'' \geq 0$

Άσκηση: Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \ln x$, $x \geq 0$. Δείξτε ότι a) είναι κυρτή συνάρτηση και b) αποδείξτε την ανισότητα.

$$(x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b}, \quad \forall x, y, a, b > 0$$

Λύση:

a) Η f είναι 2 φορές παρ/μη συνάρτηση και έχουμε
$f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad x > 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow$ κυρτή συνάρτηση.

b) $\forall A, B, \forall t \in (0,1)$
$Q(tA + (1-t)B) \leq t Q(A) + (1-t) Q(B)$

$A = \frac{x}{a}, \quad B = \frac{y}{b}$

Παίρνω τον κυρτό συνδυασμό των A, B:

$$tA+(1-t)B = t\frac{x}{a}+(1-t)\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}$$

$$\Rightarrow t\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = \frac{x+y}{a+b}-\frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow t\frac{(bx-ay)}{ab} = \frac{b(x+y)-y(a+b)}{b(a+b)} = \frac{bx+by-ay-by}{b(a+b)} =$$

$$= \frac{bx-ay}{b(a+b)}$$

Επιλογή: $t=\frac{a}{a+b} \in (0,1)$

Λόγω κυρτότητας f:

$$f(tA+(1-t)B) \le tf(A)+(1-t)f(B) \le \frac{1}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right.$$

$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

$$\frac{x+y}{a+b}\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le \frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}$$

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}$$

21/10/2014

Ανάλυση 1:

(Γενικότερες σημειώσεις)

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$\leq$ $U_n = \sup\{x_n / m \geq n\}$

$n+1$ ⟶ το μεγαλύτερο από τα πιθανά σημεία συσσώρευσης.

$\lim_{n\to\infty} U_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

Βασικός Χαρακτηρισμός 1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

Βασική Ιδιότητα: $\inf\{k\} = L_n \leq U_n$ $\sup\{x_n / m \geq n\}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leftarrow L_n \leq U_n \rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Πρόταση: Αν x_{n_k} συγκλίνει, τότε $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

Πρόταση: Θέτω x_n φραγμένη. Η x_n συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, x_{n_k} \geq x+\varepsilon, \\ k = 1,2,3\ldots \\ x_{n_k} \xrightarrow[l\to\infty]{} m \end{array}\right\} \Rightarrow m \geq x+\varepsilon \;,\; \varepsilon > 0$

$\overline{\lim} x_n \geq m$

$x \geq m \geq x + \varepsilon$

2) Εαν πάρω το διάστημα $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$

$\exists$ υπακολουθία x_{n_k} : $x-\varepsilon < x_{n_k} < x+\varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = y$

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

$y-\varepsilon < x_n \quad \forall n \geq n_0$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ υπακολουθία x_{n_m} ώστε να βρίσκεται δεξιά

$y-\varepsilon < x_{n_m} < y+\varepsilon, \; m = 1, 2, \ldots$

$y - \frac{1}{n_k} < x_{n_m} < y + \frac{1}{n_k}, \; m = 1, 2, \ldots$

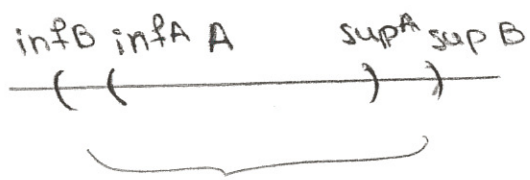
Θεώρημα: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες ακολουθίες για τις οποίες $x_n \leq y_n, \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geq 2014)$

Τότε

1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

Για A, B.



$A \subseteq B$

Να δουν τα διαστήματα και τα άκρα και τις ανισότητες.

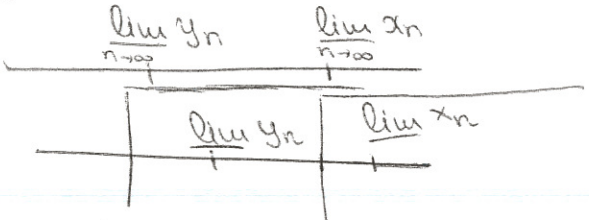
B
$\sup A \leq \sup B$
$\inf A \geq \inf B$

—

Πόρισμα (ii):
Θα χρησιμοποιήσουμε την παγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$

Σχέσεις:



Τελικά: $\lim y_n - \varepsilon$ $\lim x_n - \varepsilon$

$\exists n_0 : y_n \geq x_n \geq \lim_{n\to\infty} - \varepsilon \;,\; n \geq n_0$

-πλευρά: $\forall \varepsilon > 0 : y_n \geq a - \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$y_{n_k} \geq a - \varepsilon$

$\downarrow$

$\bar{y} \geq a - \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία y_n θα συγκλίνει για $\geq a$

□

Άρα αποδείξαμε ότι:

Έστω $\varepsilon>0$, επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, έχουμε $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε

$x_n \geq x-\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

άλλως $y_n \geq x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

οπότε $y_n \geq x-\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$

Έστω y_{n_k} υπακολουθία της y_n ώστε $y_{n_k} \to \lim_{n\to\infty} y_n$

$\Rightarrow y_{n_k} \geq x-\varepsilon$ $\forall k \geq k_0$ όπου $n_{k_0} \geq n_0$ (αφού συγκλίνει, μπορώ να περάσω στο όριο)

διότι τις

φέρω

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n \geq x-\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} y_n \geq \lim_{n\to\infty} x_n$ ΑΤΟΠΟ

$A \geq B-\varepsilon$
$\forall \varepsilon>0$
$\Downarrow$
$A \geq B$

Άσκηση: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία, για την οποία ισχύει $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$, $\forall n \geq 2$

Αποδείξτε ότι $\exists \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1})$ και δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$

Θέτω y_n

Ισχύει 1: $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$ $\Leftrightarrow$ Έστω $y_n = x_n - x_{n+1}$, $n\geq 2$

$\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{y_n} \leq \underbrace{x_{n+1} - x_n}_{y_{n+1}}$

$\Rightarrow y_n \uparrow$

Η y_n είναι επίσης φραγμένη, διότι αν $|x_n| \leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Λύση 2: ~~Άτοπο~~

$\exists \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = \ell$

Η x_n φραγμένη:

Από Bolzzano - Ω. $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \overline{\lim_{n\to\infty}}$

Τότε $2x_{n_k} \leq x_{n_k-1} + x_{n_k+1}$

Επειδή η x_{n_k-1} είναι φραγμένη η ίδια, ∃ υπολοιπόδια τέτοια ώστε

$x_{n_{k_\ell}-1} \to 6$
$\ell\to\infty$

$2x_{n_{k_\ell}} \leq x_{n_{k_\ell}-1} + x_{n_{k_\ell}+1}$

Τελικά καταλήγουμε στην υπαρξη υπακολουθίας ~~$2x_{n_{k_\ell}} \leq$~~

$2x_{n_{k_{\ell_m}}} \leq x_{n_{k_{\ell_m}}-1} + x_{n_{k_{\ell_m}}+1}$ $\forall m\in\mathbb{N}$ όπου κάθε όρος συγκλίνει

$\downarrow 6$ $\downarrow \tau$

Παίρνουμε το όριο $2\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq 6+\tau \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} x_n$

Μπορεί το 6 να είναι γνήσια μικρότερο από το $\overline{\lim} x_n$;

Όχι γιατί θα καταλήγαμε σε γνήσια ανισότητα και θα καταλήγαμε σε άτοπο.

Άρα $6 < \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$\Rightarrow 6 = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$x_{n_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$x_{n_k-1} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ $\Big\} \Rightarrow x_{n_k} - x_{n_k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$

ενώ:

έστω $x_n \geq 0$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$

ι.δ.ο $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0$

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1 \Rightarrow$

τότε $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ πραγματικός

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

22/10/2014

Άσκηση 1:

Άσκηση 4:

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έστω $\varepsilon > 0$

$n < m$

$$|x_n - x_m| = \left| 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n}}{n+1} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{n}}{n+1} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right| = \left| (-1)^{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m} \right|$$

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} = \frac{-(k+1)+k}{k(k+1)} = -\frac{1}{k(k+1)}$$

Αν $m - n - 1$ άρτιος:

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+4)(n+5)} - \dots - \frac{1}{(m-1)m} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \dots - \frac{1}{(m-1)m} < \frac{1}{n+1}$$

Αν $m-n-1$ περιττός

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \dots - \frac{1}{(m-2)(m-1)} - \frac{1}{m} \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \dots < \frac{1}{n+1}$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n+1}$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ $\forall m > n \geq n_0 : |x_n - x_m| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Άρα η x_n είναι ακολουθία Cauchy.

Άρα συγκλίνει.

Άσκηση 1:

i) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $n \in \mathbb{N}$

αραγμένη

$a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_1 > 0$

$a_n \geq 0$

$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \geq 0$

$a_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = 1 \leq 3$

Υποθ. $a_n \leq 3$ Τότε $a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$ άρα είναι αραγμένη

αύξουσα.

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3a_n} - a_n \geq \sqrt{a_n a_n} - a_n = a_n - a_n = 0$

$a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{a_{n+1} = \sqrt{3a_n}}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ $\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = a$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a}$

$\Rightarrow a = \sqrt{3a} \Rightarrow a^2 = 3a \Rightarrow \underbrace{a=0}_{\text{απορ.}}$ ή $\boxed{a=3}$

ο) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}} = \lim_{n\to\infty} a_n = 3$

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = \sqrt{3a_1}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3\sqrt{3}}$

$\vdots$

$a_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$

άσκηση 2: a_n.

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b$

$\lim_{n\to\infty} a_{3n} = \gamma$

(a_{6n}) υπακολουθία της $(a_{2n}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{6n} = a$

υπακολουθία της $(a_{3n}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{6n} = \gamma$ $\Big\}\ a=\gamma$

$(a_{3(2n-1)})$ υπακολουθία της $(a_{3n}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{3(2n-1)} = \gamma = a$

-//- $(a_{2n-1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{3(2n-1)} = b$ $\Big\} \Rightarrow$

$(a_{3(2n-1)})$ ↙ σα περιττά πολλαπλάσια του 3.

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\Rightarrow \{ b=a=\gamma$

$a_n \to a$

$\varepsilon > 0$ $a_{2n} \to a$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \ |a_{2n} - a| < \varepsilon$

$a_{2n-1} \to a$

$\exists n \in \mathbb{N}$ ... $|n \quad -a| < \varepsilon$

$n_0 = \max\{n_0, n_1\}$

$\forall n \geq n_0$

$|a_n - a| < \varepsilon$

άσκηση 3:

1)

$x_n = \frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} \quad x_n, y_n \in \mathbb{N}$

$x_n \to 1$

Τι θέλω: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0, \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} - 1\right| < \varepsilon$

2] $-\frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} - 1 \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n-1}{n\sqrt{3}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq$

$\leq \frac{n+1}{n\sqrt{3}}$

$\left[\frac{n-1}{n\sqrt{3}} \ , \ \frac{n+1}{n\sqrt{3}}\right]$

$\frac{n+1}{n\sqrt{3}} - \frac{n-1}{n\sqrt{3}} = \frac{2}{n\sqrt{3}}$

$\frac{-1}{\sqrt{3}} y_n \leq x_n \leq y_n \leq y_n \frac{n+1}{n\sqrt{3}}$

$y_n \frac{2}{n\sqrt{3}} \geq 1$

$\Rightarrow x_n = y_n\left\lfloor\frac{n+1}{n\sqrt{3}}\right\rfloor = \left[\left(\left[\frac{n\sqrt{3}}{2}\right] + 1\right)\frac{(n+1)}{n\sqrt{3}}\right] \Rightarrow y_n \geq \frac{n\sqrt{3}}{2}$

$y_n = \left[\frac{n\sqrt{3}}{2}\right] + 1$

$x_n, y_n \in \mathbb{N}$

$-\frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$\left|\frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} - 1\right| \leq \frac{1}{n}$

$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{x_n}{y_n}\sqrt{3} - 1\right| < \varepsilon$

b) $b_n = \frac{z_n}{\omega_n} \to \sqrt{3}$

$$\left|\frac{z_n}{\omega_n} - \sqrt{3}\right| < \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{n} < \frac{z_n}{\omega_n} < \sqrt{3} + \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{3} + \frac{1}{n} - \sqrt{3} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\omega_n \frac{2}{n} \geq 1 \Rightarrow \omega_n \geq \frac{n}{2} \Rightarrow \omega_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

$$\left(\sqrt{3} - \frac{1}{n}\right)\omega_n \leq z_n \leq \omega_n\left(\sqrt{3} + \frac{1}{n}\right)$$

$$z_n = \left[\omega_n\left(\sqrt{3} + \frac{1}{n}\right)\right] = \left[\left(\sqrt{3} + \frac{1}{n}\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\right]$$

23/10/2014

Ανάλυση 1:

$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$

↳ το μεγαλύτερο από τα σημεία συσσώρευσης.

i) $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ $a_n < a+\varepsilon$, $n \geq n_0$

ii) Υπάρχει υπακολουθία τέτοια ώστε $a-\frac{1}{k} < a_{n_k} < a+\frac{1}{k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$

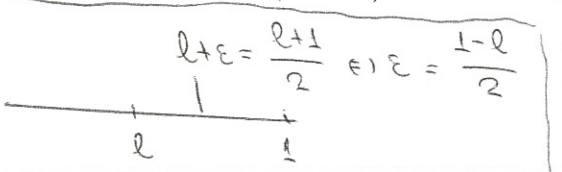
Θεώρημα: Έστω $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ώστε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

Τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Απόδειξη: Επειδή $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\varepsilon$, $n\geq n_0$

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$, τότε $\exists n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+1}{2} < 1$, $\forall n \geq n_0$



Σχέση ⇔

Δηλαδή $0 < \frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} < \frac{l+1}{2} = \omega < 1$

$0 < \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} < \omega$

$\vdots \quad \vdots$

$0 < \frac{a_{n_1+k}}{a_{n_1+k-1}} < \omega \quad k\in\mathbb{N}$

Πολλαπλασιάζουμε: $\frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} \cdots \frac{a_{n_1+k}}{a_{n_1+k-1}} < \omega^k$

$a_{n_1+k} < \omega^k a_{n_1} < 1$

$0 < a_{n_1+k} < a_{n_1} \omega^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

από το κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, επειδή $|\omega| < 1$

$\| \quad \frac{l+1}{2} < 1$

Άσκηση: Αν $|\omega| < 1$

$\Rightarrow \omega^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\lim a_n = 0$

$\Updownarrow$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$b_n = |\omega|^n \to 0$?

$b_{n+1} = b_n |\omega| \leq b_n$

$l = l|\omega| \Leftrightarrow l(1-|\omega|) \geq 0$

Σειρά πραγματικών αριθμών:

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

Αποτελούνται από απεριόριστο πλήθος όρους της ακολουθίας.

$\longrightarrow$ Ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a_n

$\swarrow$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Στους απείρους όρους έχει σημασία η σειρά που προσθέτουμε ή αντίστοιχα που πολλαπλασιάζουμε. Ενώ στα πεπερασμένα αθροίσματα και γινόμενα, δεν έχει σημασία.

Τότε λέμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

$\underline{\text{ή}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Ορισμός: Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, ειδικότερα

$\lim_{n\to\infty} S_n = A$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A\right)$ $\underline{\text{Δηλ}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ $\underline{\text{σημ}}$ $\lim_{n\to\infty} S_n = A$.

που $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = A$.

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Απόδειξη: $S_n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l(l+1)}$

Έτσιο το αλλάζω:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$$= \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Άρα $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, οπότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Ιδιότητες στα οποία μπορούμε να χρησιμοποιούμε μόνο όταν έχω πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

Παραδείγμα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\omega^n = a\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n$$

$$= a\,\frac{1}{1-\omega}$$

αν $\omega \geq 1$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \to \infty$

αν $-1 \leq \omega \leq 1 \Rightarrow |\omega| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

Απόδειξη: $S_n = \sum_{k=0}^{n} a\omega^k$

$$= a + a\omega + a\omega^2 + \ldots + a\omega^n$$

$$= a(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n) \text{ αρα αν } \omega \neq 1$$

ταυτότητα: $\omega^{n+1} - 1 =$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + \ldots + AB^{n-1} + B^n)$$

$$A^{2n-1} + B^{2n-1} = (A+B)(A^{2n-2} - A^{2n-3}B + \ldots + B^{2n-2})$$

$$= a(1 + \omega + \ldots + \omega^n)\,\frac{(1-\omega)}{1-\omega} = a\,\frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

$$S_n = a\,\frac{(1-\omega^{n+1})}{1-\omega} = \frac{a}{1-\omega} - a\,\frac{\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

Αν $|\omega| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-\omega} - a\,\frac{\omega^{n+1}}{1-\omega}\right) = \frac{a}{1-\omega}$

□

Πρόταση: (ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Αν $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ φορές}} = n$$

Απόδειξη: Επειδή η σειρά συγκλίνει, η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, συγκλίνει έστω $\lim_{n\to\infty} S_n = A$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$$

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

Οπότε επειδή η S_n συγκλίνει: $\lim_{n\to\infty} S_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A$.

και η a_n (ως διαφορά συγκλινουσών) συγκλίνει και επιπροσθέτα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A - A = 0$$

Άλγεβρα Συγκλινουσών Σειρών:

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε

$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ συγκλίνει επίσης. Μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) =$

$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Απόδειξη: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$

$$\tilde{\tilde{S}}_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \lambda S_n + \mu \tilde{S}_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\tilde{S}}_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n + \mu \tilde{S}_n)$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \square$$

Σειρές με όρους θετικούς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad a_n \geq 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα γιατί $a_n \geq 0$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \qquad S_n \uparrow$$

Πρόταση: Αν $a_n \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ανν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_n είναι άνω φραγμένη.

$$S_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq M \right)$$

30/10/2014

Ανάλυση:

Φυλλάδιο 5

άσκηση 4:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη

$3a_n \le 2a_{n-1} + a_{n+1}$, $n = 2, 3, \dots$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$

$a_{n+1} - a_n \ge 2(\underbrace{a_n - a_{n-1}}_{b_n})$ $n = 2, 3, \dots$

b_{n+1}

$b_{n+1} \ge 2b_n$, $n = 2, 3, \dots$ b_n φραγμένη

Διαμερίσεις σε περιπτώσεις:

1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $b_{n_0} > 0$

2) $b_n \le 0$ $\forall n \ge 2$

Όπως είδαμε (1) $\Rightarrow b_{n_0+k} \ge 2^k b_{n_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ άτοπο αφού b_n φραγμένη.

2) $b_n \le 0$

$a_n - a_{n+1} \le 0$ $\forall n = 2, \dots$

$a_n \le a_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

$\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow$ Η ακολουθία S_n συγκλίνει $\lim_{n\to\infty} S_n = a$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$

• Κριτήριο Cauchy (για ακολουθίες)

Έστω $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Η b_n συγκλίνει αν είναι ακολουθία Cauchy

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon,\ n, m \geq n_0$

Έτσι αποδείχθηκε το ορισμό ότι το: $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon) : |b_n - b| < \varepsilon,\ n \geq n_0$

Στις σειρές το κριτήριο του Cauchy έχει πάντα επιτυχημένο ρόλο γιατί είναι δύσκολο να βρούμε το όριο (της σειράς)

• Κριτήριο Cauchy για σειρές:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν ικανοποιεί το κριτήριο του n S_n είναι ακολουθία Cauchy (ισοδύναμα η ακολουθία μερικών αθροισμάτων).

ακολουθία Cauchy

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : |S_n - S_m| < \varepsilon,\ n, m \geq n_0$

$m > n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \varepsilon,\ m > n \geq n_0$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k\right)\right| < \varepsilon$$

το m είναι 4 αυθαίρετες

$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+1} + a_{n+2} \dots + a_m| < \varepsilon,\ m > n \geq n_0$

↓

μπορεί να είναι οσοδήποτε θέλει.

Εφαρμογή:

Παράδειγμα 1: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει $(+\infty)$

Απόδειξη: Με επαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι συγκλίνει, από το κριτήριο Cauchy η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ είναι ακολουθία Cauchy, δηλ:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$, $m > n \geq n_0$

Μπορώ να επιλέξω όσους το m. Ψάχνω κάτι έτσι ώστε να έχω αρκετούς όρους n τω. να έχω κάτι $>$ από το ε ώστε να καταλήξω σε άτοπο.

Επιλέγουμε $m = 2(n+1)$. Τότε θα είχαμε:

$$\underbrace{\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right|}_{\text{έχω } 2(n+1) = n+2 \text{ όρους}} < \varepsilon \quad , n \geq n_0$$

Όμως $\frac{1}{2} < \frac{n+2}{2(n+1)} \leq \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right| < \varepsilon$

Θέλω αντίφαση, οπότε θέτω $\varepsilon = 1/3$

Δηλ. $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \right| < 1/3$

$\frac{1}{2} < \frac{n+2}{2(n+1)} \leq \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right| < \frac{1}{3}$ ΑΤΟΠΟ αφού $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

και όχι $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$

Παράδειγμα 2: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα από το κριτήριο του Cauchy. Δηλ πρέπει επομένως για $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \varepsilon \quad , m \geq n \geq n_0$$

Προσπαθώ να συσχετίσω το πάνω μέρος το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

διότι $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ γιατί το συσχέτιση.

Άρα $\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{2}{m(m+1)} < \varepsilon$

Έστω $0 < \omega < 1$. Θα έπρεπε $\frac{1}{n^2} \leq c\,\omega^n \Rightarrow 0 < \omega < 1$. όλως αυτό δεν ισχύει

$\Rightarrow \ln \frac{1}{n^2} \leq \ln(c\omega^n)$

$\Rightarrow -2\ln n \leq \ln c + n \ln \omega$

$\Rightarrow n \leq \frac{2\ln n + \ln c}{-\ln \omega}$ αυτό είναι αδύνατο αφού το $\ln$ είναι πολύ μικρότερο και γρήγορο και το $n \to \infty$ πολύ πιο γρήγορα από το $\ln x \to \infty$

$$\frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Άρα $\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots +$

$\dots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}$

Άρα $\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < 2\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{m(m+1)}\right] =$

$2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right] < \frac{2}{n+1} < 2$

$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow$

$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ οπότε επιλέγουμε $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right] + 1$

Τότε για $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon$, $n \geq n_0$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους:

$a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Πρόταση: Αν $a_n \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, αν $\exists M > 0$ $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Κριτήριο (Συγκρίσεως) Έστω $a_n, b_n \geq 0$, έστω $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Αν $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty$ και επιπρόσθετα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει,

τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Επίσης αν $a_n \leq M b_n \Rightarrow$, $\forall n \geq n_0$

ii) Η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

iii) Αν $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

Απόδειξη:

i) Επειδή $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty \Rightarrow$ θα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_n}{b_n} \leq l+1$, $n \geq n_0$

$a_n \leq (l+1) b_n$, $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n_0}^{n} a_k \leq (l+1) \sum_{k=n_0}^{n} b_k \leq (l+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Άρα $\Rightarrow \sum_{n=1}^{n} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + (l+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= M$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$ Θυμίζουμε.

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

$x_n < x + \varepsilon$, $n \geq n_0$

ii) Υπακολουθία

$x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Κριτήριο λόγου: i) Αν $a_n > 0$ και $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

i) Αν $a_n > 0$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Κριτήριο ρίζας:

i) Αν $a_n \geq 0$, και $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^{1/n} = l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

i) Αν $a_n \geq 0$ και $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n^{1/n} = l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Κριτήριο ολοκληρώματος: Έστω $f:[1,+\infty) \to [0,+\infty)$ τ.ω. η $f \downarrow$ τότε το να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ είναι ισοδύναμο ($\Leftrightarrow$) να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_n^{+\infty} f(x)dx$ δηλ να $\exists \lim_{A\to\infty} \int_1^A f(x)dx$.

Απόδειξη:

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$\leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

αναιρείται $\forall f(1)\cdot l$ το λιγότερο όλους το $l=1$

Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει, τότε $\int_1^n f(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$\Leftrightarrow$ Αν $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει $\left(\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx\right)$ θα αποδείξαμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει. όλως είδαμε ότι $f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(x)dx$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq \underbrace{f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx}_{M}$$

Εφαρμογή: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Απόδειξη Θεωρώ τη συνάρτηση $f:[1,\infty) \to [0,+\infty)$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν $\exists \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

όμως $\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, οπότε $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$ και επομένως

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ Γι' αυτό και περιγράφουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

Κριτήριο Συμπύκνωσης
Αν $a_n \geq 0$, $a_n \downarrow$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει