Τρίτη 23 Σεπτεμβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Αχιλλέας Τερζίνας Ε 306 (γραφείο)
www.math.uoc.gr/~tertikas

- Αξιώματα

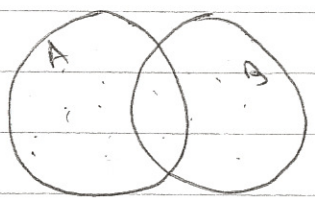
- Θεμελίωση
Πεπερασμένα βήματα
+
καταλήξει σε κάποιες διαισθητικές "σωστές" προτάσεις
- Αξιωμα πληρότητας

Πραγματικοί Αριθμοί (Real numbers) $\mathbb{R}$

Σύνολα (Sets)

subset
$A \subseteq \mathbb{R}$
$B \subseteq \mathbb{R}$
$\Longrightarrow$
union
$A \cup B \subseteq \mathbb{R}$
intersection
$A \cap B \subseteq \mathbb{R}$

Διαγράμματα Venn



Φυσικοί Αριθμοί
$\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}$

Ορισμός Κάθε στοιχείο του Γ είναι και στοιχείο του Δ

$\forall x \in \Gamma \Longrightarrow x \in \Delta$
(για κάθε)

(2)

(2)

$\Gamma = \Delta$ όταν περιέχουν R ίδια αριθμούς στοιχεία

$\left.\begin{array}{l}\Gamma \subseteq \Delta \\ \Delta \subseteq \Gamma \\ \Delta \supseteq \Gamma\end{array}\right| \Rightarrow \Gamma = \Delta$

$A \subseteq R \Rightarrow \underset{R-A}{A^c}$ συμπλήρωμα (complement)

Λήμμα: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Απ: Έστω $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \notin A \\ \& \\ x \notin B \end{array}}$

$\left.\begin{array}{l} x \notin A \Rightarrow x \in A^c \\ x \notin B \Rightarrow x \in B^c \end{array}\right| \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ (1)

αντίστροφο ($\Leftarrow$) Έστω $x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \\ \& \\ x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c$ δ.τ.λ.

$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Λήμμα Έστω $A_1, \dots, A_n \subseteq R$ Τότε

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

Μαθηματική Επαγωγή (induction)

Πραγματικοί Αριθμοί (Real Numbers)

$$\overset{\cup}{a} + \overset{\cup}{b} \longrightarrow a+b \qquad \overset{\mathbb{R}}{a}\ \overset{\mathbb{R}}{b}$$

Αξιώματα

1°) $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2°) $a+b=b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

3°) $\exists\, 0$ ουδέτερο στοιχείο, $a+0=0+a=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

4°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x)$ αντίθετο στοιχείο, $x+(-x)=0$

$$a,b \longrightarrow a\cdot b$$

5°) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

6°) $a\cdot b=b\cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

7°) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $a\cdot 1=1\cdot a=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

8°) $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$, $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

Αξίωμα 9° $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ σώμα Οι πραγματικοί αριθμοί μαζί με την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τα αξιώματά τους αποτελούν ένα σώμα.

Διάταξη $\forall x \in \mathbb{R}$, είτε $x>0$

είτε $x<0 (\Leftrightarrow) -x>0$

είτε $x=0$

μη αρνητικοί $\mathbb{R}_0^+ = [0,+\infty)$

Ολική Διάταξη $\forall x,y$

είτε $x<y$

είτε $x>y$

είτε $x=y$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Όταν υπάρχει ένας αριθμός Μ που είναι μεγαλύτερος από κάθε στοιχείο του συνόλου

Ορισμός: Το $A \subseteq \mathbb{R}$ το λέμε άνω φραγμένο όταν $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall a \in A,\ a \leq M$

(Α κάτω φραγμένο, $\exists m \in \mathbb{R},\ m \leq a,\ \forall a \in A$)

ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Κάθε (μη κενό) άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(Υπάρχει αριθμός s (supremum) που είναι ελάχιστο άνω φράγμα)

Παρ1 $A = [0,1]$ = έχει πολλά άνω φράγματα (1,2,3,...), ελάχιστο άνω φράγμα είναι το 1
$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
$\sup A = 1$

Παρ2 $B = (0,1)$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
$\sup B = 1$ εδώ δεν είναι στοιχείο του συνόλου

Παρ3 $\mathbb{N}$ (natural)
δεν είναι άνω φραγμένη

Απόδειξη Απαγωγή σε άτοπο

$A \Rightarrow B$
$\Updownarrow$
$\neg B \Rightarrow \neg A$
αληθεύει το Β — αληθεύει το Α

Έστω ότι $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο

ΣΥΣΧΕΤΙΖΟΥΜΕ

$\sup \mathbb{N} = M$.

$\Rightarrow$ Από το Αξίωμα πληρότητας $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq M$

$M-1$ ...

www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=1

Πέμπτη 25 Σεπτεμβρίου 2014

Άσκηση Ι

Άσκηση Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο

Απόδειξη Απαγωγή σε άτοπο

Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο σύνολο. Από το αξίωμα της πληρότητας, το $\mathbb{N}$ θα είχε supremum, δηλ. $\exists M = \sup \mathbb{N}$ τότε το M είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα, τότε ο $M-1$ δεν είναι άνω φράγμα, οπότε $\exists\, y \in \mathbb{N}$

Άξιωμα του αξιώματος άνω φράγματος

(Το M να μην είναι άνω φράγμα για το A)
$\exists\, a \in A,\ a > M$

$y > M-1 \iff y+1 > M$ άτοπο
$\in \mathbb{N}$

γιατί το M είναι άνω φράγμα επίσης.

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ ή $-x \geq 0$
$\mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$ $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$
$x > 0 \Rightarrow x+y > 0$
$y > 0$
$x > 0 \Rightarrow xy > 0$
$y > 0$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

i) $a \geq b \iff \boxed{a-b \geq 0}$
$x \geq y \Rightarrow a+x \geq b+y$

$\lambda > 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $a \geq b$ συχνότερα $\lambda a, \lambda b$

Διακρίνουμε περιπτώσεις. $\lambda > 0$

$\lambda a \geq \lambda b \Rightarrow$
$\lambda a - \lambda b \geq 0$
$\lambda(a-b) \geq 0$
$+ \geq 0$

$-\lambda > 0$
$-\lambda a \geq -\lambda b \Rightarrow$
$\lambda b \geq \lambda a$

Αν
$0 \geq a \geq b$
$0 \geq x \geq y$
$\Downarrow$
$ax \leq by$

(2)
(6)

Αν	Αποδείξη
$0 \geq a \geq b$	$0 \leq -a \leq -b$
$0 \geq x \geq y$	$0 \leq -x \leq -y$
$\Downarrow$	$(-a)(-x) \leq (-b)(-y)$
$ax \leq by$	$ax \leq by$

Θεωρία

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο. Ο s είναι το supA αν και μόνο αν το s έχει δύο ιδιότητες

i) $\forall a \in A \quad a \leq s$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s - \varepsilon < a$

Απόδ ($\Rightarrow$) είναι σχεδόν προφανές

($\Leftarrow$) Αν το s έχει τις ιδιότητες i), ii) τότε το

$\boxed{s = \sup A}$

Λήμμα

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, το B άνω φραγμένο. Τότε τα A, B έχουν supremum και ισχύει $\sup A \leq \sup B$

Απόδειξη

Από το αξίωμα της πληρότητας (το $\varnothing \neq B$ άνω φραγμένο) έπεται ότι έχει supB

$A \subseteq B$, B άνω φραγμένο $\Rightarrow$ A άνω φραγμένο

Αν M άνω φράγμα του B $\quad b \leq M, \forall b \in B$ τότε.

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq M$ (οπότε και)

$\Rightarrow$ M άνω φράγμα για το A

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ιδιότητα με $M = \sup B$

$\forall a \in A, a \leq \sup B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

Θεώρημα (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)
Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$
Απόδειξη
$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < n\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$

Θεώρημα
Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχει το $\inf A$ (δηλ μέγιστο κάτω φράγμα)
Απόδειξη
Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-a \mid a \in A\}$. Τότε το B είναι άνω φραγμένο, διότι επειδή το A είναι κάτω φραγμένο, $\exists\, -M \in \mathbb{R}$ ώστε $-M \leq a$, $\forall a \in A$
$\Updownarrow$
$-a \leq M$, $\forall a \in A$
Η άνω φράγμα B, δηλ B άνω φραγμένο
υπάρχει το $\sup B = S$, με τις ιδιότητες

i)	$-a \leq S$, $\forall a \in A$	$\iff$	$-S \leq a$, $\forall a \in A$
ii)	$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$, $S - \varepsilon > -a$		$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A$

$a < -S + \varepsilon$
$a - \varepsilon < -S$
$\Downarrow$

$-S$ το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα.
$\inf A = -S$

Τρίτη 30 Σεπτεμβρίου 2014
Ανάλυση Ι

Άσκηση
Να αποδείξετε επαγωγικά (Αν Bernoulli)
$(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq -1$

Μαθηματική Επαγωγή
$P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

Βήμα 1° Αποδεικνύουμε την πρόταση για $n=n_0$ δηλ. $P(n_0)$ είναι αληθής
Βήμα 2° Υποθέτουμε ότι η $P(x)$ αληθεύει
Βήμα 3° Αποδεικνύουμε ότι αληθεύει και η $P(k+1)$

Απόδειξη
Βήμα 1° Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=1$, δηλ
$(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x \Rightarrow$ ισχύει καθώς είναι
$1+x = x+1$
Βήμα 2° Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k \in \mathbb{N}$, δηλ
$(1+x)^k \geq 1+kx$, $\forall x \geq -1$
Βήμα 3° Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει για $n=k+1$, δηλ
$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, $x \geq -1$

Πράγμα:
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$
όμως $(1+x)^k \geq 1+kx$ και $1+x \geq 0$ $\Longrightarrow$ $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$
$= 1+x+kx+kx^2$
$= 1+(1+k)x+kx$
$\geq 1+(k+1)x$

(2)

(9) Άλλη ιδέα για τις δύο τις ασκήσεις

Διωνυμικό Newton

$(a+\beta)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} a^{\kappa} \beta^{\nu-\kappa}$ $\quad \nu \in \mathbb{N}$

Θεώρημα

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο το $\sup A$ είναι ο αριθμός

i) $\forall\, a \in A,\ a \leq \sup A$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \beta \in A,\ \sup A - \varepsilon < \beta$

Θεώρημα

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο, $\exists\ \inf B$

i) $\inf B \leq \beta,\ \forall\, \beta \in B$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \beta' \in B,\ \beta' < \inf B + \varepsilon$

Άσκηση

Έστω $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο. Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

Απόδειξη

Επειδή $\emptyset, A, B$ είναι άνω φραγμένα, $\exists\ \sup A, \sup B$ και ισχύει

$\forall\, a \in A,\ a \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\forall\, \beta \in B,\ \beta \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$

$\Downarrow$

$\forall\, x \in A \cup B,\ x \leq \max(\sup A, \sup B)$

Υποθέτουμε ότι $\sup A \geq \sup B$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a' \in A:\ \sup A - \varepsilon < a'$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a' \in A \cup B:\ \sup A - \varepsilon < a' \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A \cup B) = \sup A$

Θεώρημα

Η εξίσωση $x^2=2$ έχει θετική λύση

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο $A=\{x>0 \mid x^2<2\}$

τότε $1\in A\neq\emptyset$

Το 2 είναι άνω φράγμα για το A, δηλ.:

$\forall x\in A \Rightarrow x\leq 2$

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

$\exists x\in A,\ x>2 \Rightarrow x>0 \Big| \Rightarrow x^2>4>2$ ΑΤΟΠΟ

Οπότε από το Αξίωμα της Πληρότητας, το A έχει supremum (supA)

Θα αποδείξουμε ότι $(\sup A)^2=2$

Έστω ότι $(\sup A)^2\neq 2$

Τότε είτε $(\sup A)^2>0$ (1)

είτε $(\sup A)^2<0$ (2)

(1) "$\forall\varepsilon$" $\sup A$

↑

άνω φράγμα του A?

$\sup A-\varepsilon$ άνω φράγμα του A

$(\sup A-\varepsilon)^2>2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2-2\varepsilon\sup A+\varepsilon^2>2$

Αρκεί να βρω $\varepsilon>0$, ώστε:

$(\sup A)^2-2\varepsilon\sup A>2 \Rightarrow$

$(\sup A)^2-2>2\varepsilon\sup A \Leftrightarrow \dfrac{(\sup A)^2-2}{2\sup A}>\varepsilon>0$

ΑΝΤΙΘΑΣΗ

(7)
11

(7) Αν $(\sup A)^2 < 2$

Θα βρούμε $\varepsilon > 0$, ώστε

$(\sup A + \varepsilon)^2 < 2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 < 2$

$(\sup A)^2 + 2\varepsilon \sup A + \varepsilon < 2$

$$0 < \varepsilon < \frac{2 - (\sup A)^2}{1 + 2\sup A}$$

ΑΝΤΙΘΑΣΗ

Λημμα

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός στο $(1, 2)$

ii) Αποδείξτε ότι αν $0 < \beta \Rightarrow$ ∃ φυσικός στο $(0, \beta)$

Απόδειξη

i) $\beta - \alpha > 1 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}$

$0 < \beta - \alpha < 1$

$\eta(\beta - \alpha) > 1 \quad [\eta\alpha, \eta\beta] \quad \eta \in \mathbb{N}$

$$\alpha < \frac{\eta}{\eta} < \beta$$

$[x] = \sup\{\eta \in \mathbb{N},\ \eta \leq x\}$

Πέμπτη 2 Οκτωβρίου 2014
Ανάλυση Ι

Θεώρημα 1
Αν $a<b$, τότε το διάστημα $[a,b]$ υπάρχει ρητό q, δηλ. $\exists\, w\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$ ώστε $a \le \frac{w}{n} \le b$

Θεώρημα 2
Αν $a<b$, τότε το διάστημα $[a,b]$ υπάρχει οποιοσδήποτε, δηλ. $k\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ώστε $a \le k \le b$

Αν $x\in\mathbb{R}$, ακέραιο μέρος του $[x]$
$[x] :=_{(def)} \sup\{y\in\mathbb{Z} \mid y \le x\}$.

? $\exists\, -w\in\mathbb{Z}, w\in\mathbb{N}$ $-w \le x = 1 - x \le w$ (τελικά υπάρχει)
Το x είναι απο κάτω.

$\sup A \notin \mathbb{Z}$
$\sup A \le x$
$\sup A - 1 < \sup A$
$\Rightarrow \exists\, y\in A$ ώστε $\sup A - 1 < y$
$\Rightarrow \sup A \in \mathbb{Z}$ $\sup A < y + 1$

Εδώ είμαστε

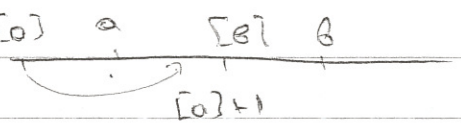


$[x] \le x < [x]+1$

H.W Δοκιμάστε: α) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $[x+y] \ge [x] + [y]$
β) $y\in\mathbb{Z}$ $[x+y] = [x] + y$

(2)
(18)

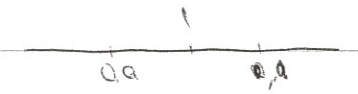
Αν $0<\beta$ έχουμε: κάθε ανοίγουν $\quad \exists \in [\alpha,\beta]$
υπάρχει $\exists$ αν $\beta-\alpha \geq 1$, βρείτε και.



$[\beta] \in [\alpha,\beta]$

Αν $\beta-\alpha < 1$

$[\beta] = [\alpha]+1$



Απόδειξη

Έστω ότι τους έχω βρει

$$\alpha \leq \frac{\nu}{\nu} \leq \beta \Leftrightarrow \nu\alpha \leq \nu \leq \nu\beta.$$

Αν $\nu\beta - \nu\alpha \geq 1 \Leftrightarrow \nu(\beta-\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow \boxed{\nu \geq \frac{1}{\beta-\alpha}}$

$$\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right] \leq \frac{1}{\beta-\alpha} < \left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right]+1 = \nu$$

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Επιλέγω $\nu = \left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right]+1 \in \mathbb{N}$, διότι $\beta-\alpha \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta-\alpha} > 0$

Τότε $\frac{1}{\beta-\alpha} < \nu \Leftrightarrow \nu(\beta-\alpha) > 1 \Leftrightarrow \nu\beta - \nu\alpha > 1$

Εφαρμόζω το διάστημα $[\nu\alpha, \nu\beta]$ μπορεί να βρω ακέραιο για παράδειγμα επιλέγω $\mu = [\nu\alpha]+1$.

Τότε $\nu\alpha \leq \mu \leq \nu\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \boxed{\frac{\mu}{\nu}} \leq \beta$

οπότε ο $q = \frac{\mu}{\nu} = \frac{[\alpha + \alpha[\frac{1}{\beta-\alpha}]+1}{[\frac{1}{\beta-\alpha}]+1}$

Ερώτημα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Έστω ότι $x \in \mathbb{Q}$, $\exists\, \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, $(\kappa, \lambda) = 1$ $\quad x = \frac{\kappa}{\lambda}$
και επομένως $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 = 2 \Rightarrow \kappa^2 = 2\lambda^2$

Αν κ είναι περιττός, δηλ $\kappa = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$
$\kappa^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$ περιττός.
$\Rightarrow \kappa$ άρτιος $\kappa = 2\kappa_1$, $\kappa_1 \in \mathbb{N}$
$4\kappa_1^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 2\kappa_1^2$
Για τον ίδιο λόγο $\Rightarrow$ λ άρτιος, δηλ $\lambda = 2\lambda_1$, $\kappa_1, \lambda_1 \in \mathbb{N}$
$\kappa = 2\kappa_1$
$2 \mid (\kappa, \lambda)$
ΑΤΟΠΟ

Απόδειξη Θεωρήματος 2
Για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοιο
$\alpha \le \frac{\kappa}{\lambda} \sqrt{2} \le \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \le \frac{\kappa}{\lambda} \le \frac{\beta}{\sqrt{2}}$ (1)

Δηλ θέλουμε $\exists\, q = \frac{\kappa}{\lambda}$ που ικανοποιεί την (1)

ΗΜ Λήμμα
Για $\alpha < \beta$ βρείτε $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοια
$\alpha \le \frac{\kappa}{\lambda} + \sqrt{2} \le \beta$

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$, άνω φραγμένο
$\exists \sup A \in \mathbb{R}$

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x,\ x^2 < 2\}$ $\quad \sup A = \sqrt{2}$

4)
(20)

Ακολουθίες

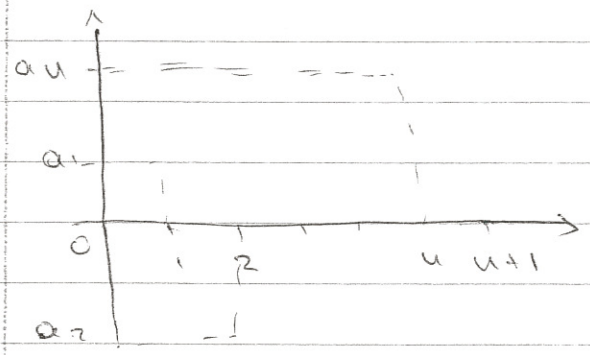
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) =$ $\quad n\in\mathbb{N}$

$\xi_n -$

Γραφική Παράσταση

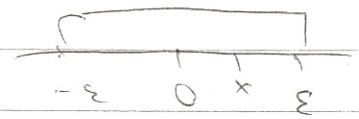


Πότε η a_n σύγκλινει;
είναι σύγκλινουσα ακολουθία

Αν $\exists \ell\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\quad a_n \longrightarrow \ell$ $n\to\infty$

Ορισμός $\lim a_n = \ell$ όταν
$\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, ώστε
$|a_n - \ell| < \varepsilon$, $n \geq n_0$

$|x| < \varepsilon \ (\Leftrightarrow) \ -\varepsilon < x < \varepsilon$

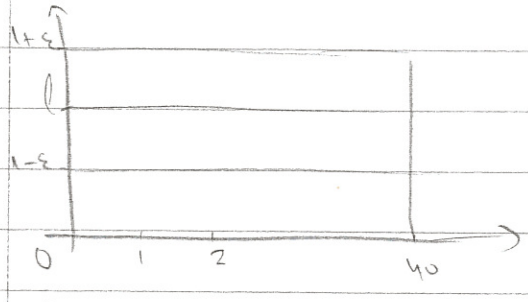


Τρ. ανισοτήτων
$|x+y| \leq |x| + |y|$

$|a_n - \ell| < \varepsilon \ (\Leftrightarrow)$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ $\quad -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$, $n \geq n_0$

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, $n \geq n_0$



$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - 0| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

$1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \quad \frac{1}{\varepsilon} \quad \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

Επιλέγουμε $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Τότε αν $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ αν $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$

Τρίτη 7 Οκτωβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Ακολουθίες (Πραγματικών) Αριθμών

Ερώτημα

Μπορεί μια ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά (διαισθητικά) όρια;

Δηλ. ∃ a, a', $a \neq a'$, ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ (I)

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a'$ (II)

Απόδειξη

Έστω ότι είναι δυνατόν, δηλαδή έχουμε (I), (II)

Από τον ορισμό έχουμε ότι:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)$:

$|a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq n_1$

Επίσης

$\forall \varepsilon' > 0$, $\exists n_2 = n_2(\varepsilon') \in \mathbb{N}$

$|a_n - a'| < \varepsilon'$, $n \geq n_2$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{|a-a'|}{2}$

Τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$

$|a_n - a| < \frac{|a-a'|}{2}$, $n \geq n_1 \Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2) = n_0$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$

$|a_n - a'| < \frac{|a-a'|}{2}$, $n \geq n_2 \Rightarrow n \geq \max(n_1, n_2) = n_0$

Τότε όμως: $|a-a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a| < \frac{|a-a'|}{2} + \frac{|a-a'|}{2}$, $n \geq n_0$

$|a-a'| < \frac{|a-a'|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a-a'| < 0$ ΑΔΥΝΑΤΟ

(2)
(23)

Παρατήρηση

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε η ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Από τον ορισμό $\exists a\in\mathbb{N}$, ώστε $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$:

$$|a_n-a|<\varepsilon,\ n\geq n_0$$

Επιλέγουμε $\varepsilon=1$, τότε

$$a-1<a_n<a+1,\ n\geq n_0 \quad a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1}$$

Τότε

$$\min(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a-1)\leq a_n\leq \max(a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1},a+1) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(Γ) Ακολουθία φραγμένη $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\exists m\leq M$ ώστε $-\max(|m|,|M|)\leq m\leq a_n\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(Π) Ακολουθία φραγμένη ($|a_n|$ φραγμένη) $\exists M'>0$

$$|a_n|\leq M',\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$-M\leq a_n\leq M$$

Θεώρημα

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας? Μπορούμε να υποθέσουμε ότι a_n είναι αύξουσα

Ορίζουμε το σύνολο:

$$A=\{a_n/n\in\mathbb{N}\}$$

$$a_n\in A \Rightarrow A\neq\emptyset$$

Επειδή η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη, $\exists M\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ το M είναι άνω φράγμα για το A ($a_n\leq M$)

Άρα επειδή ισχύει η πρόταση του αξιώματος της πληρότητας θα $\exists \sup A=a$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim a_n=a$ ($n\to\infty$)

(Από τον ορισμό του supremum)

(i) $a_n \le 0$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ ώστε ~~$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le 0$~~ $n \ge n_0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a - \varepsilon < a_n \le a < a + \varepsilon} \qquad n \ge n_0$$

ή

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad n \ge n_0$$

(Αποδείξατε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$)

Άλγεβρα Συγκλινουσων Ακολουθιων

Πρόταση

Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Τότε:

i) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει
$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει
$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$

Πρόχειρο

$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)$:
$|a_n - a| < \varepsilon/2$, $n \ge n_1 \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$
$\lim b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)$:
$|b_n - b| < \varepsilon/2$, $n \ge n_2 \ge n_0$

i) Για $\varepsilon > 0$, $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$$
$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad n \ge n_0$$

4)
25)

Πρόχειρο

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| =$

$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$

$\le M|b_n - b| + |b||a_n - a|$

Πρόταση

1) $a_n \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ $\quad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $|b_n| \le M$ $\Rightarrow \lim_{n\to a} (a_n \cdot b_n) = 0$

Πέμπτη 8 Οκτωβρίου 2015.
Ανάλυση Ι

Απόδειξη για είκοσι μόνο τον σπίτι

i) Αν $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = b$ τότε $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα, απλούστερα $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

Απόδειξη

Έστω $b \neq 0$

Έχουμε ότι η a_n είναι συγκλίνουσα, άρα είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0$
$|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή $\lim a_n = a$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

Αντίστοιχα επειδή $\lim b_n = b$, $\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad n \geq n_2$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε για $n \geq n_0$.
$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$
$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

(Οπότε η $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα και $\lim(a_n b_n) = ab$

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ φορές}}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \lim\left(\frac{1}{n} n\right)$$

Παράδειγμα

Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία, μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Θα αποδείξουμε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (=)$$

για όλα τα n με επαγωγή.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$(=) \quad \boxed{\frac{n}{n+1} \le \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}$$

Μέσω Bernoulli?

$$(1+x)^n \ge 1+nx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad x\ge -1.$$

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1+x \quad (=) \quad x = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$x = -\frac{1}{(n+1)^2} \ge -1 \quad (=) \quad \frac{1}{(n+1)^2} \le 1 \quad (=) \quad (n+1)^2 \ge 1$$

Οπότε $(1+x)^n \ge 1+(n+1)x = 1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \ge 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Επομένως $a_n \ge a_n = 0$

Ιδιότητες συγκλίνουσων

α) Εαν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, & b_n φραγμένη τότε $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και ισχύει $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$

β) Εστω a_n, b_n συγκλίνουσες ακολουθίες και επιπρόσθετα ικανοποιούν:
$a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \dots$ Τότε $\lim a_n \le \lim b_n$

γ) (Κριτήριο Σαντουίτς) Εστω $(a_n), (b_n), (y_n)$
Τέτοιες ώστε $a_n \le b_n \le y_n$, $n \in \mathbb{N}$
Όταν επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι $\lim a_n = a$
$\lim y_n = a$
Τότε η b_n είναι συγκλίνουσα και ισχύει $\lim b_n = a$

Απόδειξη

α) Εστω $M > 0$ / $|b_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, θα υπάρχει $n_1(\varepsilon)$: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, $n \ge n_1$

Τότε για $n \ge n_1$ έχουμε
$|a_n b_n| \le |a_n| M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$, $n \ge n_1$

Ορισμός

Πότε λέμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\lim a_n = \infty$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$
$|a_n - a| < \varepsilon$, $n \ge n_0$

$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}.$

$a_\nu > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \nu \geq \nu_0$

$\lim_{\nu \to \infty} b_\nu = -\infty$

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$

$b_\nu < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad \nu \geq \nu_0$

(Αν $b_\nu \to -\infty$ $a_\nu \leq b_\nu \Rightarrow \lim a_\nu = 0$)

Πρόταση

Αν $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = +\infty$, $b_\nu \geq a_\nu \Rightarrow \lim b_\nu = +\infty$

Υπακολουθίες ακολουθιών

$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$

$a_2, a_4, a_5, a_6, \ldots$

υπακολουθία μιας αρχικής

a_{k_ν} $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_\nu < \ldots$

Πρόταση

Κάθε ακολουθία συγκλίνει, αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία αυτής συγκλίνει

Απόδειξη

$\Rightarrow$ Έστω $\lim a_\nu = a$ και a_{k_ν} μια τυχαία υπακολουθία

Να αποδείξουμε ότι και αυτή συγκλίνει και έχουμε $\lim_{\nu \to \infty} a_{k_\nu} = a$

Επειδή $\lim a_\nu = a$, έχουμε

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$|a_\nu - a| < \varepsilon, \; \forall \nu \geq \nu_0$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\exists\, k_{n_1} \geq n_0$

οπότε $k_n \geq n_0$, $\forall\, n \geq n_1$

και επομένως αν ικανοποιεί

$|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, $n \geq n_1$

$\Rightarrow$ a_{k_n} συγκλίνουσα με $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$

SOS Για να μη συγκλίνει η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αρκεί να πάρουμε δύο υποακολουθίες που να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια

$(a_n) = (-1)^n$ είναι μη συγκλίνουσα ακολουθία, διότι

$a_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$a_{2n-1} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$ $\neq$

Λήμμα

Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:

a_{2n} συγκλίνει

a_{2n-1} συγκλίνει

a_{3n} συγκλίνει.

Τότε η a_n είναι συγκλίνουσα ακολουθία

Λήμμα

Αποδείξτε ότι η $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία

Τρίτη 1/10 Οκτωβρίου 2019
Ανάλυση Ι

Παράδειγμα Η ακολουθία $(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$ είναι μη συγκλίνουσα ακολουθία

Απόδειξη Οι υπακολουθίες $a_{2n}=2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_{2n-1}=-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$

$\Rightarrow$ Η a_n δεν συγκλίνει

Λήμμα
Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n\in\mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Πόλος τέχνης

$$y_n \le a_n \le z_n$$

$$\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ φορές}} \le a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \le \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{n+1}$$

$\downarrow$ $\lim 2$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\lim 1$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > x_1$ (Αποδείξτε ότι $x_n \uparrow$)

Η x_n είναι άνω φραγμένη, $x_n \le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Θεώρημα (Bolzano - Weierstrass)
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
(Αν a_n φραγμένη, $\Rightarrow \exists$ a_{k_n} συγκλίνουσα)

Πρόταση Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία

Απόδειξη
Έστω $(a_n)\in\mathbb{N}$ φραγμένη ακολουθία. Ο όρος a_{n_0} είναι κορυφή όταν $a_n \le a_{n_0}$, $n \ge n_0$

2)
36)

Έστω $A = \{a_n / a_n \text{ είναι κορυφή}\} \subseteq \mathbb{N}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

α) Α κάτω φραγμένο $A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$

Τότε $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots \geq a_{n_k} \geq \dots$

β) Α έχει πεπερασμένα (πλήθος στοιχείων), δηλ.

$A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_l}\}$ ΡΕΠΝΣ.

Θα ισχύει τότε μονοτονία για είναι αξιόμα

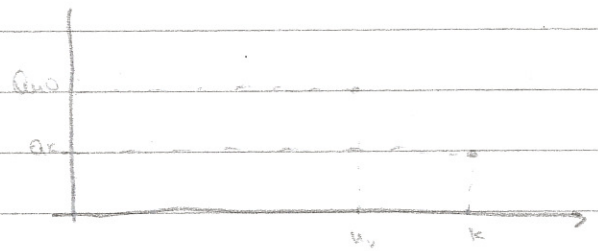
$a_{n_{l+1}}$

Αφού το $a_{n_{l+1}}$ δεν είναι κορυφή $\exists\, n_{l+2} > n_{l+1}$ τότε $a_{n_{l+2}} > a_{n_{l+1}}$

Γιατί ο $a_{n_{l+2}}$ δεν είναι κορυφή αφού $\exists\, n_{l+3} > n_{l+2}$ ώστε $a_{n_{l+3}} > a_{n_{l+2}}$ κλπ

Άρα βρίσκω μονοτονία a_{n_k} ώστε $a_{n_{k+1}} \uparrow$

Σε κάθε περίπτωση (ανάλογα αν το Α είχε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή όχι) βρίσκω μονότονη μονοτονία



$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$m \leq a_{n_k} \leq M$

Ακολουθίες Cauchy

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy όταν

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$, ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $n, m \geq n_0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (σύγκλιση)

Όπως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σύγκλιση, ΧΩΡΙΣ να γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας

Θεώρημα

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τότε είναι ακολουθία Cauchy και αντίστροφα (αν είναι ακολουθία Cauchy τότε συγκλίνει)

Πρόβλημα

Η ακολουθία $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$

$1 < 1 + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \dots$

Έστω ότι η x_n συγκλίνει. Επομένως είναι ακολουθία Cauchy. Όπως

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε $|x_n - x_m| < \varepsilon$, $n, m \geq n_0$.

Χωρίς βλάβη μπορώ $m \geq n \geq n_0$

Τότε θα είχαμε

$$\left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| -\left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \forall m > n \geq n_0$$

Επιλέγω $m = 2n$ τότε θα είχαμε

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

ΑΔΥΝΑΤΟ για $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

Πέμπτη 16 Οκτωβρίου 2014
Ανάλυση Ι

Ακολουθία Cauchy

Μια ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο
$|a_n-a_m|<\varepsilon, \quad n,m\geq n_0$

Θεώρημα

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) (Αν (a_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow$ Μια ακολουθία Cauchy)
Επειδή αν είναι συγκλίνουσα $\exists a\in\mathbb{R}$, $\lim a_n=a$
$\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon)$:
$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n\geq n_0$$
Τότε όμως $n,m\geq n_0$ έχουμε
$$|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\leq|a_n-a|+|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Leftarrow$) (Αν (a_n) ακολουθία Cauchy $\Rightarrow$ Μια συγκλίνουσα)
Επειδή είναι ακολουθία Cauchy,
$\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο
$$|a_n-a_m|<\varepsilon, \quad n,m\geq n_0 \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η a_n είναι φραγμένη
Από την (1) για $\varepsilon=1$, $\exists n_1$:
$|a_n-a_m|<1, \quad n,m\geq n_1$
$\Rightarrow |a_n-a_{n_1}|<1, \quad n\geq n_1 \Rightarrow$
$|a_n|-|a_{n_1}|\leq|a_n-a_{n_1}|<1$.
$\Rightarrow |a_n|\leq 1+|a_{n_1}| \quad n\geq n_1$

Επομένως $|a_n| \le M = \max(1+|a_{n_1}|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1-1}|)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Επειδή η a_n είναι υπάρχουσα από το Θ Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία έστω $a_{n_k} \to a$, $k \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \ge k_1 \quad (1)$$

Επίσης $N_0 = \max(n_0, n_{k_1})$, τότε για $n, n_k \ge N_0$, και επομένως, επιλέγουμε $n = n_k$, έτσι ώστε

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \ge N_0, \quad k \ge k_1$$

Τότε $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$, $n \ge N_0$

Λήμμα

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A$, έτσι ώστε $\sup A - \frac{1}{n} < a_n \le \sup A$, $\forall n \in \mathbb{N}$

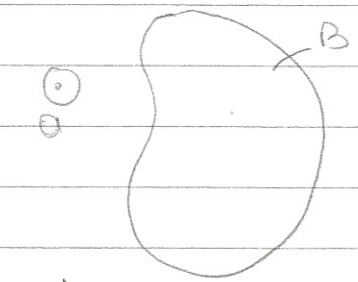
Απόδειξη

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ έτσι ώστε $\sup A - \varepsilon < a \le \sup A$.

Επιλέγουμε

$\varepsilon = \frac{1}{n}$, τότε $\exists a_n \in A$, $\sup A - \frac{1}{n} < a_n \le \sup A$

α) Εσωτερικό σημείο A



$A = B \cup \{a\}$

Το σημείο a είναι εσωτερικό σημείο για το A όταν $\exists \varepsilon > 0 : (A - \{a\}) \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \varnothing$

Εφαπτόμενο

Όταν a είναι σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A

Το α είναι σημείο συσσώρευσης του Α όταν $\forall \varepsilon > 0$, $(A - \{a\}) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \emptyset$.

Πρόταση

Το α είναι σημείο συσσώρευσης του Α, αν υπάρχει ακολουθία $a_n \in A - \{a\}$ ώστε $\lim a_n = a$.

$\varepsilon = \frac{1}{n}$, τότε $\exists\, a_n \in A - \{a\}$ $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a + \frac{1}{n}$.

Ο διάστημα $(0,1)$ $\frac{1}{2^n} \to 0$

$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Το 0 είναι σ.σ A

Αν χ.σ.σ. $\exists\, a_n \in A$ $a_n \to x$

αν είναι ακολουθία του $\frac{1}{n}$ και επομένως $\lim a_n = 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, υποσύνολα

$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\{a_k \mid k \geq n\}$

$\{a_k \mid k \geq n+1\}$

$L_n \leq U_n$

$U_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

$L_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$.

$\{a_k \mid k \geq n\} \supseteq \{a_k \mid k \geq n+1\}$

$\Rightarrow \sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{a_k \mid k \geq n+1\}$

$A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

$\sup A \geq \inf B$

$U_n \geq U_{n+1}$

$L_n \leq L_{n+1}$.

$L_n \leq L_{n+1} \leq U_{n+1} \leq U_n$

$L_n \uparrow$, $U_n \downarrow$

$\Rightarrow$

(4)
(44)

$\Rightarrow \lim v_n := \lim_{k\to\infty} \sup a_k$ & $\lim_{k\to\infty} a_k \le \overline{\lim} a_k$

$\lim_{k\to\infty} a_k$

$\lim l_n := \lim_{k\to\infty} \inf a_k$

$\lim_{k\to\infty} a_k$

Πρόταση

Αν a_n συγκλίνουσα υποακολουθία τότε

$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

Απόδειξη

$v_n = \sup\{a_k / k \ge n\}$

$\Rightarrow a_n \le v_n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m \ge n \quad v_n - \varepsilon < a_m \le v_n$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists m_2 \ge n$ ώστε Έτσι έχουμε

$v_n - \frac{1}{n} < a_{m_2} \le v_n$

οπότε $a_{n_k} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow$ έχω $l_n \le a_n \le v_n$

Έχουμε $l_{n_k} \le a_{n_k} \le v_{n_k}$

$\lim_{k\to\infty} l_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} v_{n_k}$

Πρόταση

Έστω ότι συγκλίνει. Υπάρχει υποακολουθία a_{n_k} ώστε

$\lim_{n\to\infty} a_n - \frac{1}{k} \le a_{n_k} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \quad k \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

Έστω ότι $\overline{\lim_{n\to\infty}} v_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\forall \varepsilon > 0$

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$v_n - \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow v_n < \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \varepsilon \quad n \geq n_0$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow \exists n_k \; v_{n_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \quad (1)$

Είναι γνωστό ότι έχουμε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$

$$v_n - \varepsilon < a_m \leq v_n$$

επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists m_n$

$$v_n - \frac{1}{n} < a_{m_n} \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Επομένως

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n - \frac{1}{k} < a_{m_k} < \frac{1}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

Άσκηση

Έστω a_n φραγμένη. Η a_n συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

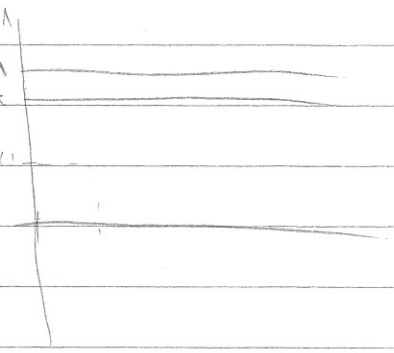
Τρίτη 21 Οκτωβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Βασικός Χαρακτηρισμός $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$

Βασική Ιδιότητα

$\forall \xi, \ \xi = L_n < V_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}$



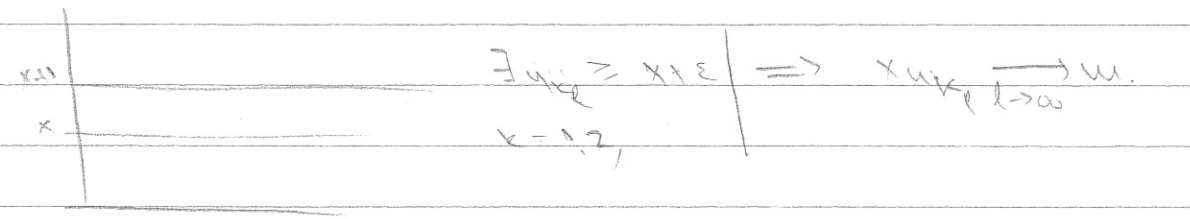
$\lim_{n\to\infty} x_n \leftarrow L_n \leq V_n \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

Πρόταση Αν x_{n_k} συγκλίνει, τότε

$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to a} x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

Πρόταση Έστω x_n φραγμένη. Η x_n συγκλίνει αν και μόνο αν $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$



$\Rightarrow \overline{\lim} x_n \geq w \qquad w \geq x+\varepsilon$

$x \geq w \geq x+\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

Ιδιότητες

- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

  $x_n < x+\varepsilon, \quad n \geq n_0$

- Η υποσειρά $x - \underbrace{\varepsilon}_{\frac{1}{k}} < x_{n_k} < x + \underbrace{\varepsilon}_{\frac{1}{k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = y$

$\lim_{n\to\infty} x_n = y$

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

$y - \varepsilon < x_n$, $\forall n \geq n_0$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ τουλάχιστον ένας x_m ώστε

$y - \varepsilon < x_m < y + \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$

ή $y - \frac{1}{m} < x_m < y + \frac{1}{m}$ $\quad m = 1, 2, \ldots$

Λοιπόν

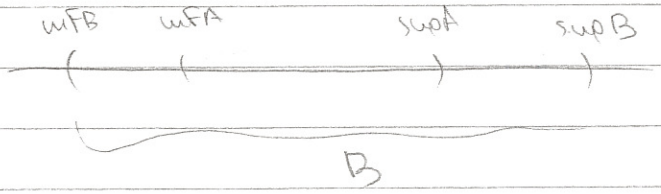
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες για τις οποίες

$x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq$?ΟΚΔ$)$

Τότε

i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$



i) Θα χρησιμοποιήσουμε την

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

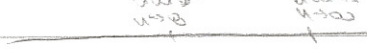
$A \subseteq B$

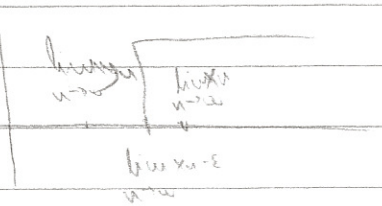
$\sup A \leq \sup B$

$\inf A \geq \inf B$

Έστω ότι $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n > \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

ΣΧΕΔΙΟ





$\exists n_0$ ώστε

$y_n \geq x_n \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon$, $n \geq n_0$

$\forall \varepsilon > 0$

$y_n \geq a - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$, επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, έχουμε

$\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $x_n \geq x-\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Όμως $y_n \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε $y_n \geq x-\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Έστω y_{n_k} υποακολουθία της y_n τ.ω.τ.

$$y_{n_k} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\Rightarrow y_{n_k} \geq a-\varepsilon$ $\forall k \geq k_0$ $\boxed{n_{k_0} \geq n_0}$

Διότι οδηγεί σε $\lim_{n\to\infty} y_n \geq x-\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} y_n \geq \lim_{n\to\infty} x_n$ ΑΤΟΠΟ

$A \geq B-\varepsilon$
$\forall \varepsilon>0$
$\Downarrow$
$\boxed{A \geq B}$

Λήμμα

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία, για την οποία ισχύει

$2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι $\exists \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})$ και μάλιστα $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$.

Απόδειξη λήμμα

Έστω $y_n = x_n - x_{n+1}$, $n \geq 2$

$2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1} \Longleftrightarrow \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{y_n} \leq \underbrace{x_{n+1} - x_n}_{y_{n+1}}$

$\Rightarrow y_n \uparrow$

Η y_n είναι επίσης φραγμένη, διότι αν $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $|y_n| = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n| + |x_{n-1}| < M + M = 2M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

οπότε η y_n συγκλίνει και επομένως υπάρχει το ορ

4)
49

$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = l$

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Έστω ότι $l \neq 0$

i) Έστω ότι $l > 0$ ($\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = l$)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$|x_n - x_{n-1} - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$-\varepsilon < x_n - x_{n-1} - l < \varepsilon$, $n \geq n_0$

$l - \varepsilon < x_n - x_{n-1} < l + \varepsilon$, $n \geq n_0$

$l - \varepsilon < x_{n+1} - x_n < l + \varepsilon$

$l - \varepsilon < x_{n+2} - x_{n+1} < l + \varepsilon$

$\vdots$

$l - \varepsilon < x_{n+k} - x_{n+k-1} < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$k(l-\varepsilon) < (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \dots + (x_{n+k} - x_{n+k-1}) < k(l+\varepsilon)$

$k(l-\varepsilon) < x_{n+k} - x_{n_0} < k(l+\varepsilon)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

i) $l > 0$. Επιλέγω $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, τότε $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε

$k\frac{l}{2} < x_{n_0+k} - x_{n_0-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ΑΤΟΠΟ (x_n φραγμένη)

ii) $l < 0$, $\varepsilon = -\frac{l}{2} > 0$ $x_{n_0+k} - x_{n_0-1} < k\frac{l}{2} < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Άσκηση

$\exists \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = l$

Η x_n φραγμένη

Από Bolzano-W. $\Rightarrow \exists$ _____ $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lim_{n\to\infty}$

Τότε $2x_{n_k} \leq x_{n_k-1} + x_{n_k+1}$

Επειδή x_{n_k-1} είναι γνησίως, η ακολουθία είναι

$x_{n_{k_l}-1} \longrightarrow \sigma \quad l \to +\infty$

$2x_{n_{k_l}} \leq x_{n_{k_l}-1} + x_{n_{k_l}+1}$

Τελικά καταλήγουμε σε υποδύο ακολουθίες

$2x_{n_{k_{l_m}}} \leq x_{n_{k_{l_m}}-1} + x_{n_{k_{l_m}}+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, όπου και οι δύο συγκλίνουν.

Παίρνουμε το lim άρα

$$2\lim_{n\to\infty} x_n \leq \sigma + \tau \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} x_n$$

Μπορεί $\sigma < \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$\Longrightarrow \sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n_k} \longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \\ x_{n_k-1} \longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \end{array}\right| \Rightarrow x_{n_k} - x_{n_k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$

Άσκηση

Έστω $x_n > 0$.

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n$ και είναι $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Πέμπτη 23 Οκτωβρίου 2014

Ανάλυση Ι

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ $\quad a_n < a + \varepsilon$, $n \geq n_0$

ii) Υπάρχει υπακολουθία τέτοια ώστε $a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Λήμμα

Έστω $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.

Τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Απόδειξη

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$, τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+1}{2} < 1, \quad \forall n \geq n_1$$

Οπότε $0 < \frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} < \frac{l+1}{2} = \omega < 1$

$$0 < \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} < \omega$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$0 < \frac{a_{n_1+k}}{a_{n_1+k-1}} < \omega \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Πολλαπλασιάζοντας $\frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} \cdots \frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+1}} \cdots \frac{a_{n_1+k}}{a_{n_1+k-1}} < \omega^k$

$$\frac{a_{n_1+k}}{a_{n_1}} < \omega^k$$

$0 < a_{n+k} < a_n (\tfrac{1}{2})^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad |q| < \frac{1}{2}$

Από το Κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, επειδή $|q|<1$

Άσκηση Αν $|q|<1$

$\Rightarrow q \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\lim a_n = 0$

$\lim |a_n| = 0$

$\beta_n = |q|^n \to 0$

$\beta_{n+1} = \beta_n |q|$

$l = l|q| = l|\cdot|q| \geq 0$

Σειρά Πραγματικών Αριθμών

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

Αθροίζουμε τους όρους μιας ακολουθίας με συγκεκριμένο τρόπο.

→ Ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Τότε λέμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει ή $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$

Ορισμός

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, εδιώτερα.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \boxed{\text{όπου}} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = A$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = A$$

Παράδειγμα 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Απόδειξη $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l(l+1)}$

$\left|\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array}\right| \Rightarrow$

$A=1,\ B=-1$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots +$

$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

οπότε $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ οπότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Παράδειγμα 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a w^n = a \sum_{n=0}^{\infty} w^n \qquad |w| < 1$$

$$= a \frac{1}{1-w}$$

Απόδειξη

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot w^k = a + aw + aw^2 + \dots + aw^n$

$= a(1 + w + \dots + w^n) \qquad w \neq 1$

Ταυτότητα

$w^{n+1} - 1 \quad A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + \dots + AB^{n-1} + B^n)$

$= A^{2n-1} + B^{2n-1} = (A+B)(A^{2n-2} - A^{2n-3}B + \dots + B^{2n-2})$

$w^{n+1} - 1 = (w-1)(w^n + \dots + 1)$

$= a(1 + w + \dots + w^n)\left(\frac{1-w}{1-w}\right) = a \frac{1-w^{n+1}}{1-w}$

$S_n = a \frac{(1-w^{n+1})}{1-w} = \frac{a}{1-w} - a \frac{w^{n+1}}{1-w}$

Αν $|w| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-w} - a \frac{w^{n+1}}{1-w}\right) = \frac{a}{1-w}$

Δ)
58

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Αν $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ φορές}} = n$$

Απόδειξη

Επειδή η σειρά συγκλίνει, η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} S_n = A$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$$

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

Όμως επειδή $\lim_{n\to\infty} S_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A$

και η a_n (ως διαφορά συγκλινουσών) συγκλίνει και επιπρόσθετα $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A - A = 0$

Άθροισμα Συγκλινουσών Σειρών

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει & $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε

$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ συγκλίνει επίσης. Μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Απόδειξη

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

$$\tilde{\tilde{S}}_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k = \lambda S_n + \mu \tilde{S}_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\tilde{S}}_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n + \mu \tilde{S}_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Σειρές με όρους μη αρνητικούς

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad a_n \geq 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \quad \Rightarrow S_n \uparrow$

Πρόταση

Αν $a_n \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_n είναι άνω φραγμένη

$S_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq M \right)$

Πέμπτη 30 Οκτωβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Ως/Δ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη

$3a_n \le 2a_{n-1} + a_{n+1}$, $n = 2,3,\dots$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$

$a_{n+1} - a_n \ge 2(a_n - a_{n-1})$ $n=2,3,\dots$

b_{n+1} b_n

$b_{n+1} \ge 2b_n$, $n=2,3,\dots$ b_n φραγμένη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $b_{n_0} > 0$

ii) $b_n \le 0$, $\forall n \ge 2$

i) $\Rightarrow b_{n_0+k} \ge 2^k b_{n_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, ΑΤΟΠΟ

ii) $b_n \le 0$ $a_n - a_{n-1} \le 0$ $\forall n=2$, $a_n \le a_{n-1} \Rightarrow$

Κριτήριο Cauchy (Για ακολουθίες)

Έστω $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Η b_n συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$, $n,m \ge n_0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |b_n - b| < \varepsilon$, $n \ge n_0$

Κριτήριο Cauchy για σειρές

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η S_n είναι ακολουθία Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$|S_n - S_m| < \varepsilon$, $n,m \ge n_0$

$m > n \ge n_0$

2)
(62)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k\right)\right| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$

Εφαρμογές

1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει $(+\infty)$

Απόδειξη Με απαγωγή σε άτοπο.
Έστω ότι συγκλίνει, από το κριτήριο Cauchy η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ είναι ακολουθία Cauchy, δηλ.

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1}{3}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m}\right| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

Επιλέγουμε $m = 2(n+1)$
Τότε θα έπρεπε

$$\frac{1}{2} < \frac{n+2}{2(n+1)} < \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}\right| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$2(n+1) - n = n+2$ Έχω τόσους όρους

$\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ ΑΤΟΠΟ.

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Θα αποδείξαμε το αντίστροφο από το κριτήριο Cauchy
Θα πρέπει επομένως για $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

Δεν μπορούμε να επιλέξουμε τη ακολουθία γιατί τη χρησιμοποιούμε σε μια απόδειξη που πρέπει να αποδείξουμε.
Την οποία υιοθετούμε

Αρκεί

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \boxed{\frac{2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} < \varepsilon}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \frac{2}{n} \Rightarrow -2\ln n < \ln c + n \ln n \Rightarrow$$

$$n \le \frac{2}{-\ln n}(\ln n) + \frac{\ln c}{-\ln n} \qquad -2\ln n \le \ln c + n\ln n$$

$$-2\ln n \le \ln c + n\ln n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$$\frac{1+n}{n(n+1)} - n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \quad \text{οπότε.}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right] < \frac{2}{n+1} < 2.$$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

οπότε επιλέγουμε $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$

Τότε για $n \ge n_0 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon, \; n \ge n_0$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

$a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Πρόταση

Αν $a_n \geq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\exists M > 0$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Κριτήριο (Σύγκρισης)

Έστω $a_n, b_n \geq 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

i) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty$ και επιπρόσθετα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης.

Αν $a_n \leq M b_n$, $\forall n \geq n_0$

η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

Απόδειξη

i) Έχουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l < +\infty \Rightarrow$ θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} \leq l+1, \ n \geq n_0 \quad *$$

Ιδιότητες του $\lim_{n\to\infty}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

$x_n < x + \varepsilon$, $n \geq n_0$

ii) Η κατηλοιδία.

$x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

* $a_n \le (l+1) b_n, \quad n \ge 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} a_k \le (l+1) \sum_{k=n_0}^{n} b_k \le (l+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{n} a_n \le \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + (l+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{M}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

Κριτήριο λόγου

i) Αν $a_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ii) Αν $a_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Κριτήριο ρίζας

i) Αν $a \ge 0$, και $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = l < 1$. τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. συγκλίνει

ii) Αν $a_n \ge 0$, και $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Κριτήριο Ολοκληρώματος

Έστω $f: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f \downarrow$, τότε το να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx$$

Απόδειξη

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \le \int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$\le f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

Εαν $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει, τοτε:

$$\int_1^n f(x) \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(n)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

($\Leftarrow$) Αν $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει ($\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$)

θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει.

Όπως είδαμε ότι.

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \le \int_1^n f(x)dx$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)dx \le \underbrace{f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx}_{M}$$

Εφαρμογή

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Θεωρώ τη συνάρτηση $F:[1,\infty) \to [0,\infty)$ με τύπο

$F(x) = \frac{1}{x}$, $x \ge 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\exists \int_1^{\infty} f(x)dx$

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, άρα $\int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty$ και επομένως. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

Κριτήριο Συμπύκνωσης

Αν $a_n \ge 0$ και τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ επίσης συγκλίνει

Τρίτη 4 Νοεμβρίου 2014

Άσκηση 1

Λύση

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$ αποκλίνει

$f(x) = \frac{1}{x \ln(x+1)}$, $x \geq 1$ $\quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

$f'(x) = -\frac{(x \ln(x+1))'}{x^2 (\ln(x+1))^2} = -\frac{\ln(x+1) + x \frac{1}{x+1}}{x^2 (\ln(x+1))^2} < 0$

$\exists \lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)dx \Big| \int_1^A f(x)dx = \int_1^A \frac{dx}{x \ln(x+1)}$

$\ln(x+1) = y \Rightarrow dy = \frac{1}{x+1} dx$

$$\int_1^A \frac{dx}{x \ln(x+1)} = \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{(x+1)\,dy}{x\,y} = \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{e^y\,dy}{(e^y-1)y} \geq \int_{\ln 2}^{\ln(A+1)} \frac{dy}{y} = (\ln y)\Big|_{\ln 2}^{\ln(A+1)}$$

($x+1 = e^y$)

$$A \geq \ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{A \to \infty} \int_1^A f(x)dx \geq \lim_{A \to +\infty} \left(\ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2)\right) \geq \ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2)$$

Λύση με το κριτήριο συμπύκνωσης.

$$a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει

$$2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n+1)}$$

~~$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n+1)}$~~

$\ln(2^n+1) \le \ln(2^n+2^n) = \ln(2^{n+1}) = (n+1)\ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(2^n+1)} \ge \frac{1}{\ln 2(n+1)}$

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n+1)} = +\infty$

Απόδειξη

$\Leftrightarrow$ Αν $\sum a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει επίσης

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$$

$\tilde{S}_n = 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \dots$ $\quad a_1 \ge a_2$

$S_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}$ $\quad a_1 + a_2 \ge 2a_2$

$\boxed{2S_{2^n} \ge \tilde{S}_n}$ $\quad (a_3 + a_4) \ge 4a_4$

$2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \ge 8a_8$

Απόλυτη Σύγκλιση σειρών

Ορισμός Απόλυτης Σύγκλισης

Ερώτημα: Πότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτως?

Απάντηση: Αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτως ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης (Πάλι $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$)

Παράδειγμα

Αν $a>0$, $b \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nb)}{n^{1+a}}$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nb|}{n^{1+a}} \le \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} \text{ συγκλίνει}}$

1η Λύση

Κριτήριο ολοκληρώματος $0 < f(x) = \frac{1}{x^{1+a}}$, $x \geq 1$

$$f'(x) = -\frac{(1+a)}{x^{2+1}} < 0$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{dx}{x^{1+a}} = \int_1^A x^{-(1+a)}\,dx = \int_1^A \left(\frac{x^{-a}}{-a}\right)' dx =$$

$$= \left(-\frac{x^{-a}}{a}\right)_1^A = -\frac{A^{-a}}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = \frac{1}{a}, \text{ οπότε η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} \text{ συγκλίνει}$$

Εφαρμόζω από κριτήριο σύγκρισης

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^a|}{n^{1+a}}$ συγκλίνει και από την πρόταση η

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ne}{n^{1+e}}$ συγκλίνει

Απόδειξη (πρότασης)

Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει

$\Uparrow$

$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ συγκλίνει

$$-\tilde{S}_n \leq S_n \leq \tilde{S}_n$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Cauchy

Αρκεί για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$$

$$|\tilde{S}_m - \tilde{S}_n| < \varepsilon,\ m > n \geq n_0$$

Οπότε $\left|\sum_{k=1}^{m}|a_k| - \sum_{k=1}^{n}|a_k|\right| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$

$$= \left|-\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|\right| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

Θα αποδείξαμε ότι και η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι ακολουθία Cauchy επίσης.
Για το $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιούμε το n_0 που βρήκαμε προηγουμένως Τότε για $m > n \geq n_0$ έχουμε

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|-\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |-a_k| = \sum_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$$

Η S_n είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει

Κριτήριο Dirichlet

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοιες ώστε:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

η S_n είναι ακολουθία φραγμένη, και $b_n \downarrow 0$
Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (από αυτό) αλλά δεν συγκλίνει απολύτως

Απόδειξη

Σύγκριση απολύτων: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Συγκλίνει, διότι θέσαμε $b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$

$a_n = (-1)^n$ Τότε: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ τότε $|S_n| \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$

$S_1 = -1, \ S_2 = 0, \ S_3 = -1, \ S_4 = 0$

$S_{2n-1} = -1$

$S_{2n} = 0$

Πέμπτη 6 Νοεμβρίου 2014.

Άσκηση Ι

Κριτήριο του Dirichlet

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:

i) Η $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M: |S_n| \le M, \forall n\in\mathbb{N}$

ii) $b_n \downarrow 0$ (b_n φθίνουσα, με όριο μηδέν $\lim b_n = 0$)

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο Leibnitz

Αν $b_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη Έστω $a_n = (-1)^n$, οπότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

$|S_n| \le 1, \forall n\in\mathbb{N}$

Άσκηση Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma_n}$ συγκλίνει

Απόδειξη

Αν $a_n = (-1)^n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $|S_n| \le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και η $b_n = \frac{1}{\Gamma_n}$ είναι φθίνουσα διότι $b_n = \frac{1}{\Gamma_n} \ge \frac{1}{\Gamma_{n+1}} = b_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma_n} = 0$. οπότε από το κριτήριο του Dirichlet η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma_n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη (Dirichlet)

$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

Όμως $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ φραγμένη

$a_n = S_n - S_{n-1}$, $S_0 = 0$

Οπότε $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k$

2)
7.7

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{l=0}^{n-1} S_l b_{l+1} \qquad k-1=l$$

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - S_0 b_1 - \sum_{l=1}^{n-1} S_l b_{l+1}$$

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k b_k - S_k b_{k+1})$$

$$= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Cauchy, δηλ,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$|\bar{S}_m - \bar{S}_n| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$

$$|\bar{S}_m - \bar{S}_n| = |S_m b_m + \sum_{k=1}^{m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

$$= |S_m b_m - S_n b_n + \sum_{k=n}^{m-1} S_k (b_k - b_{k+1})|$$

$$\leq |S_m| |b_m| + |S_n| |b_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k| |b_k - b_{k+1}|$$

$$= |S_m| b_m + |S_n| b_n + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1})$$

$$\leq M b_m + M b_n + \sum_{k=n}^{m-1} M (b_k - b_{k+1})$$

$|b_m - b_{m-1}| + |b_{m-1} - b_{m-2}| + \ldots + |b_{n+1} - b_n| \to$ $= M b_m + M b_n + M \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1})$

$= b_n - b_m$

$$= M b_m + M b_n + M (b_n - b_m) = 2 M b_n$$

Όμως $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$, οπότε

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\varepsilon)$:

$$|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad n \geq n_1$$

Για το $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $n_0 = n_2$ και τότε για $m > n \geq n_0$, έχουμε:

$$|S_m - S_n| \leq 2M b_{n+1} \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

Άρα η S_n είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει

Άσκηση

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Θέτουμε $a_n = \sin n \quad b_n = \frac{1}{n}$

Τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$

$\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$

$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(nx)$

$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} \quad |w| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

} Οι δύο σειρές που ξέρουμε να υπολογίσουμε χωρίς σφάλμα

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\boxed{e^{inx} = \cos nx + i \sin nx}$

$S_n(x) = \sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$

$A = \underbrace{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx)} + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx)$

$= (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx)$

$= (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x) + \dots + (\cos x + i \sin x)^n$

$w = \cos x + i \sin x$

(4)
(79)

$\boxed{w = \cos x + i\sin x}$ $\quad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$A = w + w^2 + \dots + w^n$ $\quad$ ou $w = 1$

$= w(1 + w + \dots + w^{n-1})\ \dfrac{(1-w)}{1-w}$, $w \neq 1$

$= \dfrac{w}{1-w}(1-w^n)$, $w \neq 1$

$= \dfrac{(\cos x + i\sin x)}{1 - \cos x - i\sin x}\ (1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$

$A = \dfrac{(\cos x + i\sin x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))}{1 - \cos x - i\sin x}$

$= \dfrac{(1 - \cos x + i\sin x)(\cos x + i\sin x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}$

$= [\cos x(1-\cos x) + i\sin x(1-\cos x) + i\sin x\cos x - \sin^2 x]$
$\cdot (1 - \cos(nx) - i\sin(nx))$

$= \dfrac{1}{2(1-\cos x)}\left[(\cos x - 1 + i\sin x)(1 - \cos(nx) - i\sin(nx))\right]$

$A = \dfrac{1}{2(1-\cos x)}\Big[(\cos x - 1)(1 - \cos(nx)) - i\sin(nx)(\cos x - 1) + i\sin x$
$\cdot (1 - \cos(nx)) + \sin x \sin(nx)\Big]$

$= \dfrac{1}{2(1-\cos x)}\Big[\cos x - \cos x\cos(nx) - 1 + \cos(nx) + \sin x \cdot \sin(nx)$
$+ i\big[\sin x - \sin x\cos(nx) - \cos x\sin(nx) + \sin(nx)\big]\Big]$

$\sin(n+1)x - \cos(n+1)x$

$= \dfrac{\cos x + \cos(nx) - 1 - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} + i\,\dfrac{\sin x + \sin(nx) - \sin((n+1)x)}{2(1-\cos x)}$

Exercício:

$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) = \dfrac{\cos x + \cos(nx) - 1 - \cos((n+1)x)}{2(1-\cos x)}$

$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(nx) = \dfrac{\sin x + \sin(nx) - \sin((n+1)x)}{2(1+\cos x)}$ $\quad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \dfrac{\sin 1 + \sin n - \sin(n+1)}{2(1-\cos 1)}$

$\Rightarrow |S_n| \leq \dfrac{3}{2(1-\cos 1)}$

Θεώρημα (Riemann)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, ώστε να μην συγκλίνει απολύτως

Αναδιάταξη ακολουθίας

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$a_7, a_8, a_4, a_3, a_2, a_1, a_5, a_6, a_9, a_{10}, \dots$

$\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 1-1, επί

$\tau(1)=7 \quad \tau(3)=4 \quad \tau(5)=2 \quad \tau(7)=5 \quad \tau(n)=n, n \geq 9$

$\tau(2)=8, \quad \tau(4)=3, \quad \tau(6)=1 \quad \tau(8)=6,$

$a_1, a_2, \dots, a_{100} \qquad \tau: \{1,2,\dots,100\} \to \{1,2,\dots,100\}$

$a_{\tau_1}, a_{\tau_2}, \dots, a_{\tau_{100}} \qquad$ 1-1 και επί

$$\sum_{k=1}^{100} a_{\tau_k} = \sum_{i=1}^{100} a_i$$

(συνέχεια Θεωρήματος Riemann)

τότε $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, υπάρχει αναδιάταξη της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a_{τ_n} ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_n} = x.$$

Θεώρημα

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που συγκλίνει απολύτως τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

για κάθε αναδιάταξη της a_n.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει ("απλά") αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Πέμπτη 13 Νοεμβρίου 2014

Άσκηση Ι

Άσκηση 3 Φυλλάδιο 7

$a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

$\Rightarrow$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ συγκλίνει

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$ συγκλίνει

Θεώρημα

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

$0 \leq b_n \leq k a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

οπότε

i) $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq a_n$

$\frac{1}{1+a_n^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+a_n^2$

Απόδειξη

Θα χρειαστούμε το κριτήριο σύγκρισης, δηλ. ότι αν $(a_n), (b_n) \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n > 0$. $0 \leq b_n \leq k a_n$ $\exists k > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θα συγκλίνει.

Είναι καλύτερα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

i) $b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2}$, τότε $\frac{1}{1+a_n^2} \leq 1 \leq 1+a_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

και με $a_n \geq 0 \Rightarrow b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq a_n$. Άρα από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. και μάλιστα

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

"Θεώρημα Αναδιάταξης"

$(a_n), (b_n) \in \mathbb{N}$.

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n b_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Cauchy - Schwarz

$|x \cdot y| \leq$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \cdot |\cos\theta| \leq |x||y|$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Συνέλιξη

$(a_n), (b_n) \longrightarrow (c_n)$

$c_n = a_n * b_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Θεώρημα: Πότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και συγκλίνει σε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Πρόταση

Έστω ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ και μάλιστα μία τουλάχιστον απ' τις δύο να συγκλίνει απόλυτως. Τότε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

$a_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma n} = b_n$

Συνέχεια Συναρτήσεων

Ορισμός

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x)$

$0 \in A$? ΟΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ

$A = \{0\} \cup [1, +\infty)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$?

Πότε το α είναι μεμονωμένο σημείο για το A

Όταν $\exists\, \varepsilon > 0$, ώστε $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A - \{a\}) = \varnothing$

Λόγω του μεμονωμένου σημείου, είναι το σημείο συσσώρευσης

Πότε το α είναι σημείο συσσώρευσης του A?

$\forall\, \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing$

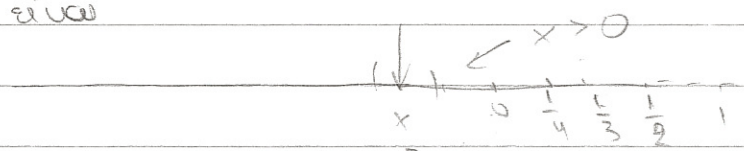
Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists\, a_n \in A - \{a\} : a - \frac{1}{4} < a_n < a + \frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ορίζουμε το α είναι σ.σ A όταν $\exists\, a_n \in A - \{a\}$ ώστε

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$A = \left\{ \frac{1}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αλλά κανένα άλλο δεν είναι



$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A - \{x\})^{\circ} = \varnothing$

$\lim_{x \to a} f(x) = l$

Αν α σσ του A

Ορίζουμε $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$0 < |x-a| < \delta$, $x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

(5)
100

Ενδεικτική

$f(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 1} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 2$

Πρέπει

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$0 < |x-1| < \delta \quad x > 0.$

$\Rightarrow |x + \frac{1}{x} - 2| < \varepsilon$

$|x + \frac{1}{x} - 2| = |x-1 + \frac{1}{x} - 1| = |x-1 + \frac{1-x}{x}| \leq |x-1| + \frac{|1-x|}{x}$

$< \delta + \frac{\delta}{x} < \delta + 2\delta = 3\delta \leq \varepsilon$

$0 < |x-1| < \delta$

$|x-1| < \delta \iff -\delta < x-1 < \delta$

$0 < \frac{1}{2} < 1-\delta < x < 1+\delta$ $\qquad \delta < \frac{1}{2}$

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < 2$

Επιλέγουμε $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2} \right)$

Τρίτη 18 Νοεμβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

$a_n = a - \frac{1}{n} \to a$

Δοθέντος του $\varepsilon > 0$, $(\exists ?)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$.

Ανάλυση

$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a|\,|x+a| < \varepsilon$

$\delta^2 + 2|a|\delta + |a|^2 < \varepsilon + |a|^2$ $\quad |x-a| < \delta$

$(\delta + |a|)^2 < \varepsilon + |a|^2 \iff$ $\quad |x+a| = |x-a+2a|$

$\delta + |a| < \sqrt{\varepsilon + |a|^2}$ $\quad \le |x-a| + |2a|$

$\delta < \sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|$ $\quad < \delta + 2|a|$

επιλέξαμε $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right)$

Επιλέγω $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right)$, τότε για $0 < |x-a| < \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right)$

$$|x^2 - a^2| = |x-a|\,|x+a|$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right) \cdot \left(|x-a| + 2|a|\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right)\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} - |a|\right) + 2|a|\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2}\right)^2 - (|a|)^2}{\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + |a|}\right)\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + 3|a|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + |a|}\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + 3|a|\right) < \varepsilon$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + 3|a|}{4\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + |a|\right)} \le \frac{3\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + |a|\right)}{4\left(\sqrt{\varepsilon + |a|^2} + |a|\right)} = \frac{3}{4}$$

Πιο βολικοί τρόποι προσδιορισμού του δ

(Κάναμε μια αρχική επιλογή του δ)

Πρώτα

$\delta = 1 \qquad |x-a| < 1$

$|x^2 - a^2| = |x-a|\,|x+a|$

$= |x-a|\,(|x-a+2a|)$

$\leq |x-a|\,(|x-a| + 2|a|) \leq |x-a|\,.\,(1 + 2|a|) < \varepsilon$

$\delta(1 + 2|a|) < \varepsilon$

$\delta(1 + 2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}$

Επιλέγουμε $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$

Τότε για $0 < |x-a| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\right)$

Έχουμε $|x^2 - a^2| \leq |x-a|\,(|x-a| + 2|a|)$

$\leq |x-a|\,(1 + 2|a|)$

$< \frac{\varepsilon}{2(1+2|a|)}\,(1 + 2|a|) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Πρόταση

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ $(\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R})$ και a είναι σ.σ του A.

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A - \{a\}$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Έχουμε $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) (Υποθέτουμε ότι το αποδείξαμε το i))

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$x \in A$

Έστω επίσης $x_n \in A - \{a\}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Για το $\delta > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta)$:

$$0 < |x_n - a| < \delta \quad n \geq n_0.$$

Τότε όμως για $n \geq n_0$

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Οπότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta(\varepsilon))$:

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

($\Longleftarrow$) $(ii) \Rightarrow i)$

Υποθέτουμε ότι $\forall (x_n) \subseteq A - \{\xi_0\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ Έστω τότε $\nexists \left(\lim_{x\to a} f(x) = l\right)$

Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$, ώστε $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ $0 < |x - a| < \delta$

ώστε $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in A$ $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$

ώστε $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$ $(*)$

(Από το ii) $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to l$)

Παίρνουμε άρα $0 = |l - l| \geq \varepsilon_0$ ΑΤΟΠΟ

Συνέχεια συνάρτησης

$f: A \to \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής για μεμονωμένα σημεία του A

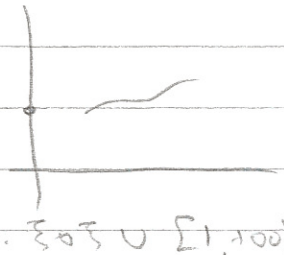
Στα σημεία αυτά η συνάρτηση πρέπει $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ορισμός

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$|x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$x \in A$



$f: \{\xi_0\} \cup [1, 100)$

Πρόταση

Αν $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) Η f είναι συνεχής στο a

ii) $\forall (x_n) \subseteq A$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, και $a \in A$ τέτοιο ώστε η f να είναι συνεχή στο a. Τότε:

i) Εαν $f(a) > 0$, $\exists \delta > 0$, ώστε
$f(x) > 0$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$.

Παραδειγμα

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, τ.ω f συνεχής στο $\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) > 0$ τοτε
$\exists\ \delta > 0$, $\forall x: |x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow f(x) > 0^2$

Αλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων

$f, g: A \to \mathbb{R}$

Έστω $a \in A$ & f, g συνεχείς στο a

$\Rightarrow$ i) $f+g$ είναι συνεχή στο a,

ii) $f \cdot g$ — // —

iii) Αν $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ ορίζεται κοντά στο a, και είναι συνεχής επίσης.

Αν $f: A \to B$, $a \in A$, f συνεχείς στο a

$g: B \to \Gamma$, $f(a) \in B$, g συνεχής στο $f(a)$

$\Downarrow$

$g \circ f: A \to \Gamma$ $((g \circ f)(x) = g(f(x)))$

Τοτε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο a

Απόδειξη → Έστω $x_n \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\overbrace{\quad}^{y_n}$

επειδή f συνεχής στο $a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Η g είναι συνεχής στο $f(a)$ $\overset{\forall}{\Rightarrow}$ $y_n \in B$, $\lim_{n\to\infty} y_n = f(a)$

$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(a))$

$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$ ✓

Πέμπτη 20 Νοεμβρίου 2014
Ανάλυση Ι

Παράδειγμα 1 (Dirichlet)
Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

είναι ανεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού
$f:A\to\mathbb{R}$, $a\in A$
Δηλαδή της f είναι ανεχής στο a
Πότε η f δεν είναι ανεχής στο a
Είναι $\exists\,\varepsilon_0>0$, τέτοιος ώστε $\forall\,\delta>0$ υπάρχει $x\in A$, $|x-a|<\delta$, τέτοιο ώστε $|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon_0$
Αν επιλέξουμε $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, τότε $\exists\,x_n\in A$ $|x_n-a|<\frac{1}{n}$ και $|f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon_0$
Γενικώς η f δεν είναι ανεχής στο a αν $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ τέτοια ώστε $f(x_n)$ να μην συγκλίνει στο $f(a)$
$n\to\infty$

Απόδειξη Διαμορφώνουμε δύο περιπτώσεις
α) $a\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(a)=1$
Θα έχω αποδείξει ότι η f δεν είναι ανεχής στο a, αν καταφέρω να βρω ακολουθία x_n, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ & $f(x_n)\not\to f(a)=1$
Αν βρω ακολουθία $x_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, τότε $f(x_n)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0\neq1=f(a)$
πρέπει να βρω $x_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

β) Αν $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, τότε $f(a)=0$, τότε μπορούμε να βρούμε ακολ $y_n\in\mathbb{Q}: a<y_n<a+\frac{1}{n}$ οπότε $\lim_{n\to\infty}y_n=a$ &
$f(y_n)=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1\neq0=f(a)$

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in\mathbb{Q}\\ h(x), & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

ανεχής μόνο στο
ανεχής παντού

(2)
(109)

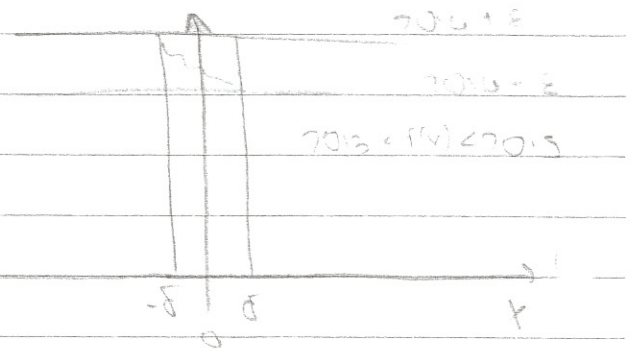
Παράδειγμα 2

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η f είναι συνεχής στο 0 και $f(0)=2014$.

Δηλ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2014$.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 : \forall |x-0|<\delta \iff -\delta<x<\delta \iff$

$2014-\varepsilon<f(x)<2014+\varepsilon \iff -\varepsilon<f(x)-2014<\varepsilon \iff |f(x)-2014|<\varepsilon$



Πρόταση

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a<b)$, συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$ ($f\in C([a,b])$

Τότε η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη.

Θα το αποδείξουμε με ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ, έστω πως δεν είναι άνω φραγμένη $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ // f είναι άνω φραγμένη $\exists M$

Επιλέγουμε $M=\nu\in\mathbb{N}$, $\exists x_\nu\in[a,b]$, $f(x)\le M\ \forall x\in[a,b]$

τέτοιο ώστε $f(x_\nu)>\nu$ // f δεν είναι άνω φραγμένη

Αφού $x_\nu\in[a,b]$, από το Θ. Bolzano-Weierstrass η x_ν έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, έστω

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{\nu_k}=x\in[a,b]$ $\left(\begin{array}{c} a\le x_{\nu_k}<b \\ \Downarrow \\ a\le x\le b\end{array}\right)$

Η f όμως είναι συνεχής στο x, & $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{\nu_k}=x \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{\nu\to\infty} f(x_{\nu_k})=f(x)$

Άτοπο, αφού η ακολουθία $f(x_{\nu_k})>\nu_k$

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} f(x_{\nu_k})=+\infty$

Πρόταση (6-8)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$, τότε
$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, $\forall x \in [a,b]$

Απόδειξη

Εστω $A = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$ είναι φραγμένο τότε ορίζεται το $\sup A$, $\inf A$

Οπότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in A : \sup A - \varepsilon < y < \sup A$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists\, y_n \in A$

$\sup A - \frac{1}{n} < \underset{f(x_n)}{y_n} < \sup A$

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, x_n \in [a,b]$: $\sup A - \frac{1}{n} < f(x_n) < \sup A$ (1)

Από το Θ. Bolzano Weierstrass) $\exists\, x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_2 \in [a,b]$

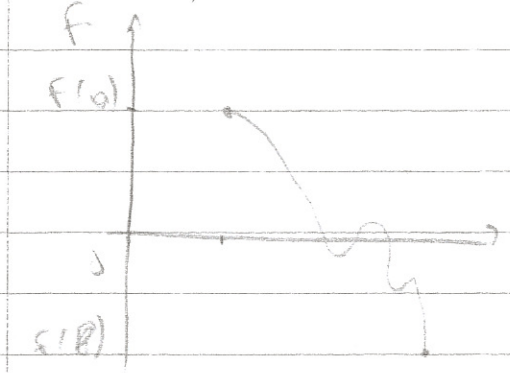
Από τη συνέχεια της f στο x_2 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_2)$ (2)

$\sup A \le f(x_2) \le \sup A \Rightarrow f(x_2) = \sup A$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$, $f(x) \le \sup A = f(x_2)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής και $f(a)\cdot f(b) < 0$ τότε
$\exists\, \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.



Απόδειξη

Ορίζουμε το σύνολο $\{ x \in [a,b] \mid f(t) > 0, \forall t \in [a,x] \}$,
$a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

(11)

$f(a) > 0$, συνεχής $\Rightarrow$

$\exists \delta > 0$, $\forall\, t \in [a, a+\delta] \Rightarrow f(t) > 0$

Το A είναι μη κενό, άνω φραγμένο

ΑΡΑ έχει supremum $\xi = \sup A$

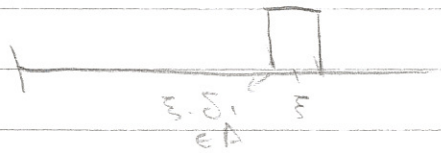
Θα αποδείξω ότι $f(\xi) = 0$ ΑΠΑΓΩΓΗ ΕΞ ΑΤΟΠΟΥ

Έστω πως δεν αλήθευει $\Rightarrow$ είτε $f(\xi) > 0$

είτε $f(\xi) < 0$

$F(\xi) > 0$ λόγω συνέχειας ως f στο ξ.

$\exists \delta_1 > 0$ $f(t) > 0$, $t \in [\xi - \delta_1, \xi + \delta_1]$



$\Rightarrow \forall\, t \in [a, \xi + \delta_1] \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow \sup A \geq \xi + \delta_1$

ξ ΑΤΟΠΟ

Αν $f(\xi) < 0$, λόγω συνέχειας η f στο ξ $\exists \delta_2 > 0$:

$f(t) > 0$ $t \in [\xi - \delta_2, \xi + \delta_2]$.

$A \subseteq [a, \xi - \delta_2] \Rightarrow \sup A \leq \xi - \delta$ ΑΤΟΠΟ

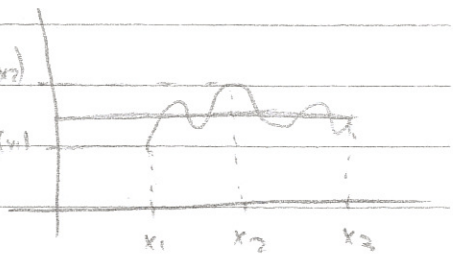
Τρίτη 25 Νοεμβρίου 2014
Ανάλυση Ι

Θ. Bolzano
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής και $f(a)f(b)<0$
Τότε $\exists\,\xi\in(a,b): f(\xi)=0$
(Άξιωμα πληρότητας)

Πρόταση:
Έστω $f:I\to\mathbb{R}$, συνεχής και 1-1. Τότε η f είναι γνήσια μονότονη.
Απόδειξη
Έστω ότι η f δεν είναι γνήσια μονότονη. Τότε θα είχαμε

(Αν f γνησίως μονότονη
i) $f\uparrow \Rightarrow \forall\, x,y\in I,\ x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$
ii) $f\downarrow \Rightarrow \forall\, x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$
Δηλαδή: Υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in I$ τέτοια ώστε $x_1<x_2<x_3$ τ.ω.
$f(x_1)<f(x_2)$ & $f(x_3)<f(x_2)$ ή $f(x_1)>f(x_2)$ & $f(x_3)>f(x_2)$)

$x_1,x_2,x_3\in I$ ώστε
είτε $f(x_1)<f(x_2)$ & $f(x_3)<f(x_2)$
είτε $f(x)>f(x_2)$ & $f(x_3)>f(x_2)$
Οπότε η f δεν είναι 1-1



Έστω $f(x_3)>f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2)>f(x_1))$
Θα αποδείξαμε ότι η εξίσωση $f(x)=f(x_3)$ έχει λύση στο διάστημα (x_1,x_2), διότι $g(x)=f(x)-f(x_3)$
$g(x_1)g(x_2)=(f(x_1)-f(x_3))\cdot(f(x_2)-f(x_3))<0$
Από το Θ. Bolzano $\exists\,\xi\in(x_1,x_2): g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(x_3)$
Άτοπο, άρα η f είναι 1-1

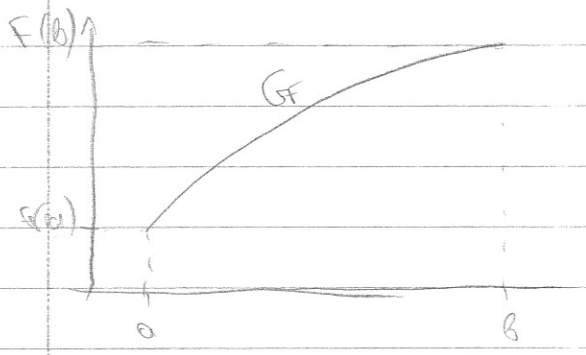
Πρόταση
$f:I\to f(I)$, συνεχής και 1-1 η $f^{-1}: f(I)\to I$ είναι συνεχής συνάρτηση επίσης.

(2)
(13)

Απόδειξη

Από το προηγούμενο παράδειγμα η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω ότι η f είναι ↑

ΠΡΟΧΕΙΡΟ $I=[a,\beta]$ $f(I)=[f(a),f(\beta)]$



$f^{-1}\ [f(a),f(\beta)] \to [a,\beta]$ $f\circ f^{-1}(y)=y$

Έστω $y_0\in f(I) \Rightarrow \exists x_0\in I$ $f(x_0)=y_0$

Η f συνεχής στο x_0 $x\in I$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$

$\forall \tilde{\varepsilon}>0\ \exists \tilde{\delta}>0 :$

$|y-y_0|<\tilde{\delta} \Rightarrow |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\tilde{\varepsilon}$ (1).

$-\tilde{\varepsilon}+f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)+\tilde{\varepsilon}$

$-\tilde{\varepsilon}+x_0 < f^{-1}(y) < \tilde{\varepsilon}+x_0$

$(f(x_0-\delta),\ f(x_0+\delta))$

$f((x_0-\delta,\ x_0+\delta)) \subset \left(f^{-1}(y_0-\varepsilon),\ f^{-1}(y_0+\varepsilon)\right)$

Επιλέγω δ μικρό

Ασκήσεις

1) Έστω δ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς, τέτοιες ώστε $f(x)=g(x)\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι $f\equiv g$

Απόδειξη

Έστω $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Θα αποδείξουμε ότι $\exists y_n\in\mathbb{Q}$ ώστε

$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Στο διάστημα $(x, x+\frac{1}{n})$ υπάρχει ρητός $y_n \in (x, x+\frac{1}{n})$

$y_n \in \mathbb{Q}$, $x < y_n < x + \frac{1}{n}$

Τότε $\lim_{n\to\infty} y_n = x$

Τότε όμως $f(y_n) = g(x_n)$ και $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο x έχουμε

$(\forall x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))$

Τότε $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = F(x)$ ①, $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(x)$ ②.

Όμως $F(y_n) = g(y_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \Rightarrow$

$F(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow F(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f \equiv g$

2) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n$

Τότε η f είναι σταθερή

Απόδειξη

$f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$

$f(x+\frac{2}{n}) = f((x+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}) = f(y) = f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ επαγωγή ως π.

$\Rightarrow f(x+\frac{k}{n}) = f(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (Αποδείξτε το επαγωγικά)

$f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ $\quad f(x-\frac{1}{n}) = f(x)$ ΝΑΙ

$f(x-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}) = f(x-\frac{1}{n})$ Επαγωγικά $\Rightarrow f(x-\frac{k}{n}) = f(x)$, $k \in \mathbb{N}$

$f(x) = f(x-\frac{1}{n})$ Οπότε $f(x+\frac{w}{n}) \Rightarrow f(x)$, $\forall w \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $y \in \mathbb{R}$, τότε $\exists x_n \in \mathbb{Q}$, ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = y$

Τότε $f(x+x_n) = f(x)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x+x_n) = f(x)$

$f(x+y) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Επιλέγοντας $x=0 \Rightarrow f(y) = f(0)$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ σταθερή

4)
115

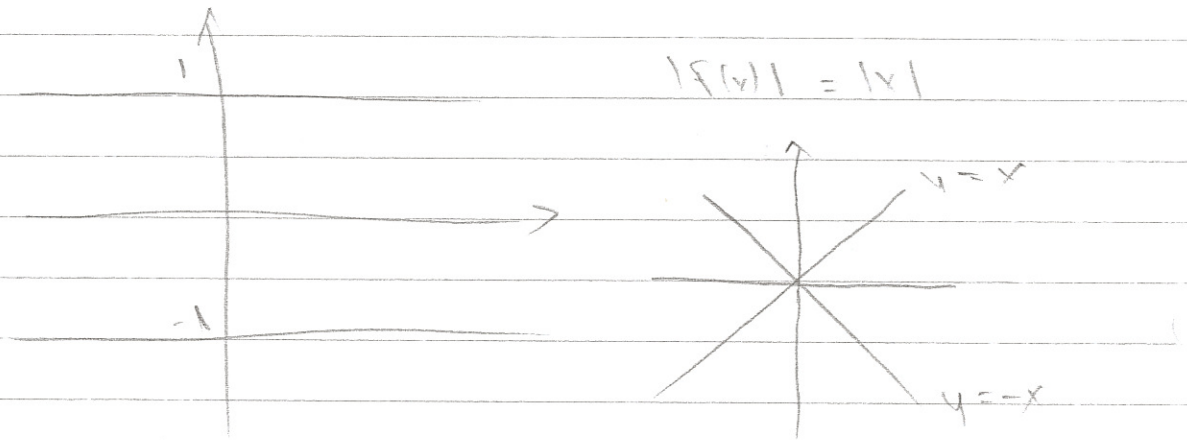
3) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $|f(x)|=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$
Τότε είτε $f(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ είτε $f(x)=-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

β) Βρείτε όλες τις συνεχείς $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα
$g(x)(g(x)-x^2)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

α) Θα αποδείξουμε ότι εκτός των $f_1(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$
$f_2(x)=-1$, $x\in\mathbb{R}$
δεν υπάρχει άλλη.
(Αν f δεν είναι συνεχής, υπάρχουν απειρες, $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, $A\neq\mathbb{R}$
$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases}$)

Έστω πως υπάρχει f συνεχής, τέτοια ώστε να υπάρχει
$\exists\, x_1\neq x_2$, $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-1$
Τότε επειδή η f είναι συνεχής, από Θ. Bolzano
$f(x_1)f(x_2)=-1<0$ τότε $\exists\,\xi$: $f(\xi)=0$, αντίφαση αφού
$|f(\xi)|=1$



Πέμπτη 27 Νοεμβρίου 2014
Άσκηση Ι

Λύση

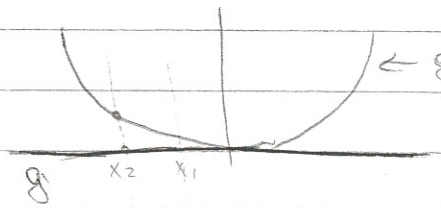
β) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε $g(x)(g(x)-x^2)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις g

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$\Rightarrow g(x)=0$ ή $g(x)=x^2$ 1) $g_1(x)=0$, $g_2(x)=x^2$

$A\subseteq\mathbb{R}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_A(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases}$



Λύση

Θα αποδείξαμε ότι οι μοναδικές λύσεις είναι οι συναρτήσεις

$g_1(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$

$g_2(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

$g_3(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ $\quad g_4(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$

Έστω πως υπάρχει και κάποια άλλη συνεχής g

α) Τι κάνει η g για $x<0$, ειδικότερα έστω

α) $g(x_1)=0$, $x_1<0\Rightarrow$ Θα αποδείξουμε ότι $g(x)=0$, $\forall x<0$

β) $g(x_1)=x^2$, $x_1<0\Rightarrow$ Θα αποδείξουμε ότι $g(x)=x^2$, $\forall x<0$

α) $g(x_1)=0$, $x_1<0$, έστω, πως δεν είναι $g(x)=0$, $\forall x<0\Rightarrow\exists x_2<0$: $g(x_2)=x_2^2$. Έστω $x_2<x_1$ Θα έπρεπε στο διάστημα $[x_2,x_1]$ που η g είναι συνεχής να παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές δηλ. $\exists\,\xi\in(x_2,x_1)$ ώστε: $g(\xi)=y\in(0,x_2^2)$

Στο $x>0$, έχουμε αντίστοιχη επιλογή δηλ αν $\exists x_3>0$ ώστε $g(x_3)=0\Rightarrow g(x)=0$, $\forall x>0$

Έστω αν $\exists x_4>0: g(x_4)=x_4^2\Rightarrow g(x)=x^2$ $\forall x>0$

Άσκηση

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής τέτοια ώστε $f(x)=f(\tau\varepsilon\tau\rho\alpha x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
Αποδείξτε ότι η f είναι η σταθερή συνάρτηση

(2)

(12)



Άσκηση (για σπίτι)

Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $f^2(x)+x^2=1$, $\forall x\in[-1,1]$.

Αποδείξτε ότι είτε $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ είτε $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$f(x+1)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall u\in\mathbb{Q}$

$\Downarrow u$

$f(x+u)=f(x)$ $u\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in\mathbb{N}$

$\Downarrow$

$a_u=\frac{p_u\in\mathbb{Z}}{q_u\in\mathbb{N}}$ $a_u\to u$ $f(x+u)=f(x)$

Απόδειξη

$f(x)=f(2014x)=f(2014^2x)$

$f(x)=f((2014)^4x)$ $x=(2014)^{-4}x$ $\forall x$ $u\to 0$ ω $\lim_{u\to\infty} f(x_u)=f(0)$

$f((2014)^{-4}x)=f(2014)^4(2014)^{-4}x)=f(x)$

$\lim_{u\to\infty} f((2014)^{-u}x)=\lim_{u\to\infty} f(x)=f(x)$

$\lim_{u\to\infty} f((2014)^{-u}x)=f(0)$

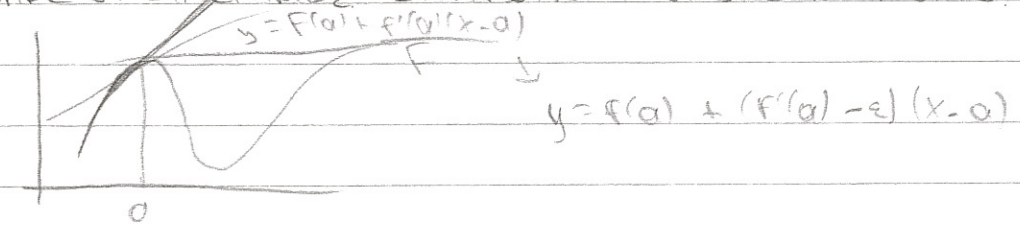
Παράγωγοι

Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο a $f:A\to\mathbb{R}$

$f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$y=f(a)+(f'(a)+\varepsilon)(x-a)$

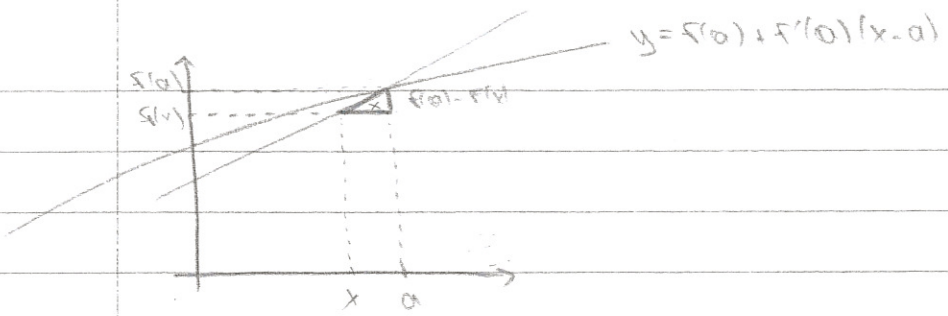
ΟΛΕΣ ΟΙ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΕΙΣΑΓΟΥΝ ΡΥΘΜΟΥΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ



Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο a

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow -\varepsilon<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)<\varepsilon \Rightarrow f'(a)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(a)+\varepsilon$



Πρόταση

Έαν $f:A\to\mathbb{R}$, $a\in A$ σε. ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η f είναι συνεχής στο a.

Απόδειξη

f παραγωγίσιμη στο a, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$: $0<|x-a|<\delta$, $x\in A$ $\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon$

Λύνουμε τριγωνική ανισότητα

$$\Rightarrow \left|\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|-|f'(a)|\right|\le\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|<|f'(a)|+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)|<(|f'(a)|+\varepsilon)|x-a|$$

$\forall\ 0<|x-a|<\delta$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Άλγεβρα Παραγωγίσιμων Συναρτήσεων

i) Αν f,g παραγωγίσιμες στο $a\Rightarrow f+g$ παραγωγίσιμη στο a και $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

ii) Αν f,g παραγωγίσιμες στο $a\to f\cdot g$ παραγωγίσιμη στο a και $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο a.

Όμως $\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\dots\dots$

$$=\frac{(f(x)-f(a)+f(a))g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

(4)
(123)

Η f παραγωγίσιμη στο $a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Big|_{x \in A} \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Η g παραγωγίσιμη στο $a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$:

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Big|_{x \in A} \Longrightarrow \left| \frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a) \right| < \varepsilon$$

Τότε για $0 < |x-a| < \delta$ $x \in A$

$$\left| \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} - (f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) \right| =$$

$$= \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} - f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) - f'(a)g(a) \right| + \left| f(a) \left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a) \right) \right|$$

$$= \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} (g(x) - g(a) + g(a)) - f'(a)g(a) \right| + \left| \frac{\quad}{\quad} \right|$$

$$= \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} (g(x)-g(a)) + g(a) \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) \right| + \left| \frac{\quad}{\quad} \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} (g(x)-g(a)) \right| + \left| g(a) \right| \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| + \left| f(a) \right| \left| \frac{g(x)-g}{x-a} \right|$$

$$< \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon (1 + |g(a)| + f(a)) \qquad \varepsilon |g(a)| + \varepsilon |f(a)| - g'(a)$$

iii) $f: A \to B$, f παραγωγίσιμη στο a

$g: B \to \Gamma$, g παραγωγίσιμη στο $f(a)$

$g \circ f: A \to \Gamma$, $g \circ f$ παραγωγίσιμη στο a

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

Τρίτη 2 Δεκεμβρίου 2014

Ανάλυση Ι

$$\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underset{y \in A}{0 < |x-y| < \delta} \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f(x) \right| < \varepsilon$$

Θεώρημα Fermat

α) Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, και είναι τέτοιο ώστε $\xi \in (a,b)$, ώστε το ξ να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f, και η f παραγωγίζεται στο ξ, τότε $f'(\xi) = 0$.

Πότε το ξ είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την f είτε τοπικό μέγιστο είτε τοπικά ελάχιστο.

$\exists \delta > 0, \ |x - \xi| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(\xi)$, $x \in [a,b]$

Το ξ είναι τοπικό ελάχιστο αν $\exists \delta > 0$:

$$\left. \begin{matrix} |x-\xi| < \delta \\ x \in [a,b] \end{matrix} \right| \Longrightarrow f(x) \geq f(\xi)$$

β) Αν το a είναι τοπικό μέγιστο για την f, και f παραγωγίσιμη στο a, τότε $f'(a) \leq 0$

Είναι αν το a είναι τοπικό ελάχιστο για την f, και η f παραγωγίσιμη στο a, τότε $f'(a) \geq 0$

Απόδειξη



$\exists \delta > 0, \ (\xi - \delta, \xi + \delta) \subset [a,b]$ και αν υπ' υπόθεση $f(x) \leq f(\xi), \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$

$\Rightarrow f(x) - f(\xi) \leq 0, \ \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$

Διαιρούμε περιπτώσεις I) $x \in (\xi, \xi + \delta) \Rightarrow x - \xi > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0, \ \forall x \in (\xi, \xi + \delta)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^+} \left(\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right) \leq 0 \Leftrightarrow f'(\xi^+) \leq 0$$

Περίπτωση II $x \in (\xi-\delta, \xi) \Rightarrow x-\xi < 0$

$(1) \Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0, \quad \forall x \in (\xi-\delta, \xi)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \Leftrightarrow f'(\xi^-) \geq 0$

$\Rightarrow f'(\xi) = 0$

Πόρισμα

Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in (a,b)$ σημείο τοπικού μεγίστου της f. Υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ξ. Τότε $f'(\xi)=0$

$f''(\xi) \leq 0$

Αντίστοιχα αν το ξ ήταν σημείο τοπικού ελαχίστου τότε

$f'(\xi) = 0$

$f''(\xi) \geq 0$

Θεώρημα Rolle

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Υποθέτουμε επίσης ότι $f(a)=f(b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

ΘΜΤ

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$g(x) = (f(b)-f(a))x - f(x)(b-a), \quad x \in [a,b]$

$g(a) = (f(b)-f(a))a - f(a)(b-a) = (f(b)-f(a))a - f(a)(b-a) =$

$= f(b)a - af(a) - bf(a) + af(a) = f(b)a - bf(a)$

$g(b) = (f(b)-f(a))b - f(b)(b-a) = f(b)b - bf(a) - bf(b) + af(b)$

Πόρισμα

1) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b) και τέτοια ώστε $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$
Τότε η f είναι σταθερή (δηλ. $\exists \xi_x\in(a,x)$
$f(x)-f(a)=f'(\xi_x)(x-a)=0 \Rightarrow f(x)=f(a),\ \forall x\in[a,b]$)

2) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b), και τέτοια ώστε $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(a,b)$ Τότε η f ↑ $[a,b]$.

Έστω $a\leq x<y\leq b$, εναρμόζεται ότι
$\exists\ \xi_{x,y}\in(x,y)$ τω $f(y)-f(x)=f'(\xi_{x,y})(y-x)$
≥ 0 ≥ 0

Λήμμα

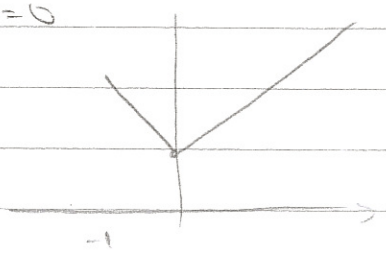
i) Έστω $x>-1,\ x\neq 0,\ 0<a<1$. Τότε $(1+x)^a<1+ax$

ii) Έστω $x>-1,\ x\neq 0,\ a>1$ Τότε $(1+x)^a>1+ax$

Απόδειξη

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=(1+x)^a-1-ax$
είναι δύο φορές παραγωγίσιμη έτσι
$g'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=a[(1+x)^{a-1}-1]$
$g''(x)=a(a-1)(x+1)^{a-2}\quad x>-1$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $a>1\Rightarrow a-1>0,\ g''(x)>0,\ x>-1$
$\Rightarrow g'\uparrow$, παρατηρώ ότι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
$\Rightarrow g'(x)>g'(0)=0,\ x>0$
$g'(x)<g'(0)=0,\ -1<x<0$
$\Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$ & $g\downarrow(-1,0]$
$\Rightarrow g(x)>g(0),\ \forall x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}$



i) $0<a<1\Rightarrow g''(x)<0,\ x\in(-1,+\infty)$
$\Rightarrow g'\downarrow$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ $\Rightarrow g'(x)<0=g'(0),\ x\in(0,+\infty)$
$g'(x)>0,\ x\in(-1,0)$

(4)
(27)

Άσκηση

Αποδείξτε ότι $e^x \le \frac{1}{1-x}$, $x<1$

Απόδειξη

$\Updownarrow$

$(1-x)e^x \le 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$F(x) = (1-x)e^x - 1$, $x<1$.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$, και $F'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, $x\in(-\infty,1)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $x<0 \Rightarrow F'(x)>0 \Rightarrow F\uparrow$ $(-\infty,0]$

ii) $0<x<1 \Rightarrow F'(x)<0 \Rightarrow F\downarrow$ $[0,1)$

Οπότε $F(x)\le F(0)=0$, $\forall x\in(-\infty,1)$

Άσκηση

Έστω $x,y>0$, αποδείξτε ότι $xy \le x\ln x + e^{y-1}$

Απόδειξη

Για $y>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$F(x) = xy - x\ln x - e^{y-1}$, $x>0$.

$F'(x) = y - \ln x - x\frac{1}{x} = y-1-\ln x$

$F''(x) = -\frac{1}{x} < 0$, $x>0 \Rightarrow F'\downarrow (0,+\infty)$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow y-1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = y-1 \Leftrightarrow x = e^{y-1}$

	e^{y-1}

$F'(x) < F'(e^{y-1})$ $x\in(e^{y-1},+\infty)$

$\Rightarrow F\downarrow$ στο $[e^{y-1},+\infty)$

$F'(x) > F'(e^{y-1})$ στο $x\in(0,e^{y-1})$, $x<e^{y-1}$

$\Rightarrow F\uparrow$ $(0,e^{y-1}]$

$\Rightarrow F(x)\le F(e^{y-1})$, $\forall x>0$

$= e^{y-1}y - e^{y-1}\ln e^{y-1} - e^{y-1}$

$= (y-1)e^{y-1} = 0$

Δοκιμή

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.
Τότε η f είναι σταθερή

Απόδειξη

Έστω $y\neq x \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le |y-x| \iff$

$$-|y-x| \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le |y-x|$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$$

$\Rightarrow$ η σταθερή $f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Πέμπτη 4 Δεκεμβρίου 2014

Ανάλυση Ι

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy

Έστω $f,g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχείς και παραγωγίσιμες στο (a,β).
Τότε $\exists\,\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(\beta)-f(a))\,g'(\xi)=(g(\beta)-g(a))\,f'(\xi).$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $Q:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, με τιμές
$Q(x)=(f(\beta)-f(a))g(x)-(g(\beta)-g(a))f(x)$, $x\in[a,\beta]$.
Η Q είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β)
$Q(\beta)=(f(\beta)-f(a))g(\beta)-(g(\beta)-g(a))f(\beta)=-g(\beta)f(a)+g(a)f(\beta)$
$Q(a)=(f(\beta)-f(a))g(a)-(g(\beta)-g(a))f(a)=f(\beta)g(a)-g(\beta)f(a)=Q($
Οπότε από Θ.Rolle, $\exists\,\xi\in(a,\beta):Q'(\xi)=0\iff$

Πορίσμα

Έστω $f,g\in C[a,\beta]$ $f,g\in D(a,\beta)$ και $g'(x)\neq0$, $\forall x\in(a,\beta)$.
Τότε $\exists\,\xi\in(a,\beta)$ $\dfrac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Θεώρημα L'Hospital $[a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ \beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}]$

(α) Έστω $f,g:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο (a,β).
Έστω $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$ και $g'(x)\neq0$, $\forall x\in(a,\beta)$
Επίσης γνωρίζουμε ότι: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ $(l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$
Τότε $\exists\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, και μάλιστα $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

(β) Έστω $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$, και $g'(x)\neq0$, $\forall x\in(a,\beta)$ και επιπροσθέτως
$\exists\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ $(l\in\bar{\mathbb{R}})$

Τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και μάλιστα $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

(2)
(132)

Απόδειξη

(α) Πρέπει δεν μηδενίζεται η $g(x)$, για x κοντά στο a^+
Έστω $\exists\, x_1 \in (a,\beta)$: $g(x_1)=0$ τότε για $x\in(a,x_1)$ η g δεν μηδενίζεται διότι $\exists\, \xi_x\in(x,x_1)$: $g(x)-g(x_1) = (x-x_1)\,g'(\xi_x) \neq 0$ (0)
$\to g(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,x_1)$
και επομένως το πηλίκο $\frac{F(x)}{g(x)}$ ορίζεται καλά $\forall x\in(a,x_1)$

$a<t<x_1<\beta$
$g(x_1)-g(x_1) = (1-x_1)g'(\xi) \neq 0$

Θ. Cauchy στο $[x,y]\subset(a,\beta)$, τότε $g'(t)\neq 0,\ \forall t\in(a,\beta)$
$\exists\, \xi_{x,y}\in(x,y)$, τέτοιο ώστε: $\frac{F(x)-F(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{F'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$

αν στείλω αριστερά $y\to a^+$ $\xi_x\in(a,x)$

$$\to \frac{F(x)-0}{g(x)-0} = \frac{F'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{F'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = l$$

Επαλήθευση ορίζω ότι $F:[a,\beta)$, $G:[a,\beta)$ με τύπους

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ F(x), & x>a\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ g(x), & x>a\end{cases}$$

Τότε F,G συνεχείς στο $[a,\beta)$ οπότε το Θ. Cauchy θα το εφαρμόσω στο $[a,x]\subset[a,\beta)$
Τότε $\exists\, \xi_x\in(a,x)$:

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_x)}{G'(\xi_x)}$$

$$\frac{F(x)-0}{g(x)-0} = \frac{F'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Λήμμα

Έστω $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε
$\lim_{x\to+\infty} F(x) = l\in\mathbb{R}$
Αποδείξτε ότι $\exists (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = +\infty$ και τέτοια ώστε
$\exists \lim_{\nu\to\infty} F'(x_\nu) = 0$

Λήμμα

Εφαρμόζω ΘΜΤ $[\nu, \nu+1]$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $\exists\, \xi_\nu \in (\nu, \nu+1)$ τέτοια ώστε $f(\nu+1) - f(\nu) = f'(\xi_\nu)$

Τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty} f'(\xi) = \lim\limits_{\nu\to\infty} (f(\nu+1) - f(\nu)) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f(\nu+1) - \lim\limits_{\nu\to\infty} f(\nu) = 1-1 = 0$

και επιπρόσθετα $\xi_\nu > \nu \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_\nu = +\infty$

$\nu \in \mathbb{N}$, $[\nu, z_\nu]$ $\exists\, \xi_\nu \in (\nu, z_\nu) : \nu \le \xi_\nu < z_\nu \Rightarrow \boxed{\nu < \xi_\nu}$ ✓

$f(z_\nu) - f(\nu) = \nu f'(\xi_\nu) = \boxed{\frac{\nu}{\xi_\nu}} \xi_\nu f'(\xi_\nu)$

$\xi_\nu f'(\xi_\nu) = \boxed{\frac{\xi_\nu}{\nu}} (f(z_\nu) - f(\nu))$

Λήμμα (1)

Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, β) με την επιπρόσθετη ιδιότητα $f(a) = f(\beta) = 0$

Για $\lambda \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\exists\, \xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$

Λήμμα (2)

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $f(0) = 0$ και $\exists\, M > 0$ ώστε $|f'(x)| \le M|f(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη (1)

$f'(x) - \lambda f(x)$

$G(x) = e^{-\lambda x} f(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \lambda f(x)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{F(x)} = \lambda$

$(\ln f(x))' = (\lambda x)'$

$\Leftrightarrow (\ln f(x) - \lambda x)' = 0$

$(e^{-\lambda x} f(x))'$

(4)
(32)

Άσκηση (2)

Αν δεν είναι $f'(x) \le \mu f(x) \Leftrightarrow -\mu x (f'(x) - \mu f(x)) \le 0$

$\frac{d}{dx}\left(e^{-\mu x} f(x)\right) \le 0$

$\Rightarrow f(x) \le f(0) = 0, \forall x > 0$

$f(x) \ge f(0) = 0, \forall x < 0$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$\sigma(x) = F^2(x)$

$\sigma'(x) = 2F(x) f'(x)$

$|\sigma'(x)| = 2|f(x)||f'(x)|$

$\le 2\mu |F(x)|^2$

$= 2\mu \sigma(x)$

$-2\mu\sigma(x) \le \sigma'(x) \le 2\mu\sigma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$e^{-2\mu x}(\sigma'(x) - 2\mu\sigma(x)) \le 0$

$\Rightarrow (\sigma(x) e^{-2\mu x})' \le 0 \Rightarrow \sigma(x) e^{-2\mu x} \le \underbrace{\sigma(0)}_{0} e^{-2\mu 0}, \quad x > 0$

$F^2(x) = \sigma(x) \le 0, \quad \forall x > 0$

$F(x) = 0, \forall x \ge 0$

Τρίτη 9 Νοεμβρίου 2021

Ανάλυση Ι

ΘΜΤ Cauchy

Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, παραγωγίσιμες στο (a,b)

Τότε $\exists \xi \in (a,b) : (f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$

Παραγωγισιμότητα σύνθεσης συνάρτησης.

Έτοιμος: Αν f παραγωγίσιμη στο x_0, και g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ $x_0 \in A$, $f(x_0) \in B$

$g \circ f : A \to \Gamma$.

Τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Αν $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ h'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

τότε η H συνεχής στο x_0

Απόδειξη

Ορίζουμε $G: B \to \Gamma$.

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}, & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0) \end{cases}$$

Τότε $G(f(x)) = \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x-x_0}$ $\quad G(f(x_0)) \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$x \to x_0 \downarrow$ $\quad \downarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x-x_0} = G(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ $\quad G(f(x_0))$ $\quad f(x_0)$

$= g'(f(x_0)) f'(x_0)$

2)
136

Πρόταση:

Έστω $f:[x_0-\delta, x_0+\delta] \to [f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)]$, γνησίως αύξουσα υποτοπική και f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$. Τότε $f^{-1}:[f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)] \to [x_0-\delta, x_0+\delta]$, είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ορίζουμε $h(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & x \neq x_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & x = x_0 \end{cases}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, $(f'(x_0) \neq 0)$ η h είναι συνεχής στο x_0 $\quad y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} \qquad h(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

$$\lim_{y \to f(x_0)} \{ \quad = \quad \} = \lim_{y \to f(x_0)} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(f(x_0))) = h(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

(ΘΕΩΡΗΜΑ Taylor)

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ παραγωγίσιμη και η $f^{(n-1)}$ παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε $\exists \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

$f \in C[a,b]$, f παραγωγίσιμη στο (a,b) $\qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$

Άσκηση

Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Επιπρόσθετα γνωρίζουμε: $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, $f'(1)=0$. Αποδείξτε ότι $\exists \xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$|f''(\xi)| \geq 4$$

Άσκηση

Αρκεί να δείξω ότι $|f''(x)| \le 4 \quad \forall x \in (0,1)$

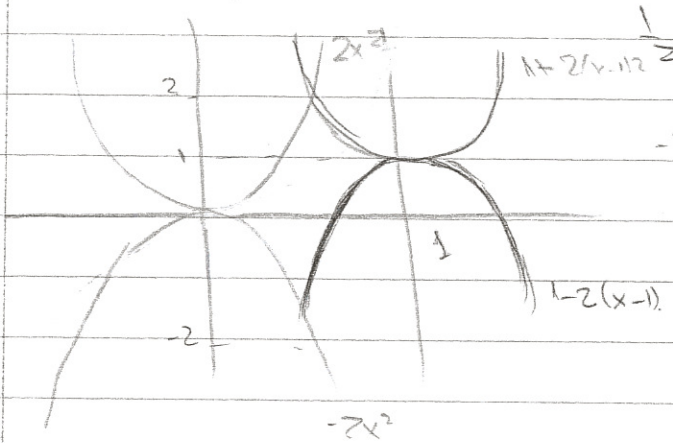
Εφαρμόζουμε Taylor γύρω από το 0, τότε $0<x<1 \; \exists \xi_1 \in (0,x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2$$

$$= 1 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow |f(x)-1| = \frac{|f''(\xi_1)|}{2}(x-1)^2 \le 2|x-1|^2$$

$$-2|x-1|^2 \le f(x)-1 \le 2|x-1|^2$$

$$1-2|x-1|^2 \le f(x) \le 1+2|x-1|^2$$



$$\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le 1+\frac{1}{2}$$

$$-2x^2 \le f(x) \le 2x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση (Taylor)

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \quad x \in [a,\beta]$$

Επιλέγουμε $M \in \mathbb{R}$ ώστε

$f(\beta) = p(\beta) + M\frac{(\beta-a)^n}{n!}$ και διορούμε το, βαθμιαία αυξάνω

$g:[a,\beta] \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = f(x) - p(x) - \frac{M(x-a)^n}{n!}$

Τότε $g(\beta)=0, g(a)=0, g'(a)=0, \dots, g^{(n-1)}(a)=0$

$g(x) = f(x) - p(x) - \frac{M(x-a)^n}{n!}$

$g'(x) = f'(x) - p'(x) - \frac{n}{n!}M\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ $\quad g'(a) = f'(a) - p'(a) = 0$

$\exists \xi_1 \in (a,\beta) \; g'(\xi_1) = 0$ $\Big|$ $\overset{\text{Θ.Ρ.Τ}}{\Rightarrow}$ $[a,\xi_1] \Rightarrow \exists \xi_2 \in (a,\xi_1)$ $\Big|$ $\Rightarrow$

$g'(a) = 0$ $\quad g''(\xi_2) = 0 \Rightarrow a < \xi_3 < \xi_2 < \xi_1$ $\Big|$

$g''(\xi_3) = 0$

$\Rightarrow \exists a < \xi_{n-1} < \xi_{n-2} < \dots < \xi_1 < \beta$

$$\left.\begin{array}{l} g^{(n+1)}(\xi_{n-1}) = 0 \\ g^{(n-1)}(a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a < \xi_n < \xi_{n-1}$$

$$\boxed{g^{(n)}(\xi_n) = 0}$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x) - M\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$0 = g^{(n)}(\xi_n) = \boxed{f^{(n)}(\xi_n) = M}$$

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{M(\beta-a)^n}{n!}$$

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi_n)(\beta-a)^n}{n!}$$

Λημμα

Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε $f(0) = 0$, $f \uparrow$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα

Λυση

Η g είναι παραγωγίσιμη (σαν πηλίκο παραγωγίσιμων)

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \quad x > 0.$$

Όμως $xf'(x) - f(x) = xf'(x) - xf'(\xi_x) = x[f'(x) - f'(\xi_x)] \geq 0$

ΘΜΤ στη f στο $[0,x] \Rightarrow \exists\, \xi_x \in (0,x)$:

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi_x) \Rightarrow f(x) = xf'(\xi_x)$$

Λημμα

Έστω $a > 0$ και $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Τότε:

i) Η f είναι συνεχής

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη για $a > 1$

iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν $a = 1$

ii) $x \neq 0$, $\sin \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη

$|x|^a \quad x \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$g(x) = |x|^a = e^{a \ln |x|}$

$g'(x) = e^{a \ln|x|} (a \ln|x|)' = |x|^a \left(a \cdot \frac{x'}{|x|^2} \right) = a |x|^{a-2} x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^a}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Αν $a > 1$ η f παραγωγίσιμη στο 0, $f'(0) = 0$

$x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Πέμπτη 11 Δεκεμβρίου 2014

Άσκηση 1

Θεώρημα Darboux (Ανάλογο του Θ. Bolzano)

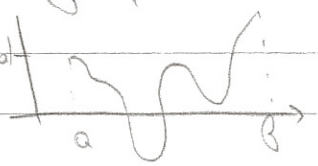
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και έστω $f'(a)<f'(b)$.
Αν $f'(a)<l<f'(b)$ τότε $\exists \xi\in(a,b): f'(\xi)=l$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

Η g να έχει εσωτερικό μέγιστο

$g'(a)=f'(a)-l<0$

$g'(\beta)=f'(\beta)-l>0$



$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$:

$a<x<a+\delta \Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow -\varepsilon+g'(a)<\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<\varepsilon+g'(a)$

$f'(\xi)=l \Rightarrow f'(x)-l|_{x=\xi}=0$

$g(x)=f(x)-lx$

→ Fermat

$\exists \delta>0: \forall x\in(a,a+\delta)$

$g(a)>g(x)$

Απόδειξη

Θεωρώ τη συνάρτηση $g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, με τύπο
$g(x)=f(x)-lx,\ x\in[a,\beta]$.
Η g είναι παραγωγίσιμη σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Βήμα 1ο: Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\exists \delta, 0<\delta<\beta-a$ τέτοιο ώστε

$$g(a)>g(x)\quad \forall x\in(a,a+\delta)$$

Θα χαρακτηρίσουμε τον ορισμό για το όριο ότι
$g'(a)=f'(a)-l<0$. Οπότε επιλέγοντας $\varepsilon=-\frac{g'(a)}{2}>0$, $\exists \beta<\delta<(\beta-a)$
τέτοιο ώστε $a<x<a+\delta$, να έχουμε

$$\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right|<\frac{g'(a)}{2} \Leftrightarrow g'(a)<\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)<-\frac{g'(a)}{2} \quad \forall a<x<a+\delta.$$

$$\frac{3g'(a)}{2}<\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<\frac{g'(a)}{2}<0 \Rightarrow g(x)-g(a)<0,\ \forall x: a<x<a+\delta$$

Βήμα 2ο: $\beta-a>\delta_2>0: g(x)<g(\beta)$, $\forall x\in(\beta-\delta_2,\beta)$

(Με χρήση του ορισμού αν $g'(\beta)>0$ $\varepsilon=\frac{g'(\beta)}{2} \Rightarrow \exists \delta_2>0$:
$\beta-\delta_2<x<\beta$ $\left|\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}-g'(\beta)\right|<\frac{g'(\beta)}{2}$ $\Leftrightarrow$

$$0<\frac{g'(\beta)}{2}<\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}<\frac{3g'(\beta)}{2} \Rightarrow g(x)<g(\beta)$$

(2)
(145)

Επομένως τα σημεία α, β δεν είναι σημεία τοπικού ακροτάτου για τη g. Η ακρότατη τιμή της g στο [α,β] υπάρχει σε σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$
Οπότε από το Θ. Fermat παίρνουμε ότι $g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda$.

Άσκηση

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $2x \le f(x) \le 2x + 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο 0 και βρείτε την $f'(0)$.
ΠΡΟΥΠΟΘ. $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

$$2x \le f(x) \le 2x + 3x^2$$

$x > 0$ $\quad 2 \le \frac{f(x)}{x} \le 2 + 3x$

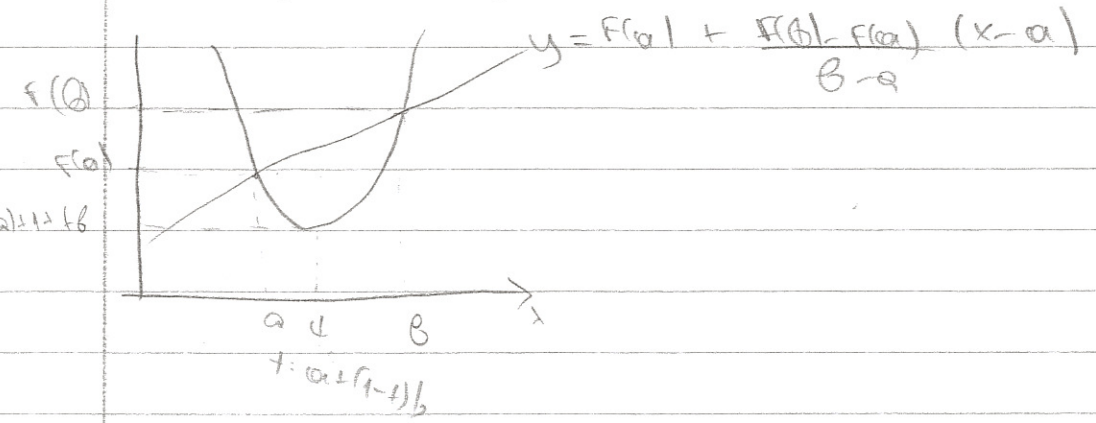
$x < 0$ $\quad 2 \ge \frac{f(x)}{x} \ge 2 + 3x$

Απόδειξη

Για $x = 0$ είναι αυτόματα, παίρνουμε $0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$
Για $x > 0$ έχουμε $2 \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le 2 + 3x$.
Οπότε (από δύο παραβολής) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$ $(f'(0^+) = 2)$
Αντίστοιχα για $x < 0 \Rightarrow$
$2 \ge \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ge 2 + 3x$ και $\exists \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 = f'(0^-)$

και επομένως η f παραγωγίζεται στο 0 με $f'(0) = 2$

Κυρτές Συναρτήσεις



Ορισμός

Η f κυρτή αν $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \forall t \in [0,1]$

$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$

Πρόταση

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ το ακόλουθα είναι ισοδύναμα $x < y < z$

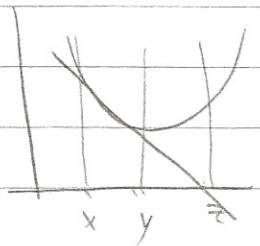
i) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ $\forall x<y<z$

ii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

iii) $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

iv) f κυρτή $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in (0,1)$

$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) - (1-t)f(y)$



Πρόταση

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, τότε είναι συνεχής, μάλιστα είναι τοπικά Lipschitz συναρτήσεις. ($[a,b]$, $\exists M > 0$:

$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x,y \in [a,b]$)

Πρόταση

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) f κυρτή

ii) f' ↑

Πρόταση

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) f κυρτή

ii) $f'' \geq 0$

Λήμμα

α) Έστω $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\ln x$, $x > 0$

Δείξτε ότι είναι κυρτή συνάρτηση.

β) Αποδείξτε την ανισότητα.

(4)
(147)

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \quad \forall x,y,a,b>0$$

a) Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και παίρνω

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad x>0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x>0$$

$\Rightarrow$ f κυρτή συνάρτηση

β) $\forall A,B$, $\forall t\in(0,1)$

$$Q(tA + (1-t)B) \le tQ(A) + (1-t)Q(B)$$

$$A = \frac{x}{a}, \quad B = \frac{y}{b}$$

$$tA + (1-t)B = t\frac{x}{a} + (1-t)\frac{y}{b} \Rightarrow$$

$$t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \frac{x+y}{a+b} - \frac{y}{b}$$

$$A\left(\frac{bx-ay}{ab}\right) = \frac{b(x+y)-y(a+b)}{b(a+b)} = \frac{bx+by-ay-by}{b(a+b)} = \frac{bx-ay}{b(a+b)}$$

επίσης $t = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$

Επειδή συνάρτηση f $\quad f(tA+(1-t)B) \le tf(A) + (1-t)f(B)$

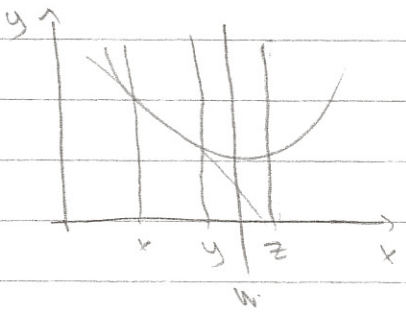
$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le \frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{x+y}{a+b}\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le \frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}$$

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}$$

Τρίτη 16 Δεκεμβρίου 2014
Άσκηση 1

f κυρτή (=) - f κοίλη



$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

Εφαρμογή

$A = \{x>0 \mid x^2 < 2\}$

i) $A \neq \emptyset$

ii) A άνω φραγμένο

iii) $(\sup A)^2 = 2$

Το A είναι μη κενό διάστημα $1 \in A$

Το A είναι άνω φραγμένο, ισχυρίζομαι ότι 2 είναι άνω φράγμα αρκεί $\forall x \in A$ το $\not\exists \Lambda$ άνω φράγμα από το αξίωμα της πληρότητας έχει $\sup A$

(δεν μπορεί το μικρότερο από τα άνω φράγματα)

Θα αποδείξουμε με ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ, δηλ. υποθέτουμε ότι $(\sup)^2 \neq 2$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

α) $(\sup A)^2 > 2$

β) $(\sup A)^2 < 2$

α) Αν $(\sup A)^2 > 2$ θα βρούμε $\varepsilon > 0$ (μικρό) ώστε $\sup A - \varepsilon$ δεν να μαντάρει $(\sup A - \varepsilon)^2 > 2 \Leftrightarrow$

$(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A + \varepsilon^2 > 2$.

Αρκεί $(\sup A)^2 - 2\varepsilon \sup A > 2 \Leftrightarrow 2\varepsilon \sup A < (\sup A)^2 - 2 \Leftrightarrow$

$\varepsilon < \frac{(\sup A)^2}{2 \sup A}$ $\quad 0 < \varepsilon < \frac{(\sup A)^2 - 2}{2 \sup A}$

2)
(4η)

β) $(\sup A)^2 < 2$ Θα βρούμε $u > 0$ ώστε

$(\sup A + u)^2 < 2 \quad (*)$

$\Rightarrow \sup A + u \in A \Rightarrow \sup A \geq \sup A + u \in \mathbb{R} \Rightarrow u \leq 0$

$(*) \Leftrightarrow (\sup A)^2 + 2\sup A\, u + u^2 < 2 \qquad u^2 \leq u$

ΑΡΚΕΙ $\boxed{(\sup A)^2 + 2\sup A\, u + u^2 < 2} \Leftrightarrow$

$(2\sup A + 1)u < 2 - (\sup A)^2$

$0 < u < \dfrac{2 - (\sup A)^2}{2\sup A + 1} \qquad 0 < u \leq 1$

i) $\inf A \leq a \quad \forall a \in A, \ \inf A \leq 0$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in A, \ b < \inf A + \varepsilon$.

Άσκηση

Έστω $f: (1, +\infty)$, 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$\exists K > 0 \ / \ |f(x)| \leq K, |f''(x)| \leq K, \ \forall x \in (1, +\infty)$.

Ορίζουμε $M_0 = \sup\{|f(x)| \ \forall x > 1\}$

$M_2 = \sup\{|f''(x)| \ \forall x > 1\}$.

Αποδείξτε ότι $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2, \ \forall x > 1$

Οπότε αν $M_1 = \sup\{|f'(x)| : x > 1\}$, τότε $M_1^2 \leq 2M_0M_2$

Λύση

Taylor γύρω από το $y > 1$

Έστω $x > y$

Τότε $\exists \xi \in (y, x) : f(x) = f(y) + \dfrac{f'(y)}{1!}(y - x) + \dfrac{f''(\xi)}{2!}(y - x)^2$

$\Rightarrow -f'(y)(y - x) = f(y) - f(x) + \dfrac{f''(\xi)}{2}(y - x)^2$

$-f'(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} + \dfrac{f''(\xi)}{2}(y - x)$

$\Rightarrow |f'(y)| \leq \dfrac{|f(y) - f(x)|}{x - y} + \dfrac{|f''(\xi)|}{2}(x - y) \leq \dfrac{|f(y)| + |f(x)|}{x - y} + \dfrac{|f''(\xi)|}{2}(x - y)$

$M_0 := \sup\{|f(x)| : x > 1\} \overset{\text{supremum}}{\Rightarrow} |f(x)| \leq M_0$

$$|f'(y)| \le \frac{2M_0}{(x-y)} + \frac{M_2(x-y)}{2}$$

$$|f'(y)| \le \underbrace{\frac{2M_0}{t} + \frac{M_2}{2}t}_{\varphi(t)}, \quad t>0 \text{ όπου } x>y$$

$$\varphi'(t) = -\frac{2M_0}{t^2} + \frac{M_2}{2}$$

$$\varphi''(t) = \frac{4M_0}{t^3} > 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{4M_0}{M_2} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

$$\Rightarrow |f'(y)| \le \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{M_2}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} = 2\sqrt{M_0M_2}$$

$|f'(y)| \le 2\sqrt{M_0M_2}$ < αυτό χρειάζομαι

$\xi |f'(x)|, x>1\xi \Rightarrow M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2} \Rightarrow M_1^2 \le 4M_0M_2$

Λαμπα

Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^{2014} + ax^2 - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

Λύση

Μελετάμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο

$f(x) = x^{2014} + ax^2 - 1$, $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι απείρες φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση

$f'(x) = 2014x^{2013} + 2ax = 2x\underbrace{[1007x^{2012} + a]}_{\text{θετικό}}$

$\Rightarrow f'(x)<0$, $x<0 \Rightarrow f\downarrow (-\infty, 0]$

$f'(x)>0$, $x>0 \Rightarrow f\uparrow [0, +\infty)$.

$f(0) = -1 < 0$. Επειδή $f(0)f(1) = -a < 0$ } Bolzano

η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα (ρ2) στο $(0,1)$

Παρόμοια $f(-1)f(0) = -a < 0$, η f έχει μία ρίζα (ρ1) στο $(-1,0)$

Έστω $(-1,0)$ η f δεν έχει άλλη ρίζα, διότι αν $x_1 \ne \rho_1$ ρίζα

αν $x_1 < \rho_1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x_1) > f(\rho_1) \Rightarrow 0>0$ άτοπο.

Θ.Μ.Τ. x_1, ρ_1 $f(x_1) - f(\rho_1) = f'(\xi)(x_1 - \rho_1)$