Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

2017

Άλκης Τερσένοβ

Οι σημειώσεις αυτές είναι η συνέχεια του πρώτου μέρους των σημειώσεων "Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις" και αφορούν την ποιοτική θεωρία των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων.

§1. Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y) \quad x \in I \subset \mathbf{R}. \tag{1.1}$$

Πρόβλημα $Cauchy$ (ή πρόβλημα αρχικών τιμών):

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.1) η οποία στο σημείο $x_0 \in I$ παίρνει δοσμένη εκ των προτέρων τιμή y_0, δηλαδή

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.2}$$

η συνθήκη (1.2) ονομάζεται αρχική συνθήκη.

(Σχετικά με το τι σημαίνει "λύση της διαφορικής εξίσωσης" βλ. της σημειώσεις "Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις".)

Για να αποδείξουμε οτι η λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) υπάρχει θα χρειαστούμε μερικά εργαλία απο την Ανάληση τα οποία για την διευκόλυνση της ανάγνωσης θα τα αναφέρουμε.

Ορισμός. *Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην συνάρτηση $\phi(x)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.*

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon \;\; \forall n > n(\varepsilon) \;\; \textit{και} \;\; \forall x \in I.$$

Κριτήριο $Cauchy$. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ορισμένων σε ενα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ (που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του $x \in I$) τ.ω.*

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| \leq \varepsilon \;\; \forall n, m > n(\varepsilon) \;\; \textit{και} \;\; \forall x \in I.$$

Για παράδειγμα η ακολουθία $\phi_n(x) = x^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$, ενώ στο διάστημα $[0, 1-\delta]$ $\forall \delta \in (0, 1)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\phi(x) \equiv 0$.

Θεώρημα. *Αν η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε το όριο είναι συνεχής συνάρτηση.*

Αυτό δεν ισχύει αν η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Πράγματι η ακολουθία συνεχών στο $[0, 2]$ συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{για } \; x \in [0, 1) \\ 1, & \text{για } \; x \in [1, 2] \end{cases}$$

συγκλίνει κατα σημείο (οχι ομως ομοιόμορφα) στην συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } \; x \in [0, 1) \\ 1, & \text{για } \; x \in [1, 2] \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συναρτησιακή σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x), \quad x \in I$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο I *αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυτης της σειράς. Δηλαδή αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία*

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x).$$

Είναι αυτονόητο οτι οι συναρτήσεις h_i θεωρούνται ορισμένες στο I.

Κριτήριο $Weierstrass$**.** *Έστω οτι η αριθμητική σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad a_i \geq 0$$

συγκλίνει, και έστω οτι

$$|h_i(x)| \leq a_i, \quad \forall x \in I, i = 0, 1, 2, \dots .$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο I.

Ο τελευταίος ορισμός που θα μας χρειαστεί:

Ορισμός. *Λέμε ότι η* $f(x, y)$ *ικανοποιεί την συνθήκη του* $Lipschitz$ *(ή είναι* $Lipschitz$ *συνεχής) ως προς* y *σε ένα χωρίο* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *αν*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

1. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

με συνεχείς στο διάστημα I συναρτήσεις $a(x)$, $b(x)$ επαληθευει τη συνθήκη του $Lipschitz$ για κάθε $x \in I$ και για κάθε $|y| < \infty$. Πράγματι εδώ

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |a(x)y_2 - a(x)y_1| \leq K|y_2 - y_1|$$

με $K = \sup_I |a(x)|$.

2. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sin y \quad (\text{ή} \quad \cos y)$$

επαληθευει τη συνθήκη του $Lipschitz$ και για κάθε $|y| < \infty$ με $K = 1$. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής $\exists \xi \in [y_1, y_2]$ τ.ω.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |\sin y_2 - \sin y_1| = |\cos \xi||y_2 - y_1| \leq |y_2 - y_1|.$$

3. Οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = y^2 \ \text{ και } \ f(x, y) = 1 - y^2$$

επαληθευουν τη συνθήκη του $Lipschitz$ και για κάθε $|y| < l$ με $K = 2l$. Πράγματι,

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1| \leq 2l|y_2 - y_1|.$$

παρατηρούμε οτι εδω η σταθερά K εξαρτάται απο το μέγεθος του χωρίου ως προς το y, δηλαδή αν το χωρίο δεν είναι φραγμένο ως προς y τότε οι συναρτήσεις αυτές δεν ικανοποιούν την συνθήκη του $Lipschitz$.

4. Η συνάρτηση

$$f(x,y) = y^{1/3}$$

δεν επαληθευει τη συνθήκη του $Lipschitz$ σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το $y = 0$. Πράγματι, $\exists \xi \in [y_1, y_2]$ τ.ω.

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2^{1/3} - y_1^{1/3}| = \frac{1}{3}|\xi|^{-2/3}|y_2 - y_1|$$

(εδω πάλι χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής). Προφανώς $|\xi|^{-2/3}$ τείνει στο άπειρο καθώς ξ τείνει στο μηδέν.

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να διατυπώσουμε το Θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.($Picard$) *Έστω οτι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής ως προς x σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ (όχι απαραίτητα φραγμένο) και ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ ως προς y για οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο χωρίο $\bar{\Omega}'$ που ανήκει εξολοκλήρου στο Ω (η σταθερά K μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή του Ω').*
Τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in \Omega$ υπάρχει ένα διάστημα (a,b), το οποίο περιέχει το σημείο x_0, όπου υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος $Cauchy$ (1.1), (1.2).

Απόδειξη (μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων). Αν υποθέσουμε ότι η λύση υπάρχει, τότε ολοκληρώνοντας την ταυτότητα

$$y'(\xi) \equiv f(\xi, y(\xi)) \tag{1.3}$$

από το x_0 έως το x θα πάρουμε

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{1.4}$$

Το x στο (1.4) μπορεί να είναι μεγαλύτερο του x_0 μπορεί να είναι και μικρότερο του x_0. Αφού η $y(x)$ είναι λύση της (1.3), τότε είναι παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής, άρα συνεχής είναι και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στην (1.4). Η σχέση (1.4) ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση. Οποιαδήποτε λύση της (1.3) που ικανοποιεί την $y(x_0) = y_0$ αποτελεί την λύση της (1.4). Επίσης οποιαδήποτε συνεχής λύση της (1.4) ικανοποιεί την (1.3) και την $y(x_0) = y_0$. Αυτό αμέσως προκύπτει από την (1.4) μετά την παραγώγιση και των δυο μελών της. Η πράξη της παραγώγισης μπορεί να εφαρμοστεί επειδή μετά την αντικατάσταση στην (1.4) της λύσης $y(x)$ στο δεξί μέλος, ως αποτέλεσμα έχουμε ότι το δεξί μέλος έχει την παράγωγο ως προς x. Άρα την παράγωγο ως προς x έχει και το αριστερό μέλος, δηλαδή η $y(x)$. Επομένως οι (1.3) και (1.4) είναι ισοδύναμες. Θα αποδείξουμε ότι η (1.4) έχει μια και μοναδική λύση και ως συνέπεια θα έχουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα για το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1), (1.2).

Έστω $A(x_0, y_0) \in \Omega' \subset \Omega$ και έστω $M = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}'} |f(x, y)|$ (βλ. σχήμα 1, σελ. 80). Σχεδιάζουμε δυο ευθείες l_1 και l_2 που περνάν από το σημείο (x_0, y_0) και έχουν κλίσεις $\pm M$ αντίστοιχα (δηλαδή έχουν τη μορφή $y = Mx + (y_0 - Mx_0)$, $y = -Mx + (y_0 + Mx_0)$). Σχεδιάζουμε επίσης δυο ευθείες $x = a$ και $x = b$ (παράλληλες με τον y-άξονα με $a < x_0 < b$) έτσι ώστε και τα δυο τρίγωνα ADB και AEC να ανήκουν στο Ω' και

$$K(b - a) < 1.$$

Εδώ $B = \{x = a\} \cap l_1$, $C = \{x = b\} \cap l_1$,$D = \{x = a\} \cap l_2$, $E = \{x = b\} \cap l_2$.

Θα διαλέξουμε μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση $\phi_0(x)$ το γράφημα της οποιας στο διάστημα $[a, b]$ ανήκει εξολοκλήρου στα τρίγωνα ADB και AEC και $\phi_0(x_0) = y_0$. Αντικαθιστούμε την $y(\xi)$ με την $\phi_0(\xi)$ στο δεξί μέρος της (1.4). Είναι προφανές ότι μετά την αντικατάσταση το δεξί μέρος της (1.4) θα είναι συνεχής συνάρτηση του x και στο σημείο $x = x_0$ παίρνει την τιμή y_0. Θα την συμβολίσουμε με

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_0(\xi))d\xi. \tag{1.5}$$

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι το γράφημα της $\phi_1(x)$ δεν βγαίνει έξω από τα τρίγωνα ADB και AEC. Πράγματι, $|f(\xi, \phi_0(\xi))| \leq M$, αφού $\phi_0(\xi) \in \Omega'$ και επομένως

$$|\phi_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \phi_0(\xi))|d\xi \right| \leq M|x - x_0|$$

η οποία προκύπτει από την (1.5) (θυμίζουμε οτι το x μπορεί να είναι μικρότερο του x_0). Θέτουμε

$$\phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_1(\xi))d\xi.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της $\phi_1(x)$ είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι $\phi_2(x)$ έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με την $\phi_1(x)$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία θα πάρουμε μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής :

$$\phi_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_2(\xi))d\xi.$$

$$\cdots$$

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))d\xi. \tag{1.6}$$

$$\cdots$$

Οι συναρτήσεις $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), ...$ ονομάζονται διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης. Έτσι καταλήγουμε σε μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_0(x),\ \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), ... \tag{1.7}$$

με $\phi_i(x_0) = y_0\ \forall i$, τα γραφήματα των οποίων βρίσκονται στα τρίγωνα ADB και AEC. Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία (1.7) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχής συνάρτηση $\phi(x)$, που είναι η λύση της (1.4). Είναι προφανές ότι

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)].$$

Επομένως για να αποδείξουμε ότι η (1.7) συγκλίνει ομοιόμορφα αρκεί να δείξουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά

$$(1.8)\quad \phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)] + \cdots$$

δηλαδή η

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x), \quad \text{όπου}\ \ h_0(x) = \phi_0(x), \ \ h_i(x) = \phi_i(x) - \phi_{i-1}(x), \ \ i = 1, 2, \ldots.$$

Προφανώς τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής είναι οι συναρτήσεις της ακολουθίας (1.7)

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x).$$

Θα εκτιμήσουμε τους όρους της σειράς, έχουμε (σημειώνουμε οτι το x μπορεί να είναι και μικρότερο του x_0)

$$|h_{n+1}(x)| = |\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi_n(\xi)) - f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))] d\xi \Big| \leq$$

$$\leq K \Big| \int_{x_0}^{x} |\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| d\xi \Big| \leq \int_{a}^{b} |\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| d\xi$$

$$K \max_{a \leq x \leq b} |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|\, (b - a).$$

Η σταθερά K παραμένει ίδια επειδή όλες οι συναρτήσεις ϕ_n βρίσκοντε στο ίδιο χωρίο, αν το χωρίο θα άλλαζαι τότε και η σταθερά K μπορεί να άλλαζε. Έστω $|\phi_0(x)| \leq L$, $|\phi_1(x)| \leq L$ και $(b-a)K = m$, τότε η απόλυτη τιμή των μελών της (1.8) δεν υπερβαίνει τα αντίστοιχα μέλη της σειράς

$$L + 2L + 2Lm + 2Lm^2 + \cdots + 2Lm^n + \cdots$$

η οποία είναι συγκλίνουσα όταν $m < 1$ και ισούται με $L + \frac{2L}{1-m}$. Ας θυμηθούμε οτι το διάστημα $[a, b]$ το επιλέξαμε ετσι ώστε

$$K(b - a) = m < 1.$$

Άρα η σειρά (1.8) ομοιόμορφα συγκλίνει και το άθροισμα αυτής της σειράς, δηλαδή η $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και διαθέτει όλες τις ιδιότητες που έχουν οι $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi)) d\xi$ έχει νόημα. Επειδή

$$\Big| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))] d\xi \Big| \leq K \Big| \int_{x_0}^{x} |\phi(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| d\xi \Big| \to 0, \ \ n \to \infty$$

μπορούμε να περάσουμε στο όριο όταν $n \to \infty$ και στο δεξί μέρος της (1.6) και επομένως $\phi(x)$ ικανοποιεί την (1.4).

Αποδείξαμε την ύπαρξη της λύσης.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης θα υποθέσουμε το αντίθετο. Έστω οτι υπάρχει η λύση $\phi(x)$ και καποια άλλη λύση $v(x)$. Τότε

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi))d\xi$$

και

$$v(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, v(\xi))d\xi.$$

Επομένως

$$|\phi(x) - v(x)| = |\int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, v(\xi))]d\xi| \leq K(b-a) \max_{x \in [a,b]} |\phi(x) - v(x)|$$

Αρα

$$\max_{x \in [a,b]} |\phi(x) - v(x)| \leq K(b-a) \max_{x \in [a,b]} |\phi(x) - v(x)| \tag{1.9}$$

Αφού $K(b-a) < 1$ η (1.9) μπορεί να ισχύει μόνο στην περίπτωση

$$|\phi(x) - v(x)| \equiv 0,$$

δηλαδή όταν $\phi(x) \equiv v(x)$.

$\square$

Το θεώρημα 1.1 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας (ενδεχομένως μικρής) περιοχής γύρο από το σημείο x_0 όπου υπάρχει λύση του προβλήματος (1.1), (1.2). Τέτοια λύση ονομάζεται *τοπική λύση*. Αν η λύση υπάρχει σε όλο το διάστημα (ως προς τη μεταβλητή x) όπου μελετάμε το πρόβλημα, τότε μιλάμε για *ολική λύση* του προβλήματος (1.1), (1.2). Παραδείγματος χάριν το πρόβλημα

$$y' = y, \;\; y(0) = 1$$

έχει ολική λύση $y = e^x$ διότι η λύση υπάρχει για όλες τις τιμές της μεταβλητής x, παρομοίως το πρόβλημα

$$y' = 1 - y^2, \;\; y(0) = 0$$

έχει ολική λύση

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Αντίθετα το πρόβλημα

$$y' = y^2, \;\; y(0) = 1$$

έχει τοπική λύση

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

διότι η λύση υπάρχει μόνο για $x < 1$, παρομοίως το πρόβλημα

$$y' = -y^3, \;\; y(0) = 2$$

έχει τοπική λύση

$$y = \frac{1}{(2x + 1/4)^{1/2}}$$

διότι η λύση υπάρχει μόνο για $x > -1/8$.

Παράδειγμα 1.1 Δώστε παράδειγμα προβλήματος *Cauchy* όπου η λύση υπάρχει μόνο σε ένα φραγμένο διάστημα.

Λύση. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$y' = (2x+2)y^2, \quad y(0) = 1/3.$$

Προφανώς η λύση δίνεται απο τον τυπο

$$y = \frac{1}{3 - 2x - x^2}$$

και υπάρχει μόνο στο διάστημα $(-3, 1)$.

Έστω ότι η $f(x, y)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[c, d]$ (που περιέχει το $[a, b]$). Το εύλογο ερώτημα είναι γιατί αφού κατασκευάσαμε τη λύση στο $[a, b]$ δεν μπορούμε να πάρουμε αρχική συνθήκη στο σημείο $x_0 = b$ και να κινηθούμε προς τα δεξιά κατασκευάζοντας τη λύση σε κάποιο $[b, b_1]$ μετά στο $[b_1, b_2]$ ... $[b_{n-1}, b_n]$ ... και συνεχίζοντας να φτάσουμε στο σημείο d; Παρομοίως προς τα αριστερά μέχρι να φτάσουμε στο σημείο c κατασκευάζοντας έτσι την ολική λύση. Προφανώς σε κάποιες περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό, και σε κάποιες όχι (βλ. τα προηγούμενα δυο παραδείγματα). Γιατί όμως δεν είναι εφικτό πάντα; Η απάντηση είναι απλή: διότι εν γένει $|b_n - b_{n-1}| \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα αρκετά γρήγορα έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} b_n < d$$

με αποτέλεσμα να μην φτάσουμε ποτέ στο σημείο d (ή παρομοίως στο σημείο c ή και στα δύο). Άρα για να μπορέσουμε να φτάσουμε στο σημείο d πρέπει τα διαστήματα $[b_{n-1}, b_n]$ να μην τείνουν στο μηδέν ή τουλάχιστον να μην τείνουν στο μηδέν πολύ γρήγορα. Το μήκος του διαστήματος όπου υπάρχει η τοπική λύση καθορίζεται από την σχέση

$$b - a < \frac{1}{K}$$

η σταθερά K εξαρτάται από την επιλογή του Ω', αν θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την σταθερά αυτή ανεξάρτητα από την επιλογή του Ω' τότε το κάθε διάστημα $[b_{n-1}, b_n]$ θα είχε ίδιο μήκος και θα μπορούσαμε να φτάσουμε στο σημείο d. Αυτό είναι εφικτό αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η λύση που ψάχνουμε (αν υπάρχει) είναι φραγμένη στο $[c, d]$. Άρα αν στο Θεώρημα 1.1 γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι υπάρχει μια σταθερά C_0 τ.ω. η λύση (αν υπάρχει) φράσσεται με αυτή τη σταθερά στο Ω ($|y(x)| \leq C_0 \; \forall x \in \Omega$) τότε υπάρχει ολική λύση του προβλήματος (1.1), (1.2). Τέτοιου είδους εκτιμήσεις ονομάζονται *apriori* (εκ των προτέρων) εκτιμήσεις (βλ. Παράδειγμα 1.9).

Θα διατυπώσουμε τώρα μια άλλη συνθήκη (και θα δώσουμε εδώ αυστηρή απόδειξη) που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της ολικής λύσης.

Θεώρημα 1.2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ που περιέχει την λωρίδα $c \leq x \leq d$, $-\infty < y < +\infty$.*

Τότε για οποιοδήποτε $(x_0, y_0) \in \Omega$ υπάρχει μια και μοναδική λύση της εξίσωσης (1.1) ορισμένη στο $[c, d]$ που ικανοποιεί την συνθήκη (1.2).

Παρατήρηση. Η γραμμική εξίσωση

$$y' = a(x)y + b(x)$$

με συνεχείς στο $[c, d]$ συναρτήσεις $a(x)$ και $b(x)$ επαληθεύει τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 όπως επήσης και η εξίσωση

$$y' = a(x) \sin\, y + b(x).$$

Απόδειξη (του Θεωρήματος 1.2). Παίρνουμε ως $\phi_0(x)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[c, d]$ και $\phi_0(x_0) = y_0$. Όλες οι διαδοχικές προσεγγίσεις

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))d\xi \tag{1.10}$$

υπάρχουν στο διάστημα $[c, d]$ και είναι συνεχείς, άρα είναι φραγμένες στο $[c, d]$. Θα δείξουμε ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στην λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[c, d]$. Έστω $\max_{x\in[c,d]} |\phi_1(x) - \phi_0(x)| = N$. Τότε

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)| = \Big|\int_{x_0}^{x}[f(\xi, \phi_1(\xi))-f(\xi, \phi_0(\xi))]d\xi\Big| \leq K\Big|\int_{x_0}^{x}|\phi_1(\xi)-\phi_0|d\xi\Big| \leq$$

$$\leq K|\int_{x_0}^{x} N d\xi| = \frac{|x - x_0|}{1} NK,$$

$$|\phi_3(x) - \phi_2(x)| = \Big|\int_{x_0}^{x}[f(\xi, \phi_2(\xi)) - f(\xi, \phi_1(\xi))]d\xi\Big| \leq$$

$$K\Big|\int_{x_0}^{x}|\phi_2(\xi) - \phi_1(\xi)|d\xi\Big| \leq NK^2\Big|\int_{x_0}^{x}|\xi - x_0|d\xi\Big| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} NK^2.$$

Και γενικώς

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} NK^n. \tag{1.11}$$

Η σειρά

$$\frac{|x - x_0|}{1!} NK + \frac{|x - x_0|^2}{2!} NK^2 + \cdots + \frac{|x - x_0|^n}{n!} NK^n + \cdots$$

συγκλίνει για όλες τις τιμές $|x - x_0|$ (απο κριτήριο $d'Alembert$). Επομένως και η σειρά (1.8) ομοιόμορφα συγκλίνει στο διάστημα $[c, d]$ (απο κριτήριο $Weierstrass$).

□

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\phi(x) = \phi_m(x) + [\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)] + \cdots$$

και την εκτίμηση (11.1) παίρουμε

$$|\phi(x)-\phi_m(x)|\le NK^m|x-x_0|^m[\frac{1}{m!}+K\frac{|x-x_0|}{(m+1)!}+K^2\frac{|x-x_0|^2}{(m+2)!}+\cdots].$$

Η τελευταία σχέση είναι η εκτίμηση της απόκλισης της m-οστης προσέγγισης από την ακριβή λύση.

Παράδειγμα 1.2. Κατασκευάστε τις διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y'=y,\ \ y(0)=1,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0\equiv 1$.

Λύση. Από τον τύπο (1.6) έχουμε

$$\phi_1(x)=1+\int_0^x d\xi=1+x,$$

$$\phi_2(x)=1+\int_0^x(1+\xi)d\xi=1+x+x^2/2,$$

$$\phi_3(x)=1+\int_0^x(1+\xi+\xi^2/2)d\xi=1+x+x^2/2+x^3/6,$$

$$\cdots$$

$$\phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\to e^x\ \ \text{καθώς}\ \ n\to\infty.$$

Παράδειγμα 1.3 Κατασκευάστε τις τρεις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος

$$y'=e^y,\ \ y(0)=0,$$

παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0\equiv 0$.

Λύση. Από τον τύπο (1.6) έχουμε

$$\phi_1(x)=\int_0^x d\xi=x,$$

$$\phi_2(x)=\int_0^x e^{\xi}d\xi=e^x-1,$$

$$\phi_3(x)=\int_0^x e^{e^{\xi}-1}d\xi=\frac{1}{e}\int_0^x e^{e^{\xi}}d\xi.$$

Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι ένα χρήσιμο εργαλείο σε πολλά άλλα προβλήματα ανάλυσης.

Παρατήρηση. Μπορούμε να ξεκινήσουμε την κατασκευή των προσεγγίσεων από οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $\phi_0(x)$, αρκεί μόνο το γράφημά της να είναι μέσα στο Ω'. Αφού οι συνθήκες του θεωρήματος μας εξασφαλίζουν την μοναδικότητα πάντα θα καταλήγουμε με την διαδικασία που περιγράψαμε στην λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την (1.1).

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης μπορούν να αποδειχτούν υπό πιο γενικές προϋπόθεσης. Θα διατυπώσουμε τα σχετικά θεωρήματα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα ύπαρξης 1.3 *(Peano). Έστω η $f(x,y)$ είναι φραγμένη και συνεχής στο ανοιχτό χωρίο Ω. Τότε από κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega$ περνάει τουλάχιστον μια τοπική λύση της (1.1).*

Αν η $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση, τοτε, εν γένει η λύση δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1.4. Παραδείγματος χάριν το πρόβλημα

$$y'(x) = sign\, x, \quad y(0) = y_0.$$

δεν έχει λύση. Εδω

$$sign\, x = \begin{cases} 1, & \text{για } x > 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \\ -1, & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

Πράγματι, παίρνοντας περιπτώσεις $x > 0$ και $x < 0$, ευκολα διαπιστώνουμε οτι η μοναδική "υποψήφια" λύση είναι η συνάρτηση

$$y(x) = y_0 + |x|$$

η οποία όμως δεν εχει παράγωγο στο $x = 0$ (λύση ονομάζουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση).

Παράδειγμα 1.5. Δεν εχει λύση για $x > 0$ το πρόβλημα

$$y'(x) = -sign\, y, \quad y(0) = 0$$

με

$$sign\, y = \begin{cases} 1, & \text{για } y \geq 0 \\ -1, & \text{για } y < 0 \end{cases}.$$

Πράγματι, έστω οτι η λύση υπάρχει σε ενα διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Θεωρούμε τα σημεία $x > 0$. Έστω οτι η λύση σε κάποιο $(0, \varepsilon_1)$ είναι μη αρνητική (εδώ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$). Σε αυτά τα σημεία η εξίσωση γράφεται ως

$$y'(x) = -1 \ \text{ άρα } \ y(x) = -x.$$

Όμως η $y(x) = -x$ είναι μη αρνητική μόνο για $x < 0$, αρα η λύση δεν μπορεί να είναι μη αρνητική στο $(0, \varepsilon_1)$. Ας υποθέσουμε τώρα οτι η λύση στο $(0, \varepsilon_1)$ είναι αρνητική. Τότε σε αυτά τα σημεία η εξίσωση γράφεται ως

$$y'(x) = 1 \ \text{ άρα } \ y(x) = x.$$

Πάλι η $y(x) = x$ είναι αρνητική μόνο για $x < 0$. Συνεπώς η λύση δεν υπάρχει για κανένα $x > 0$.

Ευκολα διαπιστώνουμε οτι για $x \leq 0$ η λύση υπάρχει και είναι $y(x) = -x$ (βλ. Άσκηση 1.11).

Τώρα σχετικά με την μοναδικότητα. Η συνέχεια της $f(x,y)$ δεν μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών. Έχουμε αποδείξει τη μοναδικότητα στην περίπτωση που η $f(x,y)$ επιπλέον επαληθεύει τη συνθήκη *Lipschitz* ως προς τη μεταβλητή y. Ισχύει πιο γενικό θεώρημα.

Θεώρημα μοναδικότητας 1.4 *(Osgood). Έστω η $f(x,y)$ για οποιαδήποτε σημεία (x, y_1) και (x, y_2) στο Ω ικανοποιεί την συνθήκη*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \phi(|y_2 - y_1|) \tag{1.12}$$

όπου $\phi(u) > 0$ όταν $0 < u \le a$. Εδώ η $\phi(u)$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{du}{\phi(u)} \to \infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

Τότε μέσω οποιουδήποτε σημείου (x_0, y_0) από το Ω περνάει το πολύ μια λύση της εξίσωσης (1.1).

Π.χ. ως $\phi(u)$ μπορούμε να πάρουμε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$Ku, \quad Ku|\ln u|, \quad Ku|\ln u|\ln|\ln u|, \ldots$$

όπου K είναι σταθερά. Όταν $\phi(u) \equiv Ku$ τότε η (1.12) παίρνει την μορφή

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le K|y_2 - y_1|$$

που είναι η συνθήκη $Lipschitz$ ως προς τη μεταβλητή y.

Παράδειγμα 1.6. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0. \tag{1.13}$$

Προφανώς η $f(y) = \sqrt{y}$ δέν είναι $Lipschitz$ συνεχής ούτε επαληθεύει τις συνθήκες του θεωρήματος $Osgood$. Θα δείξουμε οτι το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.13) έχει τουλάχιστον δυο λύσεις (βλ. Άσκηση 1.13). Πράγματι, αντικαθιστώντας την γενική λύση της εξίσωσης, η οποία για $x + C \ge 0$ δυνεται από τον τύπο

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x + C)^2$$

(C αυθαίρετη σταθερά), στην αρχική συνθήκη παίρνουμε ότι η

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & \text{για } x \ge 0 \\ 0, & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

είναι λύση του προβλήματος (1.13). Όμως ταυτόχρονα και η $y(x) \equiv 0$ είναι λύση του προβλήματος (1.13). Η μοναδικότητα παραβιάζεται. Προφανώς και η συνάρτηση

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - K)^2, & \text{για } x \ge K \\ 0, & \text{για } x < K \end{cases}$$

για κάθε σταθερά $K > 0$ είναι λύση του προβλήματος (1.13), αρα το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

□

Τωρα σχετικά με την ομαλότητα της λύσης. Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1.1, αν η $f(x,y)$ είναι συνεχής ως προς x και $Lipschitz$ συνεχής ως προς y, τότε υπάρχει λύση $y(x)$ του προβλήματος $Cauchy$ η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Πράγματι η $y(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση (ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων) που λύνει την ολοκληρωτική εξίσωση (1.4) δηλαδή

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi,$$

η σύνθεση $f(x, y(x))$ είναι επίσης συνεχής (ως προς x) άρα το δεξί μέρος της ταυτότητας είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x συνάρτηση συνεπώς και το αριστερό μέρος επίσης.

Αν τώρα η συνάρτηση $f(x,y)$ εχει περισσότερη ομαλότητα, τη επίδραση θα έχει αυτό στη ομαλότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$;

Θεώρημα1.5. *(αύξησης της ομαλότητας). Αν η $f(x,y)$ είναι της κλάσεως C^k, $k=1,2,...$ ως προς x και y σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0), τότε η λύση της (1.1) που ικανοποιεί την συνθήκη $y(x_0)=y_0$ θα είναι της κλάσεως C^{k+1} ως προς x σε μια περιοχή του σημείου x_0.*

Απόδειξη. Έστω $k=1$. Η $y(x)$ είναι λύση της (1.1) άρα η $y(x)$ ικανοποιεί την ταυτότητα

$$y'(x) \equiv f(x,y(x)). \tag{1.14}$$

Το δεξί μέρος της (1.14) ως συνάρτηση του x έχει παράγωγο ως προς x. Πράγματι,

$$\frac{df(x,y(x))}{dx} = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x). \tag{1.15}$$

Επομένως η $y'(x)$ έχει την παράγωγο ως προς x. Αφού η (1.15) είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και η $y''(x)$.

Έστω $k=2$. Το δεξί μέρος της (1.14) ως συνάρτηση του x έχει δευτερη παράγωγο ως προς x. Πράγματι, παραγωγίζοντας την σχέση (1.15) παίρνουμε

$$\frac{d^2f(x,y(x))}{dx^2} = f_{xx}(x,y(x)) + f_{xy}(x,y(x))y'(x) +$$
$$\big(f_{yx}(x,y(x)) + f_{yy}(x,y(x))y'(x)\big)y'(x) + f_y(x,y(x))y''(x).$$

Επομένως η $y''(x)$ έχει την παράγωγο ως προς x η οποία είναι συνεχής.

Παρομοίως αποδεικνύουμε το θεώρημα και για $k=3,4,....$

□

Μέχρι στιγμής μελετούσαμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών $y'=f(x,y),\ \ y(x_0)=y_0$. Αν όμως θα μεταβάλλουμε τα σημεία x_0, y_0 θα μεταβληθεί και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Εμφανίζεται μια σημαντική ερώτηση: πως θα μεταβάλλεται η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών καθώς μεταβάλλεται το σημείο (x_0,y_0); Αυτή η ερώτηση είναι μεγάλης σημασίας ιδιαίτερα στις εφαρμογές. Έστω μελετάμε ένα πρόβλημα φυσικής που ανάγεται στην μελέτη ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται πειραματικά, και επομένως δεν μπορούν να βρεθούν με απόλυτη ακρίβεια. Συνεπώς στις εφαρμογές μια λύση που παίρνει την τιμή y_0 στο σημείο x_0 δεν θα παρουσίαζε κανένα ενδιαφέρον στην περίπτωση αν τα σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών τιμών θα μας οδηγούσαν σε μια λύση που είναι τελείως διαφορετική από αυτήν που ψάχνουμε. Το ίδιο ισχύει και για το δευτερο μέρος της εξίσωσης. Δηλαδή η πραγματική διαδικασία περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση μόνο κατά προσέγγιση. Το συμπέρασμα είναι: για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις διαφορικές εξισώσεις στις εφαρμογές οι λύσεις των δυο διαφορετικών προβλημάτων αρχικών τιμών πρέπει να διαφέρουν ελάχιστα, αν ελάχιστα διαφέρουν οι αρχικές συνθήκες και τα δεύτερα μέρη των εξισώσεων. Αυτή η ιδιότητα της λύσης ονομάζεται *συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα.*

Ορισμός. *Λέμε ότι η $f(x,y)$ ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ως προς y σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ αν από το $y_2 > y_1$ προκύπτει*

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \le K(y_2-y_1)\ \ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega \tag{1.16}$$

(π.χ. οποιαδήποτε μη αύξουσα συνάρτηση του y)

Λήμμα 1.1 *Από την (1.16) προκύπτει ότι*

$$[y_2 - y_1][y_2' - y_1'] \leq K(y_2 - y_1)^2$$

για οποιεσδήποτε $y_1(x)$, $y_2(x)$ που είναι λύσεις της (1.1).

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1.1) έχουμε ότι

$$[y_2(x) - y_1(x)][y_2'(x) - y_1'(x)] = [y_2(x) - y_1(x)][f(x, y_2) - f(x, y_1)]. \tag{1.17}$$

Αν $y_2 > y_1$ (για κάποια x), τότε από την (1.16) αμέσως προκύπτει ότι το δεξί μέρος της (1.17) έχει ως άνω φράγμα το $K(y_2 - y_1)^2$. Αφού και το δεξί και το αριστερό μέρος της (1.17) μένει αμετάβλητο ως προς την εναλλαγή των ρόλων των y_1 και y_2, η ανισότητα του λήμματος ισχύει και στην περίπτωση $y_1 > y_2$.
$\square$

Λήμμα 1.2. *Έστω ότι η $\sigma(x)$ ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα*

$$\sigma'(x) \leq K\sigma(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.18}$$

όπου K είναι θετική σταθερά. Τότε

$$\sigma(x) \leq \sigma(a)e^{K(x-a)}, \quad x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την (1.18) με e^{-Kx} και μεταφέρουμε το δεξί μέλος στην αριστερή πλευρά

$$[\sigma'(x) - K\sigma(x)]e^{-Kx} \leq 0. \tag{1.19}$$

Το αριστερό μέρος της (1.19) είναι η παράγωγος της σe^{-Kx}. Δηλαδή

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)e^{-Kx}] \leq 0.$$

Επομένως η $\sigma(x)e^{-Kx}$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, άρα $\sigma(x)e^{-Kx} \leq \sigma(a)e^{-Ka}$ και $\sigma(x) \leq \sigma(a)e^{K(x-a)}$.
$\square$

Ας αποδείξουμε πιο γενική μορφη του λήμματος 1.2.

Λήμμα $Gronwall$ (απλή μορφή). *Έστω ότι η $\sigma(x)$ ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα*

$$\sigma'(x) \leq A(x)\sigma(x), \quad x \in [a, b],$$

όπου $A(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Τότε

$$\sigma(x) \leq \sigma(a)exp\Big(\int_a^x A(\xi)d\xi\Big), \quad x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Έστω

$$v(x) = exp\Big(\int_a^x A(\xi)d\xi\Big), \ \ x \in [a, b].$$

Προφανώς

$$v'(x) = A(x)v(x), \ \ v(a) = 1$$

και

$$v(x) > 0 \ \ \forall x \in [a, b].$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dx}\frac{\sigma(x)}{v(x)} = \frac{\sigma'(x)v(x) - v'(x)\sigma(x)}{v^2(x)} = \frac{\sigma'(x)v(x) - A(x)v(x)\sigma(x)}{v^2(x)} \leq 0.$$

Άρα η παράγωγος της συνάρτησης $\sigma(x)/v(x)$ είναι μη θετική, συνεπώς

$$\frac{\sigma(x)}{v(x)} \leq \frac{\sigma(a)}{v(a)} = \sigma(a), \quad x \in [a, b]$$

και

$$\sigma(x) \leq \sigma(a)v(x) \ \ x \in [a, b]$$

□

Χρησιμοποιώντας τα λήμματα 1.1 και 1.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι λύσεις της (1.1) εξαρτώνται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες με την προϋπόθεση ότι η $f(x, y)$ ικανοποιεί την (1.16).

Θεώρημα 1.6. (συνεχούς εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες) *Έστω ότι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (1.1) σε ενα χωρίο Ω, όπου $f(x, y)$ ικανοποιεί την (1.16). Τότε*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{K(x-a)}|y_1(a) - y_2(a)| \ \ \textit{για} \ \ x \geq a.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $\sigma(x) = [y_1(x) - y_2(x)]^2$. Υπολογίζοντας την παράγωγο της $\sigma(x)$ παίρνουμε

$$\sigma'(x) = 2[y_1(x) - y_2(x)][y_1'(x) - y_2'(x)].$$

Από το Λήμμα 1.1 προκύπτει ότι

$$\sigma'(x) \leq 2K\sigma(x).$$

Και επομένως από το Λήμμα 1.2 θα πάρουμε

$$\sigma(x) \leq e^{2K(x-a)}\sigma(a). \tag{1.20}$$

Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα και από τις δυο πλευρές της (1.20) παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτελέσμα για $x < a$ θα υποθέσουμε ότι η f ικανοποιεί την πλήρη συνθήκη του $Lipschitz$, δηλαδή

$$|f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))| \leq K|y_2 - y_1|. \tag{1.21}$$

Θα δείξουμε ότι από την (1.21) προκύπτει η

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{K|x-a|}|y_1(a) - y_2(a)|. \tag{1.22}$$

Πράγματι, αφού ισχύει η (1.21) ισχύει και η (1.16) άρα έχουμε την (1.22) για $x \geq a$. Από την (1.21) έχουμε

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \geq -K|y_1 - y_2|$$

και
$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \geq -K|y_2 - y_1|$$
Αρα έχουμε αν $y_1 \geq y_2$, τότε
$$\sigma'(x) = 2[y_1(x) - y_2(x)][y_1'(x) - y_2'(x)] = 2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - f(x,y_2)] \geq$$
$$-2K[y_1 - y_2]|y_1 - y_2| \geq -2K(y_1 - y_2)^2 = -2K\sigma,$$
και αν $y_2 \geq y_1$, τότε
$$\sigma'(x) = 2[y_2(x) - y_1(x)][y_2'(x) - y_1'(x)] = 2[y_2(x) - y_1(x)][f(x,y_2) - f(x,y_1)] \geq$$
$$-2K[y_2 - y_1]|y_2 - y_1| \geq -2K(y_2 - y_1)^2 = -2K\sigma.$$
Δηλαδή πάντα ισχύει
$$\sigma'(x) \geq -2K\sigma.$$
Παρομοίως με το Λήμμα 1.2 θα πάρουμε
$$(\sigma'(x) + 2K\sigma)e^{2Kx} \geq 0$$
και
$$\frac{d}{dx}(\sigma e^{2Kx}) \geq 0$$
σε κάποιο διάστημα $[c,a]$ και επομένως $\sigma(x) \leq \sigma(a)e^{2K(a-x)}$. Από όπου αμέσως προκύπτει η (1.22).

Θεώρημα 1.7. *(συνεχούς εξάρτησης από τα δεδομένα). Έστω οι $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι ορισμένες και συνεχείς σε κάποιο Ω και έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις των εξισώσεων*
$$y_1'(x) = f(x,y_1), \quad y_2'(x) = g(x,y_2), \quad x \in [a,b] \tag{1.23}$$
αντιστοίχως. Έστω $f(x,y)$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς y συνάρτηση και
$$|f(x,y) - g(x,y)| \leq \varepsilon, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{1.24}$$
Τότε
$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)|e^{K|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{K}[e^{K|x-x_0|} - 1], \tag{1.25}$$
σε ένα διάστημα $[a,b]$, όπου $x_0 \in [a,b]$.

Απόδειξη. Εισάγουμε την $\sigma(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2$. Παραγωγίζοντας την $\sigma(x)$ παίρνουμε
$$\sigma'(x) = 2[y_1(x) - y_2(x)][y_1'(x) - y_2'(x)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - g(x,y_2)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - f(x,y_2) + f(x,y_2) - g(x,y_2)] =$$
$$2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_1) - f(x,y_2)] + 2[y_1(x) - y_2(x)][f(x,y_2) - g(x,y_2)]$$
Θα εκτιμήσουμε την απόλυτη τιμή της $\sigma'(x)$ χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, το γεγονός ότι η f είναι *Lipschitz* συνάρτηση και την (1.24)
$$|\sigma'(x)| \leq$$
$$2|y_1(x) - y_2(x)||f(x,y_1) - f(x,y_2)| + 2|y_1(x) - y_2(x)||f(x,y_2) - g(x,y_2)| \leq$$
$$\leq 2K|y_1 - y_2|^2 + 2\varepsilon|y_1 - y_2|.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$\sigma'(x) \le 2K\sigma(x) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(x)}. \tag{1.26}$$

Χωρίς απόδειξη ισχυριζόμαστε ότι αν η $\sigma(x)$ ικανοποιεί την (1.26) τότε

$$\sigma(x) \le [\sqrt{\sigma(x_0)}e^{K|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|x-x_0|} - 1)]^2 \tag{1.27}$$

Βλέπουμε ότι η (1.25) αμέσως προκύπτει από την (1.27). Η αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος συνεχούς εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα θα δώσουμε στην περίπτωση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης στην § **2**.

□

Παρατήτηση. Στις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.7 η *Lipschitz* συνέχεια της f μπορεί να αντικατασταθεί με την *Lipschitz* συνέχεια της g. Σε αυτη την περίπτωση η μόνη αλλαγή στην απόδειξη θα είναι η προσθαφαίρεση της $g(x, y_1)$ (αντι της προσθαφαίρεσης της $f(x, y_2)$).

Ορισμός. *Λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι καλώς τεθειμένο αν η λύση υπάρχει είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.*

Π.χ. το πρόβλημα *Cauchy* (1.1), (1.2) υπο τις προϋπόθεσης του Θεωρήματος 1.1 είναι καλώς τεθειμένο (τοπικά).

Αφού οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων συνήθως δεν μπορούν να παρασταθούν μέσω των στοιχειωδών συναρτήσεων, είναι σημαντικό να μπορεί κανείς να συγκρίνει τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων με διαφορετικά δεύτερα μέρη. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να συγκρίνουμε μια άγνωστη λύση μίας διαφορικής εξίσωσης με μια γνωστή λύση μιας άλλης.

Λήμμα 1.3. Έστω οτι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και ικανοποιεί την συνθήκη του *Lipschitz* ως προς y στο Ω. Έστω η $y_1(x)$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί στο Ω την διαφορική ανισότητα

$$y_1'(x) \le f(x, y_1).$$

Υποθέτουμε ότι η $y_2(x)$ είναι λύση της

$$y_2'(x) = f(x, y_2).$$

Αν $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ όπου $(x_0, y_1(x_0)) \in \Omega$, τότε

$$y_1(x) \le y_2(x) \ \text{ για } \ x \ge x_0 \ \text{ και } \ y_1(x) \ge y_2(x) \ \text{ για } \ x \le x_0.$$

(Οι τελευταίες ανισότητες λαμβάνουν χώρα εκεί που οι y_1 και y_2 υπάρχουν.)

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε οτι $y_1(x) \le y_2(x)$ για $x \ge x_0$.

Έστω οτι υπάρχει τέτοιο $x_1 > x_0$ ώστε $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. Λόγω συνέχειας θα υπάρχει ένα $x^* \in [x_0, x_1)$ τέτοιο ώστε για $\sigma(x) \equiv y_1(x) - y_2(x)$ θα ισχύει

$$\sigma(x) \ge 0 \ \text{ για } \ x \in [x^*, x_1] \ \text{ και } \ \sigma(x^*) = 0.$$

Επίσης στο $[x^*, x_1]$ έχουμε

$$\sigma'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) \le f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \le K(y_1 - y_2) = K\sigma.$$

Από το Λήμμα 1.2 παίρνουμε

$$\sigma(x) \le \sigma(x^*)e^{K(x-x^*)} = 0,$$

αφού $\sigma(x^*) = 0$. Επειδή $\sigma(x) \ge 0$ στο $[x^*, x_1]$ αμέσως έχουμε $\sigma(x) \equiv 0$ στο $[x^*, x_1]$ και ως συνέπεια $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$. Αυτό αντιφάσκει με την προϋπόθεση $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. Επομένως $y_1(x) \le y_2(x)$ για οποιοδήποτε $x \ge x_0$ από το Ω.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $y_1(x) \ge y_2(x)$ για $x \le x_0$.

□

Θεώρημα 1.8. *(σύγκρισης). Έστω $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο Ω τ.ω. $f(x,y) \le g(x,y)$. Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις των εξισώσεων*

$$y_1'(x) = f(x, y_1), \quad y_2'(x) = g(x, y_2)$$

αντίστοιχα. Αν $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ όπου $(x_0, y_1(x_0)) \in \Omega$, τότε

$$y_1(x) \le y_2(x) \ \text{ για } \ x \ge x_0 \ \text{ και } \ y_1(x) \ge y_2(x) \ \text{ για } \ x \le x_0.$$

(Προφανώς οι ανισότητες αυτές λαμβάνουν χώρα εκεί που οι y_1 και y_2 υπάρχουν.)

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $x \ge x_0$. Αφού $y_1'(x) = f(x, y_1) \le g(x, y_1)$ και $y_2'(x) = g(x, y_2)$ από το Λήμμα 1.3 αμέσως προκύπτει οτι $y_1(x) \le y_2(x)$ για $x \ge x_0$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $y_1(x) \ge y_2(x)$ για $x \le x_0$.

□

Παρατήρηση. Στην περίπτωση όταν μόνο η f είναι *Lipschitz* συνεχής θεωρούμε τις

$$u_1 = -y_1 \ \text{ και } \ u_2 = -y_2.$$

Τότε

$$u_1'(x) = -f(x, -u_1), \quad u_2'(x) = -g(x, -u_2).$$

Αφού $f(x, -u_2) \le g(x, -u_2)$ τότε $-f(x, -u_2) \ge -g(x, -u_2)$ και

$$u_2'(x) = -g(x, -u_2) \le -f(x, -u_2).$$

Για τις u_1, u_2 από το Λήμμα 1.3 απορρέει ότι $u_1(x) \ge u_2(x)$ στο $[x_0, b]$ και επομένως $y_1(x) \le y_2(x)$. Με τον ίδιο τρόπο εξετάζεται το διάστημα $[a, x_0]$.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικά πορίσματα από το θεώρημα σύγκρισης.

Πόρισμα 1. Έστω οτι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκρισης. Τότε για οποιοδήποτε σημείο $x_1 > x_0$ ή $y_1(x_1) < y_2(x_1)$ ή $y_1(x) \equiv y_2(x)$ στο $[x_0, x_1]$.

(Προφανώς υποθέτουμε οτι οι y_1 και y_2 υπάρχουν σε ενα διάστημα I ε.ω. $[x_0, x_1] \subset I$.)

Απόδειξη. Έστω $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ για κάποιο $x_1 > x_0$ και $y_1(x) \not\equiv y_2(x)$ στο $[x_0, x_1]$. Τότε υπάρχει ένα σημείο $x^* \in (x_0, x_1)$ τέτοιο ώστε $y_1(x^*) < y_2(x^*)$.

Εισάγουμε την $\sigma(x) = y_2(x) - y_1(x)$. Η $\sigma(x) \geq 0$ στο $[x^*, x_1]$ από το θεώρημα σύγκρισης και

$$\sigma' = y_2' - y_1' = g(x, y_2) - f(x, y_1) \geq g(x, y_2) - g(x, y_1) \geq -K\sigma.$$

Αρα

$$\frac{d}{dx}\big(\sigma\, e^{Kx}\big) \geq 0 \;\; \text{στο} \;\; [x^*, x_1]$$

και επομένως η $\sigma(x)e^{Kx}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση στο $[x^*, x_1]$ και

$$\sigma(x) \geq \sigma(x^*)e^{K(x^*-x)} > 0,$$

αφού $\sigma(x^*) > 0$. Συνεπώς $\sigma(x_1) > 0$, όπου αυτή η ανισότητα αντιφάσκει με την προϋπόθεση $y_1(x_1) = y_2(x_1)$.

Από εδώ αμέσως προκύπτει ότι αν για κάποιο x_1 έχουμε $y_2(x_1) > y_1(x_1)$ τότε $y_2(x) > y_1(x)$ για $x \geq x_1$. Εάν όμως $y_2(x_1) = y_1(x_1)$, τότε $y_2(x) \equiv y_1(x)$ στο $[x_0, x_1]$.

□

Τα επόμενα δυο πορίσματα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Πόρισμα 2. Έστω ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκρισης. Τότε για οποιοδήποτε σημείο $x_1 < x_0$ ή $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ ή $y_1(x) \equiv y_2(x)$ στο $[x_1, x_0]$.

Πόρισμα 3. Αν στο θεώρημα σύγκρισης θα αντικαταστήσουμε την συνθήκη $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ με την ανισότητα $y_1(x_0) < y_2(x_0)$, τότε $y_1(x) < y_2(x)$ για $x > x_0$.

Παράδειγμα 1.7. Έστω ότι η $y(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y' = -y^2 - |sin\, y^{1/3}|, \;\; y(0) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σύγκρισης αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $y(x) \leq 1$ και υπάρχει $x^* \in (-1, 0)$ τ.ω.

$$\lim_{x \to x^*+0} y(x) = +\infty.$$

Λύση. Έστω $y_0(x)$ λύση του προβλήματος

$$y_0' = 0, \;\; y_0(0) = 1.$$

Προφανώς $y_0 \equiv 1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα σύγκρισης (αφού $-y^2 - |sin\, y^{1/3}| \leq 0$) για $x \geq 0$ έχουμε

$$y(x) \leq y_0(x) \equiv 1.$$

Έστω $y_1(x)$ λύση του προβλήματος

$$y_1' = -y_1^2, \;\; y_0(0) = 1.$$

Προφανώς

$$y_1 = \frac{1}{1+x}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα σύγκρισης (αφού $-y^2 - |sin\, y^{1/3}| \leq -y^2$) για $x \leq 0$ έχουμε

$$y(x) \geq y_1(x) = \frac{1}{1+x}$$

και

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{1+x} = +\infty$$

απ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.8. Έστω ότι η $y_1(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y_1' = e^{y_1} + e^x \sin y_1, \quad y_1(0) = 1$$

και η $y_2(x)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y_2' = \frac{1}{2} y_2^2 + e^x \sin y_2, \quad y_2(0) = 1$$

αντίστοιχα. Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ στο $(0, a)$ (προφανώς υποθέτουμε οτι οι λύσεις υπαρχουν στο $(0, a)$).

Λύση. Αφου

$$e^y + e^x \sin y \geq \frac{1}{2} y^2 + e^x \sin y,$$

απο το Θεωρημα σύγκρισης έχουμε ότι

$$z(x) = y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \ \text{ για } \ x \geq 0.$$

Παράδειγμα 1.9. Έστω ότι οι $k(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$k(x) > 0, \quad 1 \leq g(x) \leq 10.$$

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$y'(x) = g(x) - k(x) y^2(x), \quad y(0) = 0 \tag{1.28}$$

έχει ολική λύση στο διάστημα $(-l, l)$ για κάθε $l > 0$.

Λύση. Θα δείξουμε πρώτα ότι αν η λύση υπάρχει τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$0 < y(x) \leq 10x.$$

Πράγματι, αφού $y(0) = 0$ άρα $y'(0) = g(0) > 0$ και υπάρχει $x_0 > 0$ τ.ω. $y(x) > 0$ στο $(0, x_0)$. Έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $x^* > 0$ τ.ω. $y(x) > 0$ στο $(0, x^*)$ και $y(x^*) = 0$, τότε σε αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι μη αύξουσα άρα $y'(x^*) \leq 0$, από την άλλη

$$y'(x^*) = g(x^*) - k(x^*)\, y^2(x^*) = g(x^*) > 0,$$

άτοπο, συνεπώς

$$y(x) > 0 \ \ \forall x > 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $z(x) = 10x$, προφανώς

$$z'(x) = 10, \quad z(0) = 0.$$

Αφού $10 \geq g(x) - k(x)\, y^2$, από το θεώρημα σύγκρισης έχουμε $y(x) \leq z(x) = 10x$. Συνεπώς η λύση (αν υπάρχει) ικανοποιεί την ανισότητα

$$0 < y(x) \leq 10x, \quad \forall x > 0.$$

Θα θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση $x < 0$.

Αφού $y(0) = 0$ άρα $y'(0) = g(x) > 0$ και υπάρχει $x_1 < 0$ τ.ω. $y(x) < 0$ στο $(x_1, 0)$. Έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $x_* < 0$ τ.ω. $y(x) < 0$ στο $(x_*, 0)$ και $y(x_*) = 0$, τότε σε αυτό το σημείο η συνάρτηση είναι μη αύξουσα άρα $y'(x_*) \leq 0$ από την άλλη

$$y'(x_*) = g(x_*) - k(x_*)y^2(x_*) = g(x_*) > 0,$$

άτοπο, συνεπώς $y(x) < 0 \; \forall x < 0$.

Από το θεώρημα σύγκρισης έχουμε $y(x) \geq 10x$. Συνεπώς η λύση (αν υπάρχει) ικανοποιεί την ανισότητα

$$10x \leq y(x) < 0, \quad \forall x < 0.$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξη της ολικής λύσης (βλ. τους συλλογισμούς στη σελίδα 9). Έστω

$$\Omega = (-l, l) \times (-10\,l, 10\,l)$$

με τυχαίο $l > 0$. Στο Ω και σε οποιοδήποτε υποσύνολό του Ω' ισχύει

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |g(x) + k(x)y_2^2 - g(x) + k(x)y_1^2| \leq$$

$$\max_{x\in[-l,l]} k(x)|y_2^2 - y_1^2| = \max_{x\in[-l,l]} k(x)(|y_2| + |y_1|)|y_2 - y_1| \leq$$

$$20\,l \max_{x\in[-l,l]} k(x)|y_2 - y_1|.$$

Το Θεώρημα 1.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης στο διάστημα $[-l_0, l_0]$ με

$$2l_0 = \alpha < \frac{1}{K}, \quad K = 20\,l \max_{x\in[-l,l]} k(x) \quad \big(\text{π.χ. } \alpha = \frac{1}{2K}\big).$$

Αν θα πάρουμε την αρχική συνθήκη στο l_0 θα έχουμε τη λύση στο $[l_0, l_1]$, παίρνοντας την αρχική συνθήκη στο l_1 κατασκευάζουμε τη λύση στο $[l_1, l_2]$ ... $[l_{n-1}, l_n]$... με

$$l_i - l_{i-1} = \frac{1}{2K}.$$

Παρατηρούμε ότι **όλα τα σημεία** $\big(l_i, y(l_i)\big), \quad i = 0, 1, 2, ...$ **ανήκουν στο χωρίο** Ω (αφού $|y(l_i)| \leq 10l_i < 10l$). Προφανώς σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (με σταθερό βήμα μήκους $1/2K$) θα φτάσουμε στο σημείο l. Παρομοίως για αρνητικά x.

Εκτιμήσεις της λύσης υπο την προϋπόθεση ύπαρξής της ονομάζονται $apriori$ εκτιμήσεις ή εκτιμήσεις εκ των προτέρων.

Παρατήρηση. Οπως γνωρίζουμε απο το μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις (βλ. τις σημειώσεις "Εισαγωγη στις Διαφορικές Εξισώσεις") για σταθερές g και k το πρόβλημα (1.28) έχει ολική λύση σε κλειστή μορφή

$$y(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} \frac{e^{2\sqrt{gk}x} - 1}{e^{2\sqrt{gk}x} + 1}. \tag{1.29}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. Κατασκευάστε τις τέσσερις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 της λύσης του προβλήματος
$$y' = -2\,y, \;\; y(0) = 1,$$
παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1$.

Άσκηση 1.2. Κατασκευάστε τις δύο πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος
$$y' = cos\,y + y, \;\; y(0) = 0,$$
παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 0$

Άσκηση 1.3. Κατασκευάστε τις τρεις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος
$$y' = y^2 \;\; y(0) = 1,$$
παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1$

Άσκηση 1.4. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$
$$y' = f(x, y), \;\; y(0) = \frac{1}{\varepsilon}.$$
Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f(x, y)$ έτσι ώστε η λύση να υπάρχει μόνο στο διάστημα $(-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ για $\varepsilon > 0$.

Άσκηση 1.5. Έστω $x(t)$ και $y(t)$ έναι λύσεις των εξισώσεων
$$x' = sin^2 x, \qquad y' = e^y + 1$$
στο διάστημα $(a, 0)$ αντιστοίχως. Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης $z(t) = x(t) - y(t)$ στο $(a, 0)$ αν $x(0) = y(0)$.

Άσκηση 1.6. Έστω $y(x)$ λύση του προβλήματος $Cauchy$
$$y' = e^y + sin^2 y + 1, \;\; y(0) = 1.$$
Αποδείξτε ότι
$$\lim_{x \to x^*} y(x) = +\infty$$
για κάποιο $x^* \in (0, 1)$.

Άσκηση 1.7. Έστω $y(x)$ - λύση του προβλήματος
$$y' = y^2\,(sin\,x + cos\,y + 3), \;\; y(0) = 1.$$
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σύγκρισης αποδείξτε ότι $\exists$ ένα $x^* > 0$ τ.ω.
$$\lim_{x \to x^*} y(x) = +\infty.$$

Άσκηση 1.8. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα
$$y' = 1 - (sin^2 x) y^4, \;\; y(0) = 0$$
έχει λύση για όλα τα x (ολική ύπαρξη).

Άσκηση 1.9. Θεωρούμε το πρόβλημα (1.28) με
$$0 < g_0 \le g(x) \le g_1, \;\; 0 < k_0 \le k(x) \le k_1, \;\; g_i, k_i, i = 0, 1 \;\text{ σταθερές.}$$
1. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το πρόβλημα (1.28) με σταθερές συναρτήσεις $g(x), k(x)$ έχει λύση σε κλειστή μορφή (βλ. (1.29)) αποδείξτε την

εκτίμηση

$$\frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{k_1}}\frac{e^{2\sqrt{g_0k_1}x}-1}{e^{2\sqrt{g_0k_1}x}+1} \leq y(x) \leq \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}\frac{e^{2\sqrt{g_1k_0}x}-1}{e^{2\sqrt{g_1k_0}x}+1} \quad \text{για} \ \ x \geq 0,$$

$$\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}\frac{e^{2\sqrt{g_1k_0}x}-1}{e^{2\sqrt{g_1k_0}x}+1} \leq y(x) \leq \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{k_1}}\frac{e^{2\sqrt{g_0k_1}x}-1}{e^{2\sqrt{g_0k_1}x}+1} \quad \text{για} \ \ x \leq 0.$$

2. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος στο $(-\infty,+\infty)$.

Άσκηση 1.10. Στο παράδειγμα 1.9 εφαρμόσαμε μια διαδικασία που μας έδωσε την ολική λύση του προβλήματος $y' = g - k\,y^2$, $y(0) = 0$.

1. Γιατί δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία για το πρόβλημα

$$y' = y^2, \ \ y(0) = 1;$$

2. Τι θα γίνει αν πάρουμε $y(0) = \varepsilon > 0$ και θα περάσουμε στο όριο $\varepsilon \to 0$;

Άσκηση 1.11. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα (βλ. Παράδειγμα 1.5)

$$y'(x) = -sign\, y, \ \ y(0) = 0.$$

1. Διαπιστώστε ότι η διαδοχικές προσεγγίσεις (με $\phi_0(x) \equiv 0$) είναι

$$\phi_n(x) = \begin{cases} -x, & \text{για} \ \ n = 1,3,5,7,\ldots \\ |x|, & \text{για} \ \ n = 2,4,6,8,\ldots \end{cases}$$

2. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό. Θεωρούμε την υπακολουθία $\phi_k(x)$, $k = 2n+1$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, προφανώς

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = \lim_{k\to\infty}(-x) = -x = \phi(x).$$

Περνάμε στο όριο στην σχέση (1.6) και καταλύγουμε στο οτι η $\phi(x) = -x$ είναι η λύση του προβλήματός μας σε όλο τον $\mathbf{R}$.

Άσκηση 1.12. Αποδείξτε οτι το πρόβλημα

$$y' = -sign\, y + \frac{1}{2}, \ \ y(0) = 0$$

με

$$sign\, y = \begin{cases} 1, & \text{για} \ \ y > 0 \\ 0, & \text{για} \ \ y = 0 \\ -1, & \text{για} \ \ y < 0 \end{cases}$$

δεν εχει λύση για $x > 0$ $\big(y = y(x)\big)$.

Άσκηση 1.13. Αποδείξτε ότι $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0$$

έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 1.14. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \ \ y(0) = \alpha.$$

1. Διαπιστώστε οτι το πρόβλημα αυτο για $\alpha \neq 0$ δεν έχει λύση και για $\alpha = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
2. Εξηγήστε γιατι με βάση τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας.

§2. Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης

Έστω έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, \dots, x_n, t)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \Phi_n(x_1, \dots, x_n, t).$$

Θα συμβολίσουμε με $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{x}(t)$ θα είναι η $|\mathbf{x}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t)}$. Με $\mathbf{\Phi}(x,t)$ θα συμβολίσουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) = (\Phi_1(\mathbf{x},t), \dots, \Phi_n(\mathbf{x},t)).$$

Ο συμβολισμός $\mathbf{x}'(t)$ θα σημαίνει το διάνυσμα

$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

και το ολοκλήρωμα του $\mathbf{x}(t)$ θα είναι διάνυσμα με συνιστώσες

$$\int_a^b \mathbf{x}(t)dt = \Big(\int_a^b x_1(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt \Big).$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς θα γράφουμε τα συστήματα σε διανυσματική μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t). \tag{2.1}$$

Ορισμός. *Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)$ ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ (ως προς $\mathbf{x}$) σε κάποιο χωρίο $\Omega \times (a,b) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, εάν*

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)| \le K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

όπου $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, $t \in [a,b]$, $K > 0$ σταθερά του $Lipschitz$.

Ορισμός. *Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)$ είναι της κλάσεως C^1 ως προς $\mathbf{x}$, αν κάθε συνιστώσα Φ_k είναι της κλάσεως C^1 ως προς $\mathbf{x}$.*

Λήμμα 2.1. Αν $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) \in C^1$ σε κάποιο κυρτό χωρίο Ω, τότε είναι $Lipschitz$ συνεχής συνάρτηση στο Ω.

Απόδειξη. Έστω $M = \sup_{\Omega, i,j=1,\dots,n} |\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}|$. Για κάθε $\Phi_i(\mathbf{x},t)$, σταθεροποιημένες $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,t και μεταβλητή s έχουμε

$$\frac{d}{ds}[\Phi_i(\mathbf{x} + s\mathbf{y}, t)] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x} + s\mathbf{y}, t) y_k,$$

όπου $z_k = x_k + s y_k$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $\Phi_i(\mathbf{z},t)$, όπου $\mathbf{z} = \mathbf{x} + s\mathbf{y}$, $0 \le s \le 1$, θα πάρουμε

$$\Phi_i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) - \Phi_i(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{d\,s}[\Phi_i(\mathbf{x} + s\mathbf{y}, t)]\Big|_{s=s_i^*}$$

και επομένως
(2.2)

$$\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t)-\Phi_i(\mathbf{x},t)=\frac{d}{d\,s}[\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)]\Big|_{s=s_i^*}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*}y_k,$$

για κάποιο $s_i^*\in[0,1]$. (Πράγματι για την $h(s)=\Phi_i(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)$ έχουμε $h(1)-h(0)=h'(s_i^*)$ για κάποιο $s_i^*\in[0,1]$). Από την (2.2) προκύπτει

$$\Big(\Phi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y},t)-\Phi_i(\mathbf{x},t)\Big)^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*}y_k\Big)^2\le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_k}(\mathbf{x}+s\mathbf{y},t)\Big|_{s=s_i^*}\big)^2\sum_{k=1}^{n}y_k^2\le nM^2|\mathbf{y}|^2, \tag{2.3}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$ για το δεξί μέρος της (2.2).

$\Big[$ $Cauchy-Schwartz$: $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ή

$$\big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\big)^2\le\big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\big)\big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\big)\quad\Big]$$

Αθροίζοντας την (2.3) ως προς i, θα πάρουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{y},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)|^2\le n^2M^2|\mathbf{y}|^2. \tag{2.4}$$

Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα από την (2.4), λαμβάνουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{y},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)|\le nM|\mathbf{y}|. \tag{2.5}$$

Όπου η (2.5) είναι η συνθήκη του $Lipschitz$ για την $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)$, με σταθερά του $Lipschitz$ να είναι η $K=nM$.

Θα περάσουμε τώρα στο πρόβλημα $Cauchy$ για το σύστημα (2.1) και θα ξεκινήσουμε με την μοναδικότητα της λύσης.

Θεώρημα 2.1(μοναδικότητα). *Αν το διανυσματικό πεδίο* $\Phi(\mathbf{x},t)$ *ικανοποιεί την συνθήκη του* $Lipschitz$ *ως προς* $\mathbf{x}$ *και είναι συνεχές ως προς* t *σε ένα χωρίο* $\Omega\times(a,b)\subset\mathbf{R}^{n+1}$*, τότε υπάρχει το πολύ μια λύση του συστήματος (2.1), η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη* $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{c}$ $(\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n))$ *όπου* $(\mathbf{c},t_0)\in\Omega$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δυο λύσεις $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$, όπου $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{c}$. Εισάγουμε την συνάρτηση $\sigma(t)$ η οποία ισούται με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$

$$\sigma(t)=\sum_{k=1}^{n}[x_k(t)-y_k(t)]^2=|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)|^2\ge 0. \tag{2.6}$$

Παραγωγίζουμε την $\sigma(t)$, έχοντας υπόψη ότι $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι λύσεις του συστήματος (2.1)

$$\sigma'(t) = 2\sum_{k=1}^{n}[x_k(t) - y_k(t)][\Phi_k(\mathbf{x},t) - \Phi_k(\mathbf{y},t)] =$$
$$= 2[\mathbf{x} - \mathbf{y}] \cdot [\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)].$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, θα πάρουμε

$$\sigma'(t) \leq |\sigma'(t)| = 2|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t))| \leq \tag{2.7}$$
$$\leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}||\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)| \leq 2K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2K\sigma(t).$$

Από την (2.7) αμέσως προκύπτει ότι

$$\sigma' \leq 2K\sigma \Longrightarrow (\sigma' - 2K\sigma)e^{-2Kt} \leq 0 \Longrightarrow (\sigma e^{-2Kt})' \leq 0,$$

άρα για $t \geq t_0$

$$\sigma(t)e^{-2Kt} \leq \sigma(t_0)e^{-2Kt_0} \Longrightarrow \sigma(t) \leq \sigma(t_0)e^{2K(t-t_0)}.$$

Αφού $\mathbf{x}(t_0) = y(t_0)$, έχουμε $\sigma(t_0) = 0$ και επομένως $\sigma(t) \leq 0$. Από την (2.6) προκύπτει ότι $\sigma(t) \equiv 0$ και $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 \equiv 0$ για $t \geq t_0$.

Συνεπώς $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$ για $t \geq t_0$.

Με παρομοιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση $t < t_0$. Προφανώς $-\sigma'(t) \leq |\sigma'(t)|$ και επομένως

$$-\sigma' \leq 2K\sigma \Longrightarrow \sigma' \geq -2K\sigma \Longrightarrow (\sigma e^{2Kt})' \geq 0.$$

Άρα για $t \leq t_0$ έχουμε

$$\sigma(t)e^{2Kt} \leq \sigma(t_0)e^{2Ka} \Longrightarrow \sigma(t) \leq \sigma(t_0)e^{2K(t_0-t)}.$$

Συνεπώς $\sigma(t) \equiv 0$ για $t \leq t_0$, δηλαδή $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$ για $t \leq t_0$.
□

Το θεώρημα μοναδικότητας ισχύει υπό πιο γενικές συνθήκες, συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2.2 ($Osgood$**)** (χωρίς απόδειξη). *Αν κάθε συνιστώσα του* $\Phi(\mathbf{x},t)$ *ικανοποιεί την*

$$|\Phi_i(\mathbf{x},t) - \Phi_i(\mathbf{y},t)| \leq \varphi(\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|), \quad i = 1,\ldots,n,$$

όπου $\varphi(u)$ *είναι συνεχής συνάρτηση, η οποία*
1. $\varphi(u) > 0$ *για* $u > 0$ *και 2.*

$$\int_{\varepsilon}^{a}\frac{du}{\varphi(u)} \to \infty, \;\; \textit{όταν} \;\; \varepsilon \to 0$$

$(a > 0)$,
τότε υπάρχει το πολύ μια λύση του συστήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t).$$

Όπως και στην περίπτωση μιας διαφορικής εξίσωσης, για να αποδείξουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της τοπικής λύσης, θα ακολουθήσουμε την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Το πρώτο βήμα είναι να περάσουμε από το διαφορικό σύστημα σε ολοκληρωτικό σύστημα, που είναι ισοδύναμο με το διαφορικό. Έστω $\mathbf{x}(t)$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t).$$

Ολοκληρώνουμε αυτό το σύστημα ως προς t από t_0 έως t. Προφανώς

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{x}'(\tau) d\xi = \Big(\int_{t_0}^{t} x_1'(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^{t} x_n'(\tau) d\tau \Big) =$$

$$(x_1(t) - x_1(t_0), \dots, x_n(t) - x_n(t_0)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0).$$

Άρα

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

και αφού $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \tag{2.8}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνεχής λύση της (2.8) θα είναι και η λύση του διαφορικού συστήματος. Αν η $\mathbf{x}(t)$ είναι συνεχής, τότε και η $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ θα είναι συνεχής, επομένως το δεξί μέρος της (2.8) έχει την παράγωγο ως προς t, επομένως την έχει και το αριστερό μέρος, άρα $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, και η $\mathbf{x}(t)$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος. Είναι προφανές ότι $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$.

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση ύπαρξης της ολικής λύσης. Πρώτα όμως θα κάνουμε την εξής παρατήρηση: η γνωστή ανισότητα

$$\Big| \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau \Big| \le \Big| \int_{t_0}^{t} |h(\tau)| d\tau \Big|$$

για μια συνάρτηση $h(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ισχύει και για διανυσματικές συναρτήσεις (διανυσματικά πεδία) $\overline{\phi}(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\overline{\phi}(t) = \big(\phi_1(t), ..., \phi_n(t)\big)$, δηλαδή

$$\Big| \int_{t_0}^{t} \overline{\phi}(\tau) d\tau \Big| \le \Big| \int_{t_0}^{t} |\overline{\phi}(\tau)| d\tau \Big|.$$

Πράγματι, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος (t_0, t) σε m ισα διαστήματα μήκους $\Delta t = |t - t_0|/m$, $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = 1, ..., m$. Έχουμε

$$\Big| \int_{t_0}^{t} \overline{\phi}(\tau) d\tau \Big| = \Big| \Big(\int_{t_0}^{t} \phi_1(\tau) d\tau, ..., \int_{t_0}^{t} \phi_n(\tau) d\tau \Big) \Big| =$$

$$\Big| \Big(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_1(t_k) \Delta t, ..., \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_n(t_k) \Delta t \Big) \Big| \le$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \big| \big(\phi_1(t_k), ..., \phi_n(t_k)\big) \big| \big| \Delta t \big| = \Big| \int_{t_0}^{t} |\overline{\phi}(\tau)| d\tau \Big|.$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι συνεχές και ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ στο διάστημα $|t-t_0| \le T$ για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Τότε για οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα $\mathbf{c}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μια και μοναδική λύση στο $|t - t_0| \le T$.*

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε τις προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος:

$$\overline{\phi}_m(t) = \mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}\big(\overline{\phi}_{m-1}(\tau), \tau\big) d\tau, \quad m > 0,$$

$\overline{\phi}_0(t)$ τυχαία συνεχής συνάρτηση τ.ω. $\overline{\phi}_0(t_0) = \mathbf{c}$. Αφού η $\overline{\phi}_0$ είναι συνεχής στο $|t - t_0| \le T$, τότε και η $\overline{\phi}_1$ θα είναι συνεχής στο $|t - t_0| \le T$ κ.ο.κ. Επομένως όλες οι προσεγγίσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\overline{\phi}_0(t), \ \overline{\phi}_1(t), \ \overline{\phi}_2(t), \ ..., \ \overline{\phi}_m(t), \ ... \tag{2.9}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|t - t_0| \le T$. Ας τονίσουμε εδώ ότι τα $\overline{\phi}_m$ είναι διανύσματα:

$$\overline{\phi}_m(t) = \big(\phi_{m1}(t), \phi_{m2}(t), ..., \phi_{mn}(t)\big), \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Έστω $M = \max_{|t-t_0| \le T} |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, t)|$. Το $M < \infty$, επειδή συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη σε κλειστό διάστημα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t_0 = 0$ και $t \in [0, T]$. Η απόδειξη για αυθαίρετο t_0 και για $t < t_0$ γίνεται με χρήση της αντικατάστασης $t \to t + t_0$, $t \to t_0 - t$ αντίστοιχα. Θέτουμε για λόγους απλότητας $\overline{\phi}_0 \equiv \mathbf{c}$, επομένως

$$|\overline{\phi}_1(t) - \overline{\phi}_0(t)| = |\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau) d\tau| \le \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)| d\tau \le M \int_0^t d\tau = Mt,$$

$$|\overline{\phi}_2(t) - \overline{\phi}_1(t)| = |\int_0^t [\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_1(\tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)] d\tau| \le \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_1, \tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_0, \tau)| d\tau \le$$

$$\le \int_0^t K |\overline{\phi}_1(\tau) - \overline{\phi}_0(\tau)| d\tau \le K \int_0^t M\tau d\tau = KMt^2/2.$$

Ομοίως παίρνουμε

$$|\overline{\phi}_3(t) - \overline{\phi}_2(t)| \le K \int_0^t |\overline{\phi}_2(\tau) - \overline{\phi}_1(\tau)| d\tau \le K \int_0^t KM\tau^2/2 d\tau = \frac{K^2 M}{2} \frac{t^3}{3},$$

$$\cdots$$

$$|\overline{\phi}_{m+1}(t) - \overline{\phi}_m(t)| \le \frac{M}{K} \frac{(Kt)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Όπως και στην περίπτωση μιας διαφορικής εξίσωσης, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ακολουθία (2.9) με την σειρά

$$\overline{\phi}_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} [\overline{\phi}_{m+1}(t) - \overline{\phi}_m(t)], \tag{2.10}$$

$$\Big(\text{ δηλαδή } \ \phi_{0i}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} [\phi_{m+1i}(t) - \phi_{mi}(t)] \ \ i = 1, 2, \ldots, n \Big)$$

της οποίας το m-οστο μερικό άθροισμα συμπίπτει με την $\overline{\phi}_m(t)$ (δηλαδή με $(\phi_{m1}(t), \ldots, \phi_{mn}(t))$. Οι απόλυτες τιμές των μελών της (2.10) δεν υπερβαίνουν τα αντίστοιχα μέλη της σειράς

$$|\mathbf{c}| + \frac{M}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Kt)^{m+1}}{(m+1)!},$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα για $|t| \leq T$ στο $\frac{M}{K}(e^{Kt} - 1) + |\mathbf{c}|$. Επομένως η σειρά (2.10) συγκλίνει ομοιόμορφα και ως συνέπεια αμέσως παίρνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της (2.9). Απομένει να αποδείξουμε ότι η

$$\overline{\phi}(t) = \lim_{m \to \infty} \overline{\phi}_m(t)$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{\phi}(t)$ είναι λύση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης. Θεωρούμε την σχέση

$$|\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau - \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_k, \tau)d\tau| \leq \int_0^t |\mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau) - \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_k, \tau)|d\tau \leq$$

$$\leq K \int_0^t |\overline{\phi}_m(\tau) - \overline{\phi}_k(\tau)|d\xi \to 0, \quad k, m \to \infty.$$

Επομένως $\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau$ συγκλίνει ομοιόμορφα και

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau \to \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}, \tau)d\tau \ \text{καθώς} \ m \to +\infty. \tag{2.11}$$

Θεωρούμε την σχέση

$$\overline{\phi}_{m+1}(t) = \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}_m, \tau)d\tau. \tag{2.12}$$

Το αριστερό μέλος της (2.12) τείνει στο $\overline{\phi}(t)$. Από την (2.11) έχουμε ότι και το δεξί μέλος έχει όριο που ισούται με $\int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}, \tau)d\tau$. Και επομένως, περνώντας στο όριο στην (2.12), για την $\overline{\phi}(t)$ θα έχουμε

$$\overline{\phi}(t) = \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(\overline{\phi}(\tau), \tau)d\tau.$$

Άρα η $\phi(t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}.$$

□

Θα διατυπώσουμε τώρα το θεώρημα ύπαρξης τοπικής λύσης.

Θεώρημα 2.4. *Έστω η $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ και ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ ως προς $\mathbf{x}$ για οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο χωρίο $\bar{\Omega}'$ που ανήκει εξολοκλήρου στο Ω.*
Τότε για κάθε $(t_0, \mathbf{c}) \in \Omega$ υπάρχει ένα διάστημα $[a, b]$, το οποίο περιέχει το σημείο t_0, όπου υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη για την εξίσωση $y' = f(x, y)$.

Το θεώρημα της ύπαρξης ισχύει υπό πιο γενικές συνθήκες, συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2.5 *(Peano). Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς $(\mathbf{x}, t)$ σε κάποιο χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ του χώρου $(\mathbf{x}, t)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια τοπική λύση της (2.1) που περνά από το δοσμένο σημείο $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega$.*

Ας πάρουμε την περίπτωση δυο εξισώσεων

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2, t), \quad x_1(t_0) = c_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2, t), \quad x_2(t_0) = c_2.$$

Ως μηδενική προσέγγιση ας πάρουμε την $\overline{\phi}_0(t) = (c_1, c_2)$, η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = c_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(c_1, c_2, \tau)d\tau,$$

$$\phi_{12}(t) = c_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi_2(c_1, c_2, \tau)d\tau,$$

η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = c_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(\phi_{11}, \phi_{12}, \tau)d\tau,$$

$$\phi_{22}(t) = c_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi_2(\phi_{11}, \phi_{12}, \tau)d\tau,$$

. . . . .

η m-οστή προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_m(t) = (\phi_{m1}(t), \phi_{m2}(t))$ με

$$\phi_{m1}(t) = c_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(\phi_{m-11}, \phi_{m-12}, \tau)d\tau,$$

$$\phi_{m2}(t) = c_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi_2(\phi_{m-11}, \phi_{m-12}, \tau)d\tau,$$

. . . . .

Παράδειγμα 2.1 Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος $Cauchy$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2^2 + t^2, \quad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + sin^2 x_2, \quad x_2(0) = 0,$$

παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα $\overline{\phi}_0(t) = (0, 0)$

Λύση. Η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{3},$$

$$\phi_{12}(t) = \int_0^t 0 d\tau = 0,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_1(t) = (t^3/3, 0)$. Η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = \int_0^t \big(\frac{\tau^3}{3} + \tau^2\big) d\tau = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3},$$

$$\phi_{22}(t) = \int_0^t \frac{\tau^3}{3} d\tau = \frac{t^4}{12},$$

δηλαδή $\overline{\phi}_2(t) = (t^4/12 + t^3/3, t^4/12)$.

Παράδειγμα 2.2 Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος $Cauchy$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + t, \quad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2, \quad x_2(0) = 1,$$

παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα $\overline{\phi}_0(t) = (0, 1)$

Λύση. Η πρώτη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_1(t) = (\phi_{11}(t), \phi_{12}(t))$ με

$$\phi_{11}(t) = \int_0^t (-1 + \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} - t,$$

$$\phi_{12}(t) = 1 + \int_0^t 1 d\tau = 1 + t,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_1(t) = (t^2/2 - t, 1 + t)$. Η δεύτερη προσέγγιση είναι $\overline{\phi}_2(t) = (\phi_{21}(t), \phi_{22}(t))$ με

$$\phi_{21}(t) = \int_0^t \big(\frac{\tau^2}{2} - \tau - 1\big) d\tau = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - t,$$

$$\phi_{22}(t) = 1 + \int_0^t \big(\frac{\tau^2}{2} + 1\big) d\tau = \frac{t^3}{6} + t + 1,$$

δηλαδή $\overline{\phi}_2(t) = (t^3/6 - t^2/2 - t, t^3/6 + t + 1)$.

Θεώρημα 2.6 *(συνεχούς εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα). Έστω* $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ *είναι δυο λύσεις της εξίσωσης* (2.1) *ορισμένες στο* $|t - t_0| < T$. *Έστω ότι το* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ *είναι* $Lipschitz$ *διανυσματικό πεδίο ως προς* $\mathbf{x}$ *και συνεχές ως προς* t. *Τότε*

$$|\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{y}(t_0 + h)| \leq e^{K|h|} |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)|. \tag{2.13}$$

Απόδειξη. Έστω $h > 0$. Θεωρούμε την

$$\sigma(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2.$$

Για την παράγωγο της $\sigma(t)$ παίρνουμε

$$\sigma'(t) = 2\big(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\big) \cdot \big(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)\big) \le 2K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2K\sigma(t).$$

Συνεπώς

$$\big(\sigma'(t) - 2K\sigma(t)\big)e^{-2Kt} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\sigma(t)e^{-2Kt}\big)' \le 0.$$

Άρα η $\sigma(t)e^{-2Kt}$ είναι μη αύξουσα και $\sigma(t_0 + h) \le \sigma(t_0)e^{2Kh}$. Εξάγοντας την τετραγωνική ρίζα αποδεικνύουμε την (2.13) για $h > 0$.

Έστω τώρα $h < 0$. Προφανώς

$$-\sigma'(t) \le |\sigma'(t)| \le 2K\sigma(t).$$

Συνεπώς

$$\big(\sigma'(t) + 2K\sigma(t)\big)e^{2Kt} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\sigma(t)e^{2Kt}\big)' \ge 0.$$

Δηλαδή η $\sigma(t)e^{2Kt}$ είναι μη φθίνουσα και $\sigma(t_0 + h) \le \sigma(t_0)e^{-2Kh}$. Απ' όπου προκύπτει η (2.13) για $h < 0$.

□

Από το Θεώρημα 2.6, ως πόρισμα, αμέσως προκύπτει και το θεώρημα μοναδικότητας. Επίσης θα διατυπώσουμε ένα άλλο πόρισμα αυτού του θεωρήματος:

Πόρισμα. Έστω $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0, \mathbf{c}) = \mathbf{c}.$$

Έστω ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, και έστω η συνάρτηση $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ είναι ορισμένη στο $|\mathbf{c} - \mathbf{c}^0| \le L$, $|t - t_0| \le T$. Τότε

1. $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ είναι συνεχής ως προς τις μεταβλητές $(t, \mathbf{c})$, δηλαδή

$$\lim_{(t,\mathbf{c}) \to (t_0, \mathbf{c}_0)} \mathbf{x}(t, \mathbf{c}) = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{c}_0).$$

2. Αν $\mathbf{c} \to \mathbf{c}_0$ τότε $\mathbf{x}(t, \mathbf{c}) \to \mathbf{x}(t, \mathbf{c}_0)$ ομοιόμορφα για $|t - t_0| \le T$.

Και οι δυο ισχυρισμοί προκύπτουν από την εκτίμηση (2.13).

Θεώρημα 2.7 *(συνεχούς εξάρτησης από το δεύτερο μέρος του συστήματος). Έστω $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ είναι λύσεις των συστημάτων*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{y}, t),$$

αντίστοιχα, στο διάστημα $|t - t_0| < T$. Έστω $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι ορισμένα σε κάποιο χωρίο $D \subset \mathbf{R}^n \times (-T + t_0, T + t_0)$ και στο χωρίο αυτό

$$|\mathbf{F}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{z}, t)| \le \varepsilon.$$

Έστω $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \le |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)|e^{K|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{K}[e^{K|t-t_0|} - 1]. \tag{2.14}$$

$\Big($Παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται η συνάρτηση $\mathbf{G}$ να είναι *Lipschitz*.$\Big)$

Απόδειξη. Εισάγουμε την

$$\sigma(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k(t) - y_k(t)]^2.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της $\sigma(t)$

$$\sigma'(t) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)) +$$
$$+ 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, παίρνουμε

$$|\sigma'(t)| \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}||\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)| + 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}||\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)|.$$

Αφού

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ και } |\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)| \leq \varepsilon,$$

καταλήγουμε σε μια διαφορική ανισότητα για $\sigma(t)$ της μορφής

$$\sigma'(t) \leq 2K\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}. \tag{2.15}$$

Θα αποδείξουμε ότι από την (2.15) προκύπτει η

$$\sigma(t) \leq [\sqrt{\sigma(t_0)}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2 \quad \text{για } t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{2.16}$$

Η περίπτωση $t \in [-T + t_0, t_0]$ εξετάζεται με τον ίδιο τρόπο. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(\sigma) = 2K\sigma + 2\varepsilon\sqrt{\sigma}$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του $Lipschitz$ στο ημιεπίπεδο $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Πράγματι,

$$|H(\sigma_1) - H(\sigma_2)| = |2K\sigma_1 + 2\varepsilon\sqrt{\sigma_1} - 2K\sigma_2 - 2\varepsilon\sqrt{\sigma_2}| \leq$$
$$\leq 2K|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\varepsilon|\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}| = 2K|\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{2\varepsilon|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} =$$
$$(2K + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}})|\sigma_1 - \sigma_2| \leq (2K + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_0}})|\sigma_1 - \sigma_2|$$

Βλέπουμε ότι

$$K_1 = 2K + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma_0}} \to \infty \text{ αν το } \sigma_0 \to 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $H(\sigma)$ δεν είναι $Lipschitz$, αν $\sigma_0 = 0$.

Έστω $\sigma_0 = \sigma(t_0) > 0$, τότε η λύση του προβλήματος

$$\frac{du}{dt} = 2Ku + 2\varepsilon\sqrt{u}, \quad u \geq 0, \tag{2.17}$$

η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(t_0) = \sigma(t_0)$ θα παραμείνει στο ημιεπίπεδο $\sigma \geq \sigma(t_0)$ για $t > t_0$, επειδή $u'(t) \geq 0$ από την εξίσωση. Δηλαδή, $u(t) \geq \sigma(t_0) > 0$ για $t > t_0$. Η εξίσωση (2.17) είναι η γνωστή εξίσωση του $Bernoulli$. Για να βρούμε την λύση της (2.17), που ικανοποιεί την συνθήκη $u(t_0) = \sigma(t_0)$, θα κάνουμε αλλαγή $v(t) = \sqrt{u(t)}$. Αυτό είναι εφικτό επειδή

$u(t) \geq \sigma(t_0) > 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αντικατάσταση, από (2.17) θα περάσουμε στην

$$2vv' = 2Kv^2 + 2\varepsilon v.$$

Αφού $u(t) > 0$, επομένως $v(t) > 0$ για $t \geq t_0$, άρα είναι δυνατή η διαίρεση δια το v και έτσι καταλήγουμε στην

$$v' - Kv = \varepsilon, \quad v(t_0) = \sqrt{u(t_0)}. \tag{2.18}$$

Η λύση της (2.18) έχει την μορφή

$$v(t) = \sqrt{u(t_0)}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1) = \sqrt{u(t)}.$$

Απο το Θεώρημα σύγκρισης (αφού έχουμε τις (2.15) και 2.17)) $u(t) \geq \sigma(t)$ και $\sqrt{u(t)} \geq \sqrt{\sigma(t)}$, συνεπώς

$$\sqrt{\sigma(t)} \leq \sqrt{\sigma(t_0)}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)$$

και παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Από εδώ αμέσως προκύπτει η (2.14).

Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση $\sigma(t_0) = 0$. Ας τονίσουμε οτι εδώ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεωρημα σύγκρισης. Έστω $u_n(t)$ είναι η λύση της (2.17) με αρχική συνθήκη $u_n(t_0) = 1/n$. Θα αποδείξουμε ότι $u_n(t) \geq \sigma(t)$. Έστω ισχύει το αντίθετο και υπάρχει $t^* > t_0$ τέτοιο ώστε $u_n(t^*) < \sigma(t^*)$. Την αρχική στιγμή

$$\frac{1}{n} = u_n(t_0) > \sigma(t_0) = 0 \;\text{ και }\; \frac{du}{dt} > \frac{d\sigma}{dt},$$

επομένως υπάρχει κάποιο διάστημα $[t_0, t']$ στο οποίο $u_n \geq \sigma$. Έστω $u_n(t') = \sigma(t')$. Η u_n είναι αύξουσα συνάρτηση και $u_n(t_0) = 1/n > 0$, επομένως

$$u_n(t') = \sigma(t') > 0 \;\text{ και }\; u_n(t) \leq \sigma(t), \;\text{ για }\; t' \leq t \leq t^*.$$

Αν θα πάρουμε ως αρχική στιγμή το t', θα βρεθούμε υπό τις συνθήκες του προηγούμενου ισχυρισμού. Δηλαδή, αφού $\sigma(t') > 0$, η $H(\sigma)$ είναι $Lipschitz$ στο $\sigma \geq \sigma(t') > 0$ και επομένως, από το θεώρημα σύγκρισης, η λύση της (2.17) με αρχική συνθήκη $u(t') = \sigma(t')$ θα ικανοποιεί την ανισότητα $u_n(t) \geq \sigma(t)$ για $t \geq t'$. Άρα θα πρέπει $u_n(t^*) \geq \sigma(t^*)$, το οποίο αντιφάσκει με την αρχική προϋπόθεση $u_n(t^*) < \sigma(t^*)$. Επομένως

$$\sigma(t) \leq [n^{-1/2}e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2 \tag{2.19}$$

για $n > 0$. Περνώντας στο όριο στην (2.19), όταν $n \to \infty$, θα πάρουμε

$$\sigma(t) \leq [\frac{\varepsilon}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)]^2,$$

που αντιστοιχεί στην (2.16) για $\sigma(t_0) = 0$.

□

§2.1 Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα αυτά στις εξισώσεις n ταξεως.

Έστω έχουμε μια διαφορική εξίσωση n-οστης τάξης

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \tag{2.20}$$

σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \quad \dots, \quad y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-1}, \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_n, \tag{2.21}$$

όπου $y^{[k]}$ σημαίνει την k-οστη παράγωγο της $y(t)$ ως προς t. Για να διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για το πρόβλημα (2.20), (2.21) θα περάσουμε από την (2.20) σε ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Για αυτό το σκοπό εισάγουμε νέες συναρτήσεις με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t), \\ x_3(t) &= y''(t), \\ &\dots \\ x_{n-1}(t) &= y^{(n-2)}(t), \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ θα πάρουμε το εξής σύστημα πρώτης τάξης

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{cases} \tag{2.22}$$

Δηλαδή στο σύστημα (2.1) παίρνουμε $\Phi_1 = x_2$, ..., $\Phi_{n-1} = x_n$, $\Phi_n = f(t, \mathbf{x})$. Οι αρχικές συνθήκες (2.21) θα γραφτούν σε μορφή

$$x_1(t_0) = c_1, \quad x_2(t_0) = c_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = c_n \;\text{ ή }\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}. \tag{2.23}$$

Παράδειγμα 2.3 Γράψτε το πρόβλημα $Cauchy$

$$y''' + y^2 = sin\, t, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = -1$$

ως πρόβλημα $Cauchy$ για σύστημα εξισώσεων 1-ης τάξης.

Λύση. Θέτουμε $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \;\; x_1(0) = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \;\; x_2(0) = 1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1^2 + sin\, t, \;\; x_3(0) = -1. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για τα συστήματα πρώτης τάξης έχουμε, ότι για να υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος (2.22), (2.23) το δεύτερο μέρος της (2.22) πρέπει να είναι *Lipschitz* συναρτήσεις ως προς $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αν θα συμβολίσουμε με $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ το δεύτερο μέρος της (2.22), θα πάρουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| =$$

$$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + (f(t,x) - f(t,y))^2} \leq \tag{2.24}$$

$$\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})|,$$

όπου $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Δηλαδή από την (2.24) προκύπτει ότι, αν η $f(t, \mathbf{x})$ είναι *Lipschitz* συνεχής ως προς x, τότε υπάρχει μια και μοναδική λύση της (2.22) που ικανοποιεί την (2.23). Άρα έχουμε

Θεώρημα 2.8. *Αν η $f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής t και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές σε κάποια περιοχή του σημείου $(t_0, \mathbf{c})$, τότε υπάρχει μια και μοναδική τοπική λύση της (2.20) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (2.21).*

Αν η εξίσωση (2.20) είναι γραμμική δηλαδή

$$f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g(t),$$

τότε το σύστημα (2.22) παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \cdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x_{i+1} + g(t) \end{cases}$$

Άρα η (2.24) θα επαληθεύετε για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ και ως συνέπεια εξασφαλίζεται η ολική ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (2.20),(2.21)(βλ. Θεώρημα 1.2 σελίδα 9).

Πράγματι η (2.24) παίρνει τη μορφή

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \Big| \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)(x_{i+1} - y_{i+1}) \Big| =$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})|$$

όπου $\mathbf{a} = (a_0, ..., a_{n-1})$. Άρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwartz$, έχουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{a}||\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

με

$$K = 1 + \max_t \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(t) \Big)^{1/2}.$$

Όπως έχουμε διαπιστώσει μια εξίσωση n τάξεως ανάγεται σε ένα σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξης. Στην περίπτωση που οι συντελεστές και το δεύτερο μέρος του συστήματος είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τοπικά ισχύει και το αντίστροφο. Θα το αποδείξουμε για συστήματα δυο εξισώσεων (η περίπτωση περισσότερων εξισώσεων αντιμετωπίζεται παρομοίως). Θα γράφουμε x, y αντι για x_1, x_2 και f g αντί για Φ_1, Φ_2. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,t) \\ y' &= g(x,y,t). \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} x'' &= f_x(x,y,t)x' + f_y(x,y,t)y' + f_t(x,y,t) = \\ &f_x(x,y,t)x' + f_y(x,y,t)g(x,y,t) + f_t(x,y,t). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Έστω ότι $f_y \neq 0$ για κάποιο y, τότε την πρώτη εξίσωση (χρησημοποιόντας το Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης) μπορούμε τοπικά να την λύσουμε ως προς y δηλαδη να την γράψουμε σε μορφή

$$y = h(x, x', t).$$

Τότε η (2.25) θα πάρει τη μορφή

$$x'' = f_x(x,y,t)x' + f_y(x,y,t)g(x,y,t) + f_t(x,y,t)\Big|_{y=h(x,x',t)} = F(t,x,x').$$

Παράδειγμα 2.4 Ανάγετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t)y, \\ y' &= c(t)x + d(t)y \end{aligned}$$

σε μια εξίσωση, υποθέτουμε πως οι $a(t), b(t), c(t), d(t)$ είναι C^1 συναρτήσεις και $b \neq 0$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} x'' = a\,x' + b\,y' + a'x + b'y &= a\,x' + b(c\,x + d\,y) + a'x + b'y = \\ &a\,x' + bc\,x + (bd + b')y + a'x. \end{aligned}$$

Απο την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$y = \frac{x' - a\,x}{b}, \tag{2.26}$$

άρα

$$x'' = a\,x' + bc\,x + (bd + b')\frac{x' - a\,x}{b} + a'x$$

και

$$x'' = \big(a + d + \frac{b'}{b}\big)x' + \big(bc - da - a\frac{b'}{b} + a'\big)x. \tag{2.27}$$

Συνεπώς αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος μπορούμε πρώτα να προσδιορίσουμε την $x(t)$ απο (2.27) και μετά την $y(t)$ απο (2.26)

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. Γράψτε την εξίσωση
$$y''' + 2y'' - y' + 5y = e^t - 1,$$
ως σύστημα εξισώσεων 1-ης τάξης.

Άσκηση 2.2. Γράψτε την εξίσωση
$$y''' + (y'')^2 - |y'|^\alpha + sin\, y = f(t), \tag{2.28}$$
α - σταθερά, ως σύστημα εξισώσεων 1-ης τάξης.

Άσκηση 2.3. Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος
$$x' = x + y + f(t),$$
$$y' = x - y + g(t)$$
ανάγοντάς το σε μια εξίσωση. Υποθέτουμε πως οι f και g είναι C^1 συναρτήσεις.

Άσκηση 2.4. Για ποιές τιμές της σταθεράς α το πρόβλημα αρχικών τίμων για την εξίσωση (2.28) έχει μοναδική λύση;

Άσκηση 2.5. Κατασκευάστε τις τέσσερις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος $Cauchy$
$$x_1' = x_1 + x_2, \;\; x_1(0) = 1,$$
$$x_2' = x_1 - x_2, \;\; x_2(0) = \sqrt{2} - 1,$$
- παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση το διάνυσμα $\phi_0 = (1, \sqrt{2} - 1)$.

Άσκηση 2.6. Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσεγγίση της λύσης του προβλήματος
$$x_1' = x_2 - 1, \;\; x_1(0) = 0,$$
$$x_2' = 4x_1 + 4t, \;\; x_2(0) = 2,$$
- παίρνοντας ως $\phi_0 = (0, 2)$.

Άσκηση 2.7. Κατασκευάστε την πρώτη και τη δεύτερη διαδοχική προσεγγίση της λύσης του προβλήματος
$$x_1' = e^{x_2}, \;\; x_1(0) = -1,$$
$$x_2' = x_1, \;\; x_2(0) = 0,$$
- παίρνοντας ως $\phi_0 = (-1, 0)$.

Άσκηση 2.8. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα
$$s' = v, \;\; s(0) = 0,$$
$$v' = g(t) - k(t)v^2, \;\; v(0) = 0,$$
όπου $k(t) > 0$, $0 < g(t) < 10$, έχει λύση για όλα τα t (ολική ύπαρξη).

Άσκηση 2.9. Αποδείξτε ότι το σύστημα (2.22) ανάγεται στην εξίσωση (2.20).

§3. Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Θα συμβολίσουμε με $A = (a_{ij})$ τον πίνακα συντελεστών του (3.1), με $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ το διάνυσμα-στήλη των άγνωστων συναρτήσεων και με $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$ το διάνυσμα-στήλη των δεύτερων μέρων των εξισώσεων του συστήματος (3.1)

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς θα ξαναγράψουμε την (3.1) σε μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + f(t) \text{ ή } \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + f(t), \tag{3.2}$$

όπου στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}(t)$ και $f_i(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις αμέσως έχουμε το θεώρημα ολικής ύπαρξης και μοναδικότητα της λύσης για την (3.2) με αρχικές συνθήκες $\mathbf{x}(t_0) = c$ αφού η $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x} + f(t)$ ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.3. Πράγματι

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| = |A(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y},$$

όπου η σταθερά $K = \max_{t \in [a,b]} \|A(t)\|$.

§3.1 Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Αν $f_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$, τότε λέμε ότι το (3.2) είναι ομογενές σύστημα, αλλιώς λέμε ότι το σύστημα είναι μη ομογενές. Έστω έχουμε m λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\mathbf{x}^{[1]}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{[1]}(t) \\ x_2^{[1]}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{[1]}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{x}^{[m]}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{[m]}(t) \\ x_2^{[m]}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{[m]}(t) \end{bmatrix}.$$

Τότε η συνάρτηση

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t)$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των λύσεων. Εδω $C_1, \dots, C_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Θεώρημα 3.1. *Ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι επίσης λύση αυτού του συστήματος.*

Απόδειξη. Έστω έχουμε m λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - A\mathbf{x} = 0, \tag{3.3}$$

δηλαδή

$$\frac{dx_i^{[k]}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{[k]} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

Αντικαθιστούμε το $\mathbf{x}(t)$ με $\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}$ στην (3.3)

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]} - A \sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]} = \sum_{k=1}^{m} C_k \left(\frac{d\mathbf{x}^{[k]}}{dt} - A\mathbf{x}^{[k]}\right) = 0,$$

επειδή κάθε $\mathbf{x}^{[k]}$ είναι λύση της (3.3).

□

Θεώρημα 3.2. *Αν η $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος τότε και το πραγματικό μερος $\mathbf{u}(t)$ και το φανταστικό μέρος $\mathbf{v}(t)$ είναι επίσης λύσεις αυτού του συστήματος.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$0 = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - A\mathbf{x} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - A\mathbf{u}\right) + i\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - A\mathbf{v}\right),$$

άρα

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - A\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} - A\mathbf{v} = 0.$$

Ορισμός. *Διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \dots, m$ ονομάζονται γραμμικά εξαρτημένες σε ένα διάστημα, αν υπάρχουν τέτοιες σταθερές $C_1, \dots, C_m$,* *ανάμεσα στις οποίες τουλάχιστον μια είναι διάφορη του μηδενός, ώστε στο διάστημα αυτό λαμβάνει χώρα η ταυτότητα:*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) \equiv 0.$$

Αλλιώς, ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^{[1]}(t) \cdots x_1^{[n]}(t) \\ x_2^{[1]}(t) \cdots x_2^{[n]}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n^{[1]}(t) \cdots x_n^{[n]}(t) \end{vmatrix}$$

ονομάζεται Βρονσκιανή του συστήματος διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{x}^{[1]}(t), \dots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$.

□

Θεώρημα 3.3. *Αν οι $\mathbf{x}^{[1]}(t), \dots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες σε ένα διάστημα, τότε η Βρονσκιανή στο διάστημα αυτό ισούται με μηδέν.*

Απόδειξη. Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι εάν ένας πίνακας έχει γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ή στήλες, τότε η ορίζουσά του ισούται με μηδέν. Το Θεώρημα 3.3 είναι άμεσο πόρισμα αυτού του ισχυρισμού.

□

Θεώρημα 3.4. *Αν η Βρονσκιανή των $\mathbf{x}^{[1]}(t), \dots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$, που είναι λύσεις του $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ σε ένα διάστημα, μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $t = t_0$ του διαστήματος, τότε $\mathbf{x}^{[1]}, \dots, \mathbf{x}^{[n]}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Έστω $W(t_0) = 0$. Τότε τα διανύσματα $\mathbf{x}^{[1]}(t_0), \dots, \mathbf{x}^{[n]}(t_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, επομένως υπάρχουν τέτοιες σταθερές $C_1^*, \dots, C_n^*$, ανάμεσα στις οποίες τουλάχιστον μια είναι διάφορη του μηδενός, ώστε

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t_0) = 0.$$

Κατασκευάζουμε την

$$\mathbf{x}^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t). \tag{3.4}$$

Έχουμε αποδείξει ότι η (3.4) είναι λύση του συστήματος $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ και στο $t = t_0$, $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$. Από το θεώρημα μοναδικότητας προκύπτει ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$. Είναι προφανές ότι αυτή η συνάρτηση είναι η μηδενική συνάρτηση, επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t) \equiv 0, \quad t \in [a, b].$$

□

Πόρισμα. Αν η Βρονσκιανή μηδενίζεται σε ένα σημείο $t_0 \in [a, b]$, τότε είναι μηδέν σε όλο το διάστημα $[a, b]$. (Υπενθυμίζω ότι το $[a, b]$ είναι το διάστημα ύπαρξης των $\mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$).

Παρατήτηση. Το Θεώρημα 3.4 και το άνω Πόρισμα ισχύουν μόνο για Βρονσκιανές των διανυσματικών συναρτήσεων που αποτελούν λύσεις του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Ορισμός. *Το σύστημα n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του συστήματος*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

ονομάζεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Θεώρημα 3.5. *Θεμελιώδη συστήματα λύσεων υπάρχουν.*

Απόδειξη. Θα επιλέξουμε n^2 αριθμούς $\gamma_i^{[k]}$ τέτοιους ώστε

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^{[1]} \cdots \gamma_1^{[n]} \\ \gamma_2^{[1]} \cdots \gamma_2^{[n]} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \gamma_n^{[1]} \cdots \gamma_n^{[n]} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.5}$$

Μπορούμε να ικανοποιήσουμε την (3.5) θέτοντας:

$$\gamma_i^{[k]} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Θα κατασκευάσουμε n λύσεις, οι οποίες παίρνουν στο σημείο $t = t_0$ τις τιμές $x_i^{[k]}(t_0) = \gamma_i^{[k]}$, $i, k = 1, \ldots, n$. Αφού στο $t = t_0$ η Βρονσκιανή έχει την μορφή (3.5) και διαφέρει από το μηδέν, άρα θα πάρουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 (Πόρισμα 3.1).

□

Θεώρημα 3.6. *Έστω $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ είναι θεμελιώδες σύστημα λύσεων του $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Τότε οποιαδήποτε λύση αυτού του συστήματος μπορεί να παρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ με κατάλληλες σταθερές, δηλαδή σε μορφή*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}(t)$ είναι μια λύση του $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}_0$ $\Big($ δηλαδή $(x_1(t_0), ..., x_n(t_0)) = (c_{01}, ..., c_{0n})$ $\Big)$. Αφού $W(t_0) \neq 0$, έχουμε ότι $\mathbf{x}^{[k]}(t_0)$, $k = 1, \ldots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, επομένως υπάρχουν τέτοιες σταθερές C_k^*, $k = 1, \ldots, n$ ώστε $\mathbf{c}_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t_0)$. Κατασκευάζουμε την

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

Η $\mathbf{x}^*(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων του συστήματος $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$, άρα είναι λύση αυτού του συστήματος . Λόγω κατασκευής $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{c}_0$, άρα από το θεώρημα μοναδικότητας αμέσως προκύπτει $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, δηλαδή

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

□

Θεώρημα 3.7. *Έστω* $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \dots, n$ *σχηματίζουν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

τότε

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} [\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}] d\xi}. \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης των οριζουσών έχουμε

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{[1]}}{dt} \cdots \frac{dx_1^{[n]}}{dt} \\ x_2^{[1]} \cdots x_2^{[n]} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n^{[1]} \cdots x_n^{[n]} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_1^{[1]} \cdots x_1^{[n]} \\ x_2^{[1]} \cdots x_2^{[n]} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{dx_n^{[1]}}{dt} \cdots \frac{dx_n^{[n]}}{dt} \end{vmatrix}.$$

Αφού $\frac{d\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = A\mathbf{x}^{(k)}$ έχουμε

$$\frac{dx_i^{[k]}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{[k]}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους $\frac{dx_i^{[k]}}{dt}$ με τα δεξιά μέρη της τελευταίας ισότητας και εκμεταλλεύοντας το γεγονός ότι η τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται αν θα προσθέσουμε σε μια γραμμή της ορίζουσας έναν γραμμικό συνδυασμό υπόλοιπων, θα πάρουμε

(3.7)

$$W'(t) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1^{[1]} + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{[1]} & \cdots & a_{11}x_1^{[n]} + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{[n]} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ x_n^{[1]} & \cdots & x_n^{[n]} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1^{[1]} & \cdots & x_1^{[n]} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ a_{nn}x_n^{[1]} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{[1]} & \cdots & a_{nn}x_n^{[n]} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{[n]} \end{vmatrix}.$$

Θα συμβολίσουμε με X_j την j-οστη γραμμή της Βρονσκιανής. Τότε η πρώτη γραμμή της πρώτης ορίζουσας στην (3.7) θα πάρει τη μορφή

$$a_{11}(x_1^{[1]},...,x_1^{[n]})+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(x_j^{[1]},...,x_j^{[n]})=a_{11}X_1+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}X_j,$$

όπου $\sum\limits_{j=2}^{n}a_{1j}X_j$ είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών από $j=2$ έως $j=n$ της Βρονσκιανής, και σύμφωνα με την προαναφερόμενη ιδιότητα των οριζουσών θα έχουμε

$$\text{(3.8)}\qquad \begin{vmatrix} a_{11}X_1+\sum\limits_{j=2}^{n}a_{1j}X_j \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{vmatrix}.$$

Επομένως η (3.7) με βάση την (3.8) θα μετατραπεί σε
(3.9)

$$W'(t)=\begin{vmatrix} a_{11}x_1^{[1]}\cdots a_{11}x_1^{[n]} \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n^{[1]}\cdots x_n^{[n]} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_1^{[1]}\cdots x_1^{[n]} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{nn}x_n^{[1]}\cdots a_{nn}x_n^{[n]} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}W(t).$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση (3.9) παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Από την (3.6) προκύπτει ότι αν W μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $t=t_0$, τότε είναι μηδενική συνάρτηση.

□

Έστω έχουμε n διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x}^{[1]}(t),\ldots,\mathbf{x}^{[n]}(t)$, που είναι της κλάσεως C^1. Η συνθήκη $W(t)\neq 0$ είναι αναγκαία για να μπορούν οι $\mathbf{x}^{[1]}(t),\ldots,\mathbf{x}^{[n]}(t)$ να αποτελέσουν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων ενός διαφορικού συστήματος. Κατασκευάζοντας ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, το οποίο έχει ως θεμελιώδες σύστημα λύσεων τις $\mathbf{x}^{[1]}(t),\ldots,\mathbf{x}^{[n]}(t)$ θα δείξουμε ότι η ίδια αυτή η συνθήκη είναι και ικανή. Θεωρούμε τις ακόλουθες n γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ως προς $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$

$$\text{(3.10)}\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1^{[1]} & \cdots & x_1^{[n]} \\ . & . & \cdots & . \\ x_n & x_n^{[1]} & \cdots & x_n^{[n]} \\ \frac{dx_i}{dt} & \frac{dx_i^{[1]}}{dt} & \cdots & \frac{dx_i^{[n]}}{dt} \end{vmatrix}=0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Είναι προφανές ότι $\mathbf{x}^{[1]}(t),\ldots,\mathbf{x}^{[n]}(t)$ ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις. Πράγματι, αν θα αντικαταστήσουμε το $\mathbf{x}(t)$ με $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k=1,\ldots,n$, η ορίζουσα θα έχει δυο ίδιες στήλες, άρα θα είναι μηδεν. Αφού η Βρονσκιανή των

$\mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$ διαφέρει από το μηδέν, μπορούμε να παραστήσουμε τις εξισώσεις (3.10) σε λυμένη μορφή ως προς $\frac{dx_i}{dt}$, $i = 1, \ldots, n$. Πράγματι απο (3.10) έχουμε

$$(-1)^{n+2} W(t) \frac{dx_i}{dt} +$$

$$(-1)^{n+1} x_n \begin{vmatrix} x_1^{[1]} & \cdots & x_1^{[n]} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n-1}^{[1]} & \cdots & x_{n-1}^{[n]} \\ \frac{dx_i^{[1]}}{dt} & \cdots & \frac{dx_i^{[n]}}{dt} \end{vmatrix} + \cdots + x_1 \begin{vmatrix} x_2^{[1]} & \cdots & x_2^{[n]} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n^{[1]} & \cdots & x_n^{[n]} \\ \frac{dx_i^{[1]}}{dt} & \cdots & \frac{dx_i^{[n]}}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

$i = 1, \ldots, n$. Επομένως το ζητούμενο σύστημα είναι το ακόλουθο

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{(-1)^{n+1}}{W(t)} x_1 \begin{vmatrix} x_2^{[1]} & \cdots & x_2^{[n]} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n^{[1]} & \cdots & x_n^{[n]} \\ \frac{dx_i^{[1]}}{dt} & \cdots & \frac{dx_i^{[n]}}{dt} \end{vmatrix} + \cdots + \frac{(-1)^n}{W(t)} x_n \begin{vmatrix} x_1^{[1]} & \cdots & x_1^{[n]} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n-1}^{[1]} & \cdots & x_{n-1}^{[n]} \\ \frac{dx_i^{[1]}}{dt} & \cdots & \frac{dx_i^{[n]}}{dt} \end{vmatrix},$$

$i = 1, \ldots, n$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχει μόνο ένα σύστημα, που έχει ως θεμελιώδες σύστημα λύσεων τις δοσμένες συναρτήσεις. Πράγματι, έστω υπάρχουν δυο τέτοια συστήματα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A^*(t)\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

Αφού και τα δυο συστήματα έχουν κοινό θεμελιώδες σύστημα λύσεων και οποιαδήποτε λύση $\mathbf{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων που αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων, συμπεράνουμε ότι $(A(t) - A^*(t))\mathbf{x} = 0$, και επομένως $(A - A^*)\mathbf{x}(t_0) = 0$ για οποιαδήποτε λύση των συστημάτων (3.11). Τα διανύσματα $\mathbf{x}^{[1]}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t_0)$ αποτελούν την βάση στον R^n και $A - A^*$ είναι τελεστής (γραμμική απεικόνιση) που δρα από το R^n στο R^n για κάθε $t_0 \in [a, b]$, επομένως έχουμε ότι $(A - A^*)\mathbf{x}^0 = 0$ για οποιοδήποτε $\mathbf{x}^0 \in R^n$ και $t_0 \in [a, b]$, άρα $A - A^* = 0$, $A = A^*$ για κάθε $t_0 \in [a, b]$, δηλαδή $A \equiv A^*$.

Παράδειγμα 3.1. Κατασκευάστε ένα (και μοναδικό) σύστημα 2 διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, το οποίο έχει ως θεμελιώδες σύστημα λύσεων τις

$$x^{[1]}(t) = (x_1^{[1]}(t), x_2^{[1]}(t))^T = (2e^t, e^t)^T,$$

$$x^{[2]}(t) = (x_1^{[2]}(t), x_2^{[2]}(t))^T = (e^{-t}, 2e^{-t})^T.$$

Λύση. Προφανώς

$$W(t) = \begin{vmatrix} 2e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{vmatrix} = 3.$$

Αντι για x_1, x_2 θα γράφουμε x, y. Έχουμε (βλ. (3.10))

$$\begin{vmatrix} x & 2e^t & e^{-t} \\ y & e^t & 2e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} & 2e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

και

$$\begin{vmatrix} x & 2e^t & e^{-t} \\ y & e^t & 2e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} & e^t & -2e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

Δηλαδή

$$3\frac{dx}{dt} - y\begin{vmatrix} 2e^t & e^{-t} \\ 2e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ 2e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

$$3\frac{dy}{dt} - y\begin{vmatrix} 2e^t & e^{-t} \\ e^t & -2e^{-t} \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & -2e^{-t} \end{vmatrix} = 0.$$

Το ζητούμενο σύστημα είναι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y.$$

§3.2 Μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Θεώρημα 3.8. *Έστω οτι η $\bar{\varphi}(t)$ είναι ειδική λύση του συστήματος*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}.$$

Τότε οποιαδήποτε λύση αυτού του συστήματος μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \bar{\varphi}(t), \tag{3.12}$$

όπου $\mathbf{u}(t)$ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

Αν $\mathbf{x}(t)$ έχει τη μορφή (3.12) τότε είναι λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}(t)$ τυχαία λύση του

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\varphi}(t)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος. Πράγματι

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - A\mathbf{u} = \frac{d}{dt}\big(\mathbf{x} - \bar{\varphi}\big) - A(\mathbf{x} - \bar{\varphi}) =$$
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - A\mathbf{x} - (\frac{d\bar{\varphi}}{dt} - A\bar{\varphi}) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t) = 0.$$

Έστω τωρα η $\mathbf{u}(t)$ είναι τυχαία λύση του ομογενούς συστήματος. Θα δείξουμε ότι η (3.12) μας δίνει την λύση του μη ομογενούς. Έχουμε

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} + \bar{\varphi})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = A\mathbf{u} + A\bar{\varphi} + f =$$
$$A(\mathbf{u} + \bar{\varphi}) + f(t) = A\mathbf{x} + f.$$

□

Πόρισμα. Οποιαδήποτε λύση του μη ομογενούς συστήματος μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t),$$

όπου $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του ομογενούς συστήματος. Συνεπώς, όπως και στην περίπτωση μιας εξίσωσης, για να βρούμε την γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος (3.2), δηλαδή τον τύπο που περιέχει όλες τις λύσεις του (3.2), πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς και να προσθέσουμε την γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς. Η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων που αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Για να βρούμε την ειδική λύση, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μεταβολής των σταθερών.

Έστω $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ σχηματίζουν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}.$$

Θα ψάχνουμε την λύση του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}_k(t)\mathbf{x}^{[k]}(t). \tag{3.13}$$

Αντικαθιστούμε την (3.13) στο μη ομογενές σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}'_k(t)\mathbf{x}^{[k]}(t) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}_k(t)\mathbf{x}'^{[k]}(t) - \sum_{k=1}^{n} A(t)\widetilde{C}_k(t)\mathbf{x}^{[k]}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}'_k(t)\mathbf{x}^{[k]}(t) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}_k(t)[\mathbf{x}'^{[k]}(t) - A(t)\mathbf{x}^{[k]}(t)] = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}'_k(t)\mathbf{x}^{[k]}(t) = f(t).$$

Δηλαδή έχουμε να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα ως προς $\widetilde{C}'_k(t)$

$$(\widetilde{C}'_1, \dots, \widetilde{C}'_n) \begin{pmatrix} x_1^{[1]} & x_1^{[2]} & \cdots & x_1^{[n]} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ x_n^{[1]} & x_n^{[2]} & \cdots & x_n^{[n]} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Η ορίζουσα αυτού του πίνακα διαφέρει από το μηδέν αφού ισούται με την Βρονσκιανή του θεμελιώδους συστήματος λύσεων. Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε τις $\widetilde{C}'_1, \dots, \widetilde{C}'_n$ μονοσήμαντα. Έστω

$$\widetilde{C}'_k(t) = \varphi_k(t),$$

άρα

$$\widetilde{C}_k(t) = \int \varphi_k(t)dt + \gamma_k,$$

όπου γ_k, $k = 1, \dots, n$ είναι σταθερές. Αφού αρκεί να βρούμε μόνο μια ειδική λύση, μπορούμε να θέσουμε $\gamma_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Επομένως η ειδική λύση θα γράφεται σαν

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int \varphi_k(t)dt\, \mathbf{x}^{[k]}(t)$$

και για την γενική θα έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int \varphi_k(t)dt\, \mathbf{x}^{[k]}(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k\mathbf{x}^{[k]}(t).$$

§3.3 Γραμμικά Συστήματα Με Σταθερούς Συντελεστές

Στην περίπτωση που το σύστημα έχει σταθερούς συντελεστες το θεμελιώδες σύστημα λύσεων μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα θα περιοριστούμε με συστήματα δυο εξισώσεων (αντί για $x_1(t), x_2(t)$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x(t), y(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \tag{3.14}$$

Πρέπει να βρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος. Ψάχνουμε τις λύσεις σε μορφή

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt} \tag{3.15}$$

όπου α, β κάποιες σταθερές. Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις (3.15) στο σύστημα (3.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned}(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0\\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0\end{aligned}$$

ή

$$\begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση α, β του αλγεβρικού συστήματος (3.16) πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να ισούται με μηδέν

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0,$$

δηλαδή

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{3.17}$$

Αν οι ρίζες του k_1, k_2 χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.17) είναι διαφορετικές τότε οι δυο λύσεις του (3.14) που ψάχνουμε θα έχουν τη μορφή

$$(x_1, y_1) = (\alpha_1 e^{k_1 t}, \beta_1 e^{k_1} t), \quad (x_2, y_2) = (\alpha_2 e^{k_2 t}, \beta_2 e^{k_2} t). \tag{3.18}$$

Αντικαθιστώντας την (3.18) στο (3.14) προσδιορίζουμε (όχι μονοσήμαντα) τις $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Προφανώς, (α_1, β_1) είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_1, και (α_2, β_2) είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_2.

Παράδειγμα 3.2. Να βρεθεί το θεμελιώδες σύστημα και η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 1.$$

Λύση. Ψάχνουμε πρώτα τη γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$

Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$

οι ρίζες είναι $k_1 = 5$, $k_2 = -1$. Συνεπώς

$$(x_1, y_1) = (\alpha_1 e^{5t}, \beta_1 e^{5t}), \quad (x_2, y_2) = (\alpha_2 e^{-t}, \beta_2 e^{-t}).$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα την (x_1, y_1) παίρνουμε $\beta_1 = 2\alpha_1$ με α_1 τυχαίο (διάφορο του μηδενός), έστω 1. Αντικαθιστώντας στο σύστημα την (x_2, y_2) παίρνουμε $\beta_2 = -\alpha_2$ με α_2 τυχαίο (διάφορο του μηδενός), έστω 1. Άρα το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$(x_1, y_1) = (e^{5t}, 2e^{5t}), \quad (x_2, y_2) = (e^{-t}, -e^{-t})$$

και η γενική λύση του ομογενούς συστήματος

$$(x, y) = c_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + c_2(e^{-t}, -e^{-t}).$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(1, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k_1 = 5$ και το διάνυσμα $(1, -1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k_2 = -1$.

Ψάχνουμε τώρα μια ειδική λύση $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή (βλ. (3.13))

$$\phi_1 = \tilde{c}_1(t)e^{5t} + \tilde{c}_2(t)e^{-t}, \quad \phi_2 = \tilde{c}_1(t)2e^{5t} - \tilde{c}_2(t)e^{-t}.$$

Αντικαθιστώντας την $\phi(t)$ στο αρχικό μας σύστημα για $\tilde{c}_1(t)$, $\tilde{c}_2(t)$ παίρνουμε (βλ. (3.14))

$$\tilde{c}_1'(t)e^{5t} + \tilde{c}_2'(t)e^{-t} = 2,$$
$$\tilde{c}_1'(t)2e^{5t} - \tilde{c}_2'(t)e^{-t} = 1.$$

Συνεπώς $\tilde{c}_1'(t) = e^{-5t}$, $\tilde{c}_2'(t) = e^{t}$ άρα επιλέγουμε

$$\tilde{c}_1(t) = -\frac{1}{5}e^{-5t}, \quad \tilde{c}_2(t) = e^{t}$$

και $\phi_1 = 4/5$, $\phi_2 = -7/5$.

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$(x, y) = c_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + c_2(e^{-t}, -e^{-t}) + (\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}).$$

Παράδειγμα 3.3. Να βρεθεί και η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 3e^{5t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 3t.$$

Λύση. Ψάχνουμε μια ειδική λύση $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή

$$\phi_1 = \tilde{c}_1(t)e^{5t} + \tilde{c}_2(t)e^{-t}, \quad \phi_2 = \tilde{c}_1(t)2e^{5t} - \tilde{c}_2(t)e^{-t}.$$

Αντικαθιστώντας την $\bar{\phi}(t)$ στο σύστημα για $\tilde{c}_1(t)$, $\tilde{c}_2(t)$ παίρνουμε

$$\tilde{c}_1'(t)e^{5t} + \tilde{c}_2'(t)e^{-t} = 3e^{5t},$$
$$\tilde{c}_1'(t)2e^{5t} - \tilde{c}_2'(t)e^{-t} = 3t.$$

Συνεπώς $\tilde{c}_1'(t) = 1 + te^{-5t}$, $\tilde{c}_2'(t) = 2e^{6t} - te^t$ άρα

$$\tilde{c}_1(t) = t - \frac{1}{25}(5te^{-5t} + e^{-5t}), \quad \tilde{c}_2(t) = \frac{1}{3}e^{6t} - te^t + e^t$$

και

$$\phi_1 = te^{5t} + \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{6}{5}t + \frac{24}{25},$$
$$\phi_2 = 2te^{5t} - \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{3}{5}t - \frac{27}{25}.$$

Η γενική λύση του συστήματος

$$(x, y) = c_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + c_2(e^{-t}, -e^{-t}) + (\phi_1, \phi_2).$$

Παράδειγμα 3.4. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y.$$

Λύση. Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$k^2 + 9 = 0,$$

οι ρίζες είναι $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Συνεπώς

$$(x_1, y_1) = (\alpha_1 e^{3it}, \beta_1 e^{3it}).$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα την (x_1, y_1) παίρνουμε $(1 - 3i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0$. Π.χ. $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 1 - 3i$. Άρα

$$(x_1, y_1) = (5e^{3it}, (1 - 3i)e^{3it}).$$

Αφού και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος θα είναι λύση του συστήματος παίρνουμε ως θεμελιώδες σύστημα το ακόλουθο

$$(5cos\, 3t, cos\, 3t + 3sin\, 3t), \quad (5sin\, 3t, -3cos\, 3t + sin\, 3t)$$

και η γενική λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι

$$(x, y) = c_1(5cos\, 3t, cos\, 3t + 3sin\, 3t) + c_2(5sin\, 3t, -3cos\, 3t + sin\, 3t).$$

Αν έχουμε διπλή ρίζα τότε ψάχνουμε τη λύση του συστήματος σε μορφή

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{kt}, \quad y = (\beta_1 + \beta_2 t)e^{kt}$$

και προσδιορίζουμε τις σταθερές αντικαθιστώντας αυτή τη μορφή στο σύστημα.

Παράδειγμα 3.5. Να βρεθεί το θεμελιώδες σύστημα και η γενική λύση του συστήματος
$$\frac{dx}{dt} = x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

Λύση. Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$
Έχουμε διπλή ρίζα $k_{12} = 2$. Συνεπώς ψάχνουμε τη λύση σε μορφή
$$(x, y) = \big((\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{2t}, (\beta_1 + \beta_2 t)e^{2t}\big)$$
Αντικαθιστώντας στο σύστημα παίρνουμε
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_2 t = \alpha_1 + \alpha_2 t - \beta_1 - \beta_2 t.$$
Οπότε
$$\beta_2 = -\alpha_2$$
και
$$\beta_1 = -\alpha_1 - \alpha_2.$$
Αρα μπορούμε να πάρουμε ως θεμελιώδες σύστημα π.χ. το ακόλουθο
$$(e^{2t}, -e^{2t}), \quad (te^{2t}, (-1 - t)e^{2t})$$
και η γενική λύση θα είναι
$$(x, y) = c_1(e^{2t}, -e^{2t}) + c_2(te^{2t}, (-1 - t)e^{2t}).$$

Παράδειγμα 3.6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ για το σύστημα από το Παράδειγμα 3.5.

Λύση. Η γενική λύση είναι
$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t}$$
$$y(t) = -c_1 e^{2t} - c_2(1 + t)e^{2t}.$$
Για να προσδιορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές έχουμε
$$x(0) = c_1 = 1$$
$$y(0) = -c_1 - c_2 = -1.$$
Άρα η ζητούμενη λύση είναι
$$(x, y) = (e^{2t}, -e^{2t}).$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$
$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2, \quad x(0) = \frac{4}{5}$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 1, \quad y(0) = -\frac{7}{5}.$$

Άσκηση 3.2. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - y + \frac{e^t}{cost},$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y.$$

Άσκηση 3.3. Να λύσετε τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, ανάγοντας τα συστήματα σε εξισώσεις δευτερης τάξης.

Υπόδειξη: βλ. Παράδειγμα 2.4 στη σελίδα 38.

Άσκηση 3.4. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t^{1/3}(e^{3t} + e^{-t}),$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y + t^{1/3}(e^{3t} - e^{-t}.$$

Άσκηση 3.5. 1.) Κατασκευάστε το σύστημα 2 διαφορικών εξισώσεων το οποίο έχει ως θεμελιώδες σύστημα λύσεων τις

$$x^{[1]}(t) = (x_1^{[1]}(t), x_2^{[1]}(t))^T = (1, t)^T, \;\; t \in (1, 2)$$
$$x^{[2]}(t) = (x_1^{[2]}(t), x_2^{[2]}(t))^T = (1, -t)^T, \;\; t \in (1, 2),$$

στο διάστημα $(1, 2)$.

2.) Θεωρούμε το σύστημα $(1, t)$, $(1, -t)$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Προφανώς $W(0) = 0$. Αυτό αντιφάσκει ή όχι (και γιατί) στο Θεώρημα 3.4 ;

§4. Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad \text{στο} \quad (x_0, x_1) \tag{4.1}$$

η οποία επαληθεύει τις συνθήκες

$$\alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = d_1, \quad \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = d_2. \tag{4.2}$$

Εδώ

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

και $p_1(x), p_2(x), f(x)$ συνεχείς στο $[x_0, x_1]$ συναρτήσεις. Υπάρχουν πολλά προβλήματα φυσικής, που ανάγονται στα συνοριακά προβλήματα τύπου (4.1), (4.2).

Το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας για τα συνοριακά προβλήματα διαφέρει από το αντίστοιχο για τα προβλήματα αρχικών τιμών. Και η διαφορά είναι στο ότι το ομογενές συνοριακό πρόβλημα, δηλαδή το πρόβλημα

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

$$\alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = 0, \quad \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0,$$

μπορεί να έχει άπειρο πλήθος λύσεων και όχι μόνο μηδενική λύση, όπως στην περίπτωση ομογενούς προβλήματος αρχικών τιμών. Επίσης το μη ομογενές πρόβλημα (4.1), (4.2) μπορεί να μην έχει λύση. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = d_2. \tag{4.3}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $y'' + y = 0$ δίνεται από την

$$y = c_1 cos x + c_2 sin x.$$

Η πρώτη συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται, αν θα θέσουμε $c_1 = 0$, επομένως $y = c_2 sin x$. Έστω $x_1 \neq \pi n$, τότε από την δεύτερη συνθήκη βρίσκουμε την $c_2 = \frac{d_2}{sin x_1}$. Άρα η ζητούμενη λύση θα πάρει τη μορφή

$$y = \frac{d_2}{sin x_1} sin x.$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση το ομογενές πρόβλημα έχει μόνο τετριμμένη λύση.

Έστω $x_1 = \pi n$ και $d_2 = 0$, τότε $y(x_1) = y(\pi n) = c_2 sin(\pi n) = 0$. Άρα έχουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$$y = C\, sin x, \quad \forall C \in \mathbf{R}$$

(προφανώς η μοναδικότητα παραβιάζεται). Αν $d_2 \neq 0$, τότε το πρόβλημα (4.3) δεν έχει λύσεις, αφού $c_2 sin(\pi n) = 0 \neq d_2$.

Οποιοδήποτε πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.1), (4.2) μπορεί να αναχθεί σε πρόβλήμα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d_1 = d_2 = 0$. Πράγματι έστω $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ($\alpha_1 \neq 0, \ \ \beta_1 \neq 0$). Η συνάρτηση

$$v \equiv y - \phi(x), \ \ \phi(x) \equiv \frac{d_2/\beta_1 - d_1/\alpha_1}{x_1 - x_0}(x - x_0) + d_1/\alpha_1$$

επαληθεύει την εξίσωση

$$v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v = \tilde{f}(x),$$

εδώ

$$\tilde{f}(x) = f(x) - [\phi''(x) + p_1(x)\phi'(x) + p_2(x)\phi(x)] =$$
$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y - [\phi''(x) + p_1(x)\phi'(x) + p_2(x)\phi(x)],$$

και τις συνθήκες

$$v(x_0) = 0, \ \ v(x_1) = 0,$$

αφού

$$v(x_0) = y(x_0) - \phi(x_0) = d_1/\alpha_1 - d_1/\alpha_1 = 0$$

και

$$v(x_1) = y(x_1) - \phi(x_1) = d_2/\beta_1 - d_2/\beta_1 = 0.$$

Π.χ. το πρόβλημα (4.3) γράφεται σε μορφή

$$v'' + v = -\frac{d_2}{x_1}x, \ \ v(0) = v(x_1) = 0, \tag{4.4}$$

εδώ $\phi(x) = \frac{d_2}{x_1}x$ και $v = y - \frac{d_2}{x_1}x$.

Αν $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ($\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$). Η συνάρτηση

$$v \equiv y - \phi_1(x), \ \ \phi_1(x) \equiv \frac{d_1}{2\alpha_2(x_0 - x_1)}(x - x_1)^2 + \frac{d_2}{2\beta_2(x_1 - x_0)}(x - x_0)^2$$

επαληθεύει την εξίσωση

$$v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v = \tilde{f}_1(x),$$

και τις συνθήκες

$$v'(x_0) = 0, \ \ v'(x_1) = 0.$$

Εδώ

$$\tilde{f}_1(x) = f(x) - [\phi_1''(x) + p_1(x)\phi_1'(x) + p_2(x)\phi_1(x)]$$

Παρομοίως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και την γενική περίπτωση.

Θεώρημα 4.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{4.5}$$

$$\alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0 \tag{4.6}$$

έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν το αντίστοιχο ομογενές πρόβλήμα ($f \equiv 0$) έχει μόνο τετριμμένη λύση.

Απόδειξη. Η λύση της εξίσωσης μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$y = y_\mu + c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{4.7}$$

όπου y_μ είναι η ειδική (μερική) λύση της μη ομογενούς εξίσωσης και y_1, y_2 είναι (γραμμικώς ανεξάρτητες) ειδικές λύσεις της ομογενούς. Αντικαθιστώντας την (4.7) στις συνοριακές συνθήκες (4.6), καταλήγουμε στο εξής σύστημα ως προς c_1, c_2

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 y_1(x_0)+\alpha_2 y_1'(x_0) & \alpha_1 y_2(x_0)+\alpha_2 y_2'(x_0) \\ \beta_1 y_1(x_1)+\beta_2 y_1'(x_1) & \beta_1 y_2(x_1)+\beta_2 y_2'(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 y_\mu(x_0)-\alpha_2 y_\mu'(x_0) \\ -\beta_1 y_\mu(x_1)-\beta_2 y_\mu'(x_1) \end{pmatrix},$$

το οποίο έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών διαφέρει από το μηδέν. Αλλά όταν αυτή η ορίζουσα διαφέρει από το μηδέν, το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μόνο τετριμμένη λύση, επειδή θα έχουμε $c_1 = c_2 = 0$.
□

Στο πρόβλημα (4.4) το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα είναι

$$v'' + v = 0, \;\; v(0) = v(x_1) = 0,$$

το οποίο έχει μόνο τετριμμένη λύση $v \equiv 0$ αν $x_1 \neq \pi n$ και άπειρες λύσεις $v = C sin x$ αν $x_1 = \pi n$.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την κατασκευή της λύσης του προβλήματος (4.5), (4.6).

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.5) με $e^{\int p_1(x)dx}$, ανάγουμε αυτήν την εξίσωση σε

$$(p(x)y')' + q(x)y = g(x), \tag{4.8}$$

όπου $p = e^{\int p_1 dx}$, $q = p_2 e^{\int p_1 dx}$, $g = f e^{\int p_1 dx}$. Θα συμβολίσουμε με

$$B_{x_0} y = \alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = 0,$$

$$B_{x_1} y = \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0.$$

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $G(x,s)$ με ακόλουθες ιδιότητες:
(i). $G(x,s)$ είναι συνεχής ως προς x για κάθε σταθεροποιημένο s και $x_0 \leq x \leq x_1$, $x_0 \leq s \leq x_1$.
(ii). για κάθε σταθεροποιημένο s η $G(x,s)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$(pG')' + qG = 0 \tag{4.9}$$

στο διάστημα $[x_0, x_1]$, εκτός από το σημείο $x = s$.
(iii). Η $G(x,s)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$B_{x_0} G = B_{x_1} G = 0, \;\; \forall\, s.$$

(iv). Στο σημείο $x = s$ η $G_x(x,s)$ έχει άλμα μέτρου $\frac{1}{p}$.
Δηλαδη

$$G_x(x,s)\Big|_{x=s+0} - G_x(x,s)\Big|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}$$

ή

$$G'(s+0,s) - G'(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$$

ή

$$G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x) = \frac{1}{p(x)}. \tag{4.10}$$

Παρατήρηση 1. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x) = G_x(x,x-0) - G_x(x,x+0)$$

(βλ. σχήμα 2, σελ. 80).

Ορισμός. *Η συνάρτηση $G(x,s)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(i).-(iv).$ ονομάζεται συνάρτηση $Green$ του προβλήματος (4.8), (4.6).*

Θα αποδείξουμε ότι η

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)g(s)ds \tag{4.11}$$

είναι λύση του προβλήματος (4.8), (4.6). Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους της και μετά θα τις αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.8). Έχουμε

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_x(x,s)g(s)ds = \int_{x_0}^{x} G_x(x,s)g(s)ds + \int_{x}^{x_1} G_x(x,s)g(s)ds,$$

$$y''(x) =$$

$$G_x(x,x-0)g(x) + \int_{x_0}^{x} G_{xx}(x,s)g(s)ds - G_x(x,x+0)g(x) + \int_{x}^{x_1} G_{xx}(x,s)g(s)ds =$$

$$[G_x(x,x-0) - G_x(x,x+0)]g(x) + \int_{x_0}^{x_1} G_{xx}(x,s)g(s)ds.$$

Αντικαθιστούμε την $y = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)g(s)ds$ στην εξίσωση (4.8)

$$\int_{x_0}^{x} [p(x)G_{xx}(x,s) + p'(x)G_x(x,s) + q(x)G(x,s)]g(s)ds +$$

$$\int_{x}^{x_1} [p(x)G_{xx}(x,s) + p'(x)G_x(x,s) + q(x)G(x,s)]g(s)ds +$$

$$p(x)[G_x(x,x-0) - G_x(x,x+0)]g(x) =$$

$$p(x)[G_x(x,x-0) - G_x(x,x+0)]g(x) = g(x),$$

αφού σε κάθε διάστημα $[x_0,x)$, $(x,x_1]$ η $G(x,s)$ είναι λύση της (4.9). Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (4.10) λαμβάνοντας υπ όψιν την Παρατήρηση 1. Συνεπώς

$$(py')' + qy = g.$$

Παρατήρηση. Η συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα προκύπτει άμεσα από τον τύπο (4.11).

Θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση του $Green$, έχοντας δυο γραμμικά ανεξάρτητες ειδικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, με την προϋπόθεση ότι το ομογενές συνοριακό πρόβλημα έχει **μόνο** τετριμμένη λύση. Θεωρούμε την

$$(py')' + qy = 0. \tag{4.12}$$

Έστω $y_1(x)$ είναι μη τετριμμένη ειδική λύση της (4.12), που ικανοποιεί την συνθήκη $B_{x_0}y_1 = 0$. Από την προηγούμενη προϋπόθεση που κάναμε, προκύπτει ότι $B_{x_1}y_1 \neq 0$. Είναι προφανές ότι c_1y_1 πάλι ικανοποιεί και την εξίσωση και την συνοριακή συνθήκη στο αριστερό άκρο. Ομοίως, θα βρούμε την y_2, η οποία είναι (μη τετριμμένη) λύση της (4.12), ικανοποιεί την συνθήκη $B_{x_1}y_2 = 0$, όπου $B_{x_0}y_2 \neq 0$. Οποιαδήποτε c_2y_2 θα ικανοποιεί και την εξίσωση και την συνοριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο. Αναζητάμε την συνάρτηση του $Green$ σε μορφή

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)y_1(x), & x_0 \le x \le s, \\ c_2(s)y_2(x), & s < x \le x_1. \end{cases}$$

Για να ικανοποιήσουμε την (i) θα πρέπει να διαλέξουμε τις c_1, c_2 έτσι ώστε

$$c_1(s)y_1(s) = c_2(s)y_2(s), \quad \forall s \in [x_0, x_1].$$

Για να ικανοποιήσουμε την (iv) θα πρέπει

$$c_2(s)y_2'(s) - c_1(s)y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}$$

Άρα το σύστημα που παίρνουμε ως προς $c_1(s)$, $c_2(s)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{pmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ -y_1'(s) & y_2'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p(s)} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Η ορίζουσα αυτού του συστήματος (η $y_1y_2' - y_1'y_2$) είναι ίση με την Βρονσκιανή $W(y_1, y_1', y_2, y_2')$ (βλ. Άσκηση 4.1), άρα διαφέρει από το μηδέν. Λύνοντας την (4.13) ως προς $c_1(s)$, $c_2(s)$ θα βρούμε και την $G(x,s)$ η οποία θα έχει την μορφή

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)y_1(x)}{W(s)p(s)}, & x_0 \le x \le s \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)p(s)}, & s < x \le x_1 \end{cases}$$

Δηλαδή

$$c_1(s) = \frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}, \quad c_2(s) = \frac{y_1(s)}{W(s)\,p(s)}.$$

Παράδειγμα 4.1. Βρείτε την συνάρτηση του $Green$ του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

Λύση. Οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη $y(0) = 0$ ή τη συνθήκη $y(\pi/2) = 0$ έχουν την μορφή $c_1 sinx$ και $c_2 cosx$ αντίστοιχα συνεπώς παίρνουμε $y_1(x) = sinx$, $y_2(x) = cosx$ και

$$G(x,s) = \begin{cases} -cos\, s\ sinx, & 0 \le x \le s \\ -sin\, s\ cosx, & s < x \le \pi/2, \end{cases}$$

επειδή $p \equiv 1$, και $W(s) \equiv -1$.

Έστω $f(x) = e^x$, έχουμε

$$y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,s)\, e^s\, ds =$$

$$\int_0^x (-sin\, s\, cos\, x\, e^s) ds + \int_x^{\pi/2} (-cos\, s\, sin\, x\, e^s) ds =$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{\pi/2} sin\, x - cos\, x).$$

Έστω $f(x) = 1$, έχουμε

$$y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,s)\, ds =$$

$$\int_0^x (-sin\, s\, cos\, x) ds + \int_x^{\pi/2} (-cos\, s\, sin\, x) ds =$$

$$1 - cos\, x - sin\, x.$$

Αν το ομογενές πρόβλημα (4.5), (4.6) ($f \equiv 0$) έχει μη τετριμμένη λύση, τότε το πρόβλήμα (4.5), (4.6) με $f \not\equiv 0$ μπορεί να μην έχει λύση. Στην περίπτωση όταν αυτή υπάρχει, δεν έχουμε μοναδικότητα. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. (χωρίς απόδειξη) Για να υπάρχει λύση του προβλήματος (4.8), (4.6) στην περίπτωση που το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση, θα πρέπει η g να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ορθογωνιότητας:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\, y_0(x) dx = 0$$

για κάθε λύση y_0 του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος.

Παράδειγμα 4.2. Να βρεθούν οι λύσεις του προβλήματος

$$y'' + y = cosx, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{4.14}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει λύσεις, που δίδονται από την σχέση $y = Csinx$. Για να καταλάβουμε, αν υπάρχει λύση της (4.14), θα πρέπει να ελέγξουμε την προαναφερόμενη συνθήκη ορθογωνιότητας. Έχουμε

$$C \int_0^{\pi} cosx\, sinxdx = \frac{C}{2} \int_0^{\pi} sin2xdx = 0.$$

Συνεπώς υπάρχουν λύσεις του προβλήματος (4.14). Η γενική λύση της εξίσωσης $y'' + y = cosx$ έχει τη μορφή

$$y = y_\mu + c_1 cosx + c_2 sinx.$$

Δεν είναι δύσκολο να βρεθεί η ειδική λύση. Ψάχνοντάς την σε μορφή

$$\hat{c}_1 xcosx + \hat{c}_2 xsinx$$

και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση, θα πάρουμε

$$y_\mu = \frac{1}{2}xsinx, \;\; y = \frac{1}{2}xsinx + c_1cosx + c_2sinx.$$

Άρα αντικαθιστώντας την y στις συνοριακές συνθήκες , θα πάρουμε

$$y(0) = c_1 = 0, \;\; y(\pi) = -c_1 = 0.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος (4.14) δίδεται από την

$$y = \frac{1}{2}xsinx + Csinx.$$

Παράδειγμα 4.3. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2, το πρόβλημα

$$y'' + y = 1, \;\; y(0) = y(\pi) = 0.$$

δεν έχει λύση. Πράγματι, το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μη τετριμμένες λύσεις $C\,sin\,x$, $C \in \mathbf{R}$ και

$$\int_0^\pi sin\,x\,dx \neq 0.$$

Την μη ύπαρξη της λύσης μπορούμε να διαπιστώσουμε και αλλιώς. Η γενική λύση της εξίσωσης $y'' + y = 1$ είναι

$$y = 1 + c_1cosx + c_2sinx.$$

Για να επαληθεύεται η συνθήκη $y(0) = 0$ πρέπει το $c_1 = -1$ από την άλλη για να επαληθεύεται η συνθήκη $y(\pi) = 0$ πρέπει το $c_1 = 1$, άτοπο.

Παρομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα

$$y'' + y = \frac{d_2}{\pi}x, \;\; y(0) = y(\pi) = 0$$

(βλ. (4.4)) δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 4.4. Βρείτε τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του $Green$

$$y''(x) + y(x) = \frac{4}{\pi}x, \;\; y(0) = -1, \;\; y(\pi/2) = 1.$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(x) = y(x) - \phi(x) \;\; \text{όπου} \;\; \phi(x) = \frac{4}{\pi}x - 1.$$

Προφανώς

$$v''(x) + v(x) = 1, \;\; v(0) = v(\pi/1) = 0.$$

Η συνάρτηση $Green$ (βλ. Παράδειγμα 4.1) έχει τη μορφή

$$G(x,s) = \begin{cases} -cos\,s\;sinx, & 0 \leq x \leq s \\ -sin\,s\;cosx, & s < x \leq \pi/2, \end{cases}$$

συνεπώς

$$v(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,s)ds =$$

$$\int_0^x (-sin\, s\, cos\, x)ds + \int_x^{\pi/2} (-cos\, s\, sin\, x)ds =$$
$$1 - sin\, x - cos\, x.$$

Άρα η λύση δύνεται από τον τύπο

$$y(x) = v(x) + \phi(x) = \frac{4}{\pi}x - sin\, x - cos\, x.$$

Παράδειγμα 4.5.Βρείτε τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του $Green$

$$y''(x) - y'(x) = e^{-x}, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(1) = 0.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με e^{-x} αφού $p_1 = -1$ και έχουμε

$$(e^{-x}y')' = e^{-2x}.$$

Οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη $y(0) = 0$ ή τη συνθήκη $y'(1) = 0$ έχουν την μορφή $c_1(1 - e^x)$ και c_2 αντίστοιχα συνεπώς παίρνουμε $y_1(x) = 1 - e^x$, $y_2(x) = 1$ και

$$G(x, s) = \begin{cases} 1 - e^x, & 0 \le x \le s \\ 1 - e^s, & s < x \le 1, \end{cases}$$

Αφού $p(s) = e^{-s}$, $W(s) = e^s$. Άρα έχουμε

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s)\, e^{-2s}\, ds =$$
$$\int_0^x (1 - e^s)e^{-2s}\, ds + (1 - e^x)\int_x^1 e^{-2s}\, ds =$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x de^{-2s} + \int_0^x de^{-s} - \frac{1}{2}(1 - e^x)\int_x^1 de^{-2s} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x} - 1 - \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-2x} - e^{x-2} + e^{-x}) =$$
$$\frac{1}{2}\Big(e^{-x} + e^{x-2} - 1 - e^{-2}\Big).$$

Στα παραδείγματα πού δώσαμε η διαπίστωση της ύπαρξής μόνο τετριμμένης λύσης του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος ήταν εύκολη. Εν γένει αυτό μπορεί να αποδειχθεί αρκετά δύσκολη διαδικασία για αυτό θα δώσουμε μια απλή ικανή συνθήκη η οποία μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μόνο τετριμμένης λύσης για ομογενή προβλήματα. Θα περιοριστούμε με την περίπτωση

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \;\; \text{στο} \;\; (x_0, x_1) \;\; \text{και} \;\; y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{4.15}$$

Θεώρημα 4.3. Αν $p_2(x) \le 0$ τότε το πρόβλημα (4.15) έχει μόνο μηδενική λύση.

Απόδειξη. 1. Έστω $p_2(x) < 0$.

Ας υποθέσουμε ότι η $y(x)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές στο (x_0, x_1), τότε υπάρχει σημείο $x^* \in (x_0, x_1)$ όπου η $y(x)$ λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο. Σε αυτό το σημείο έχουμε $y(x^*) < 0$, $y'(x^*) = 0$, $y''(x^*) \geq 0$ δηλαδή

$$y''(x^*) + p_1(x^*)y'(x^*) + p_2(x^*)y(x^*) > 0,$$

από την άλλη (βλ. την εξίσωση)

$$y''(x^*) + p_1(x^*)y'(x^*) + p_2(x^*)y(x^*) = 0,$$

άτοπο. Συνεπώς $y(x) \geq 0$.

Υποθέτουμε τώρα οτι η $y(x)$ λαμβάνει θετικές τιμές στο (x_0, x_1), τότε υπάρχει σημείο $x_* \in (x_0, x_1)$ όπου η $y(x)$ λαμβάνει το θετικό της μέγιστο. Σε αυτό το σημείο έχουμε $y(x_*) > 0$, $y'(x_*) = 0$, $y''(x_*) \leq 0$ δηλαδή

$$y''(x_*) + p_1(x_*)y'(x_*) + p_2(x_*)y(x_*) < 0,$$

από την άλλη (βλ. την εξίσωση)

$$y''(x_*) + p_1(x_*)y'(x_*) + p_2(x_*)y(x_*) = 0,$$

άτοπο. Συνεπώς $y(x) \leq 0$.

Άρα $y(x) \equiv 0$.

2. Έστω τωρα $p_2(x) \leq 0$. Επιλέγουμε τη σταθερά $\gamma > 0$ ε.ω.

$$\gamma^2 + p_1(x)\gamma + p_2(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Για την συνάρτηση $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon e^{\gamma x}$ έχουμε

$$y_\varepsilon'' + p_1 y_\varepsilon' + p_2 y_\varepsilon = \varepsilon e^{\gamma x}(\gamma^2 + p_1\gamma + p_2) > 0,$$

άρα η y_ε δεν λαμβάνει το θετικό της μέγιστο στα εσωτερικά σημεία του $[x_0, x_1]$, και συνεπώς

$$y + \varepsilon e^{\gamma x} \leq \varepsilon e^{\gamma x_1} \Leftrightarrow y \leq \varepsilon(e^{\gamma x_1} - e^{\gamma x}). \tag{4.16}$$

Για την συνάρτηση $y_{-\varepsilon}(x) = y(x) - \varepsilon e^{\gamma x}$ έχουμε

$$y_{-\varepsilon}'' + p_1 y_{-\varepsilon}' + p_2 y_{-\varepsilon} = -\varepsilon e^{\gamma x}(\gamma^2 + p_1\gamma + p_2) < 0,$$

άρα η $y_{-\varepsilon}$ δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στα εσωτερικά σημεία του $[x_0, x_1]$, και συνεπώς

$$y - \varepsilon e^{\gamma x} \geq -\varepsilon e^{\gamma x_0} \Leftrightarrow y \geq -\varepsilon(e^{\gamma x_0} - e^{\gamma x}). \tag{4.17}$$

Απο (4.16) και (4.17) παίρνουμε

$$-\varepsilon(e^{\gamma x_0} - e^{\gamma x}) \leq y(x) \leq \varepsilon(e^{\gamma x_1} - e^{\gamma x}).$$

Στέλνοντας το ε στο μηδέν καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$y(x) \equiv 0.$$

Παράδειγμα 4.6. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Λύση. Από τα Θεωρήματα 4.1, 4.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος

$$y(x) = \int_1^2 G(x,s)\, f(s)\, ds$$

όπου

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{21}(s^2 - 8s^{-1})(x^2 - x^{-1}), & 1 \le x \le s \\ \frac{1}{21}(s^2 - s^{-1})(x^2 - 8x^{-1}), & s < x \le 2, \end{cases}$$

Αφου οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη $y(1) = 0$ ή τη συνθήκη $y(2) = 0$ έχουν την μορφή

$$y_1(x) = c_1(x^2 - x^{-1}) \ \text{ και } \ y_2(x) = c_2(x^2 - 8x^{-1})$$

αντίστοιχα. Προφανώς $W = 21$ και $p = 1$.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1. Αποδείξτε οτι η ορίζουσα του συστήματος (4.13) είναι όντως Βρονσκιανί.

Υπόδειξη: γράψτε την εξίσωση (4.12) σε μορφή $y' = z, \ \ z' = -(p'z+qy)/p$.

Στίς ασκήσεις 4.2 -4.7 βρείτε τη λύση $y(x)$του προβλήματος χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του $Green$

Άσκηση 4.2.

$$y'' + y = f(x), \ \ y'(0) = 0, \ \ y(\pi) = 0.$$

Εξετάστε τις περιπτώσεις $f(x) = 1$, $f(x) = sin\, x$.

Άσκηση 4.3.

$$y'' + y = 2e^x + \frac{4}{\pi}x, \ \ y(0) = -1, \ \ y(\pi/2) = 1.$$

Άσκηση 4.4.

$$y'' + y = \frac{1}{cos\, x}, \ \ y'(0) = 0, \ \ y(\pi) = 0.$$

Άσκηση 4.5.

$$y'' - y = f(x), \ \ y(x_0) = 0, \ \ y(x_1) = 0.$$

Άσκηση 4.6.

$$y'' + y' - y = f(x), \ \ y(0) = 0, \ \ y(x_1) = 0.$$

Άσκηση 4.7.

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 6x - \frac{1}{x}, \ \ y(1) = 1, \ \ y(2) = 2.$$

Άσκηση 4.8. Μπορεί να κατασκευαστεί η συνάρτηση $Green$ στην περίπτωση που το ομογενές πρόβλημα έχει μη τετριμμένες λύσεις; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τη συνάρτηση $Green$ για το πρόβλημα (4.14).

§5. **Θεωρία Ευστάθειας**

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) \quad \Big(\text{ή} \;\; \mathbf{x}' = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})\Big), \tag{5.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c},$$

όπου

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n),$$
$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = (\Phi_1(t, \mathbf{x}), \ldots, \Phi_n(t, \mathbf{x})).$$

Είναι γνωστό ότι στις εφαρμογές οι αρχικές συνθήκες είναι το αποτέλεσμα υπολογισμού στην αρχική στιγμή $t = t_0$ των δεδομένων ενός φυσικού φαινομένου και δεν μπορούν να υπολογιστούν με απόλυτη ακρίβεια. Τα μικρά σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών δεδομένων μπορούν να μας οδηγήσουν σε μια λύση τελείως διαφορετική από εκείνη που ψάχνουμε. Για αυτό είναι σημαντικό να ορίσουμε τις συνθήκες, υπό τις οποίες οι μικρές διαταραχές των αρχικών δεδομένων προκαλούν μικρές διαταραχές της λύσης. Αν το t μεταβάλλεται σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα $[t_0, T]$, η απάντηση δίνεται από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης της λύσης από τα αρχικά δεδομένα. Αν το t μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, τότε με αυτά τα προβλήματα ασχολείται η θεωρία της ευστάθειας.

Προφανώς αναφερόμαστε στις λύσεις που υπάρχουν $\forall t > 0$ (ή $\forall t > t_0$ για κάποιο $t_0 > 0$).

Ορισμός. *Η λύση $\overline{\phi}(t)$ της (5.1) ονομάζεται ευσταθής κατά Lyapunov, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε λύση $\mathbf{x}(t)$ της (5.1), η αρχική τιμή της οποίας ικανοποιεί την*

$$|\mathbf{x}(t_0) - \overline{\phi}(t_0)| < \delta, \tag{5.2}$$

η ανισότητα

$$|\mathbf{x}(t) - \overline{\phi}(t)| < \epsilon \tag{5.3}$$

ικανοποιείται για όλα τα $t \geq t_0$.

Αν τουλάχιστον για μια λύση $\mathbf{x}(t)$, που ικανοποιεί την (5.2), δεν ισχύει η (5.3), λέμε ότι η $\phi(t)$ είναι ασταθής.

Αν η $\overline{\phi}(t)$ είναι ευσταθής και επιπλέον υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$\lim_{t \to \infty} |\mathbf{x}(t) - \overline{\phi}(t)| = 0, \tag{5.4}$$

για κάθε $\mathbf{x}(t)$ με $|\mathbf{x}(t_0) - \overline{\phi}(t_0)| < \delta_1$, τότε λέμε ότι η $\overline{\phi}(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η συνθήκη (5.4), από μόνη της, δεν συνεπάγεται ούτε καν τη συνήθη ευστάθεια. Δηλαδή η λύση μπορεί να μην είναι ευσταθής, αλλά όλες η λύσεις $\mathbf{x}(t)$ προσεγγίζουν την $\overline{\phi}(t)$, καθώς $t \to \infty$.

Παράδειγμα 5.1. Θα εξετάσουμε αν είναι ευσταθής η λύση της εξίσωσης $x' = -a^2 x$, $a \neq 0$ με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$.

Γνωρίζουμε ότι η λύση αυτού του προβλήματος δίνεται από την

$$\phi(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}.$$

Έστω $x(t)$ είναι λύση της ίδιας εξίσωσης με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_1$. Θεωρούμε την διαφορά $|\phi(t) - x(t)|$, έχουμε

$$|\phi(t) - x(t)| = |x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - x_1 e^{-a^2(t-t_0)}| = e^{-a^2(t-t_0)}|x_0 - x_1| < \epsilon$$

για $t \geq t_0$, αν $|x_0 - x_1| < \epsilon e^{-a^2 t_0} = \delta(\epsilon)$. Αρα η λύση $\phi(t)$ είναι ευσταθής. Θα εξετάσουμε, αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Προφανώς

$$\lim_{t\to\infty} |\phi(t) - x(t)| = \lim_{t\to\infty} e^{-a^2(t-t_0)}|x_0 - x_1| = 0,$$

άρα είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 5.2. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x' = a^2 x, \quad a \neq 0, \quad x(t_0) = x_0. \tag{5.5}$$

Η λύση του (5.5) δίνεται από τον τύπο

$$\phi(t) = x_0 e^{a^2(t-t_0)}.$$

Θα εξετάσουμε την ευστάθεια. Θεωρούμε την διαφορά $|\phi(t) - x(t)|$. Σε αυτή τη περίπτωση παίρνουμε

$$|\phi(t) - x(t)| = |x_0 e^{a^2(t-t_0)} - x_1 e^{a^2(t-t_0)}| = e^{a^2(t-t_0)}|x_0 - x_1|,$$

και βλέπουμε ότι είναι αδύνατον να βρεθεί τέτοιο δ για να είναι η διαφορά $|\phi(t) - x(t)|$ μικρότερη του ϵ για όλα τα $t \geq t_0$ αν $|x_0 - x_1| < \delta(\epsilon)$. Συνεπώς είναι ασταθής.

Παράδειγμα 5.3. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2.$$

Εξετάστε την ευστάθεια της λύσης

$$\tilde{s}(t) = \ln \frac{e^{2t} + 1}{e^t} - \ln 2,$$

$$\tilde{v}(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Λύση. Παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(v(t), s(t))$ που επαληθεύει τυχαίες αρχικές συνθήκες $(v(0), s(0))$=(v_0, s_0) (v_0, s_0 - τυχαίοι αριθμοί). Προφανώς η λύση δύνεται από τον τύπο

$$s(t) = \ln \frac{\alpha e^{2t} + 1}{\alpha + 1} - t + s_0, \quad \alpha = \frac{1 + v_0}{1 - v_0},$$

$$v(t) = \frac{\alpha e^{2t} - 1}{\alpha e^{2t} + 1}.$$

(πρώτα λύνουμε την δεύτερη εξίσωση με αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$ που είναι εύκολη υπόθεση αφού η μεταβλητές χωρίζουν, και μετα την πρώτη με αρχική συνθήκη $s(0) = s_0$). Σύμφωνα με τον ορισμό η λύση $(\tilde{s}(t), \tilde{v}(t))$ που επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες $(\tilde{s}(0), \tilde{v}(0)) = (0, 0)$ είναι ευσταθής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε από την ανισότητα

$$\sqrt{v_0^2 + s_0^2} < \delta$$

να προκύπτει η ανισότητα

$$\sqrt{(s(t) - \tilde{s}(t))^2 + (v(t) - \tilde{v}(t))^2} < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Θα εκτιμήσουμε τη διαφορά $|v(t) - \tilde{v}(t)|$, έχουμε

$$|v(t) - \tilde{v}(t)| = \Big| \frac{\alpha e^{2t} - 1}{\alpha e^{2t} + 1} - \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \Big| =$$

$$\Big| \frac{2\alpha e^{2t} - 2e^{2t}}{(\alpha e^{2t} + 1)(e^{2t} + 1)} \Big| = \Big| \frac{2e^{2t}}{(\alpha e^{2t} + 1)(e^{2t} + 1)} (\alpha - 1) \Big| < \Big| \frac{2e^{2t}}{(\alpha + 1)e^{2t}} (\alpha - 1) \Big| =$$

$$2\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 2|v_0|.$$

Θα εκτιμήσουμε τώρα τη διαφορά $|s(t) - \tilde{s}(t)|$, έχουμε

$$\Big| \ln \frac{\alpha e^{2t} + 1}{\alpha + 1} - t + s_0 - \big(\ln \frac{e^{2t} + 1}{e^t} - \ln 2 \big) \Big| =$$

$$\Big| \ln \frac{\alpha e^{2t} + 1}{\alpha + 1} + s_0 - \ln(e^{2t} + 1) - \ln 2 \Big) \Big| = \Big| \ln \frac{2\alpha e^{2t} + 2}{(\alpha + 1)(e^{2t} + 1)} + s_0 \Big| \leq$$

$$\Big| 1 - \frac{2\alpha e^{2t} + 2}{(\alpha + 1)(e^{2t} + 1)} + s_0 \Big| = \Big| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 1} + s_0 \Big| \leq$$

$$\Big| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + s_0 \Big| = |v_0 + s_0|.$$

Συνεπώς

$$\sqrt{(s(t) - \tilde{s}(t))^2 + (v(t) - \tilde{v}(t))^2} < \sqrt{4v_0^2 + (v_0 + s_0)^2} <$$

$$\sqrt{6v_0^2 + 6s_0^2} = \sqrt{6}\sqrt{v_0^2 + s_0^2}.$$

Άρα αν πάρουμε $\delta = \varepsilon/\sqrt{6}$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ από την $\big(v_0^2 + s_0^2\big)^{1/2} < \delta$ προκύπτει η

$$\big((s(t) - \tilde{s}(t))^2 + (v(t) - \tilde{v}(t))^2\big)^{1/2} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Έτσι αποδείξαμε την ευστάθεια της συγκεκριμένης λύσης.

Μελέτη της ευστάθειας μιας λύσης $\overline{\phi}(t)$ της (5.1) μπορεί να αναχθεί στην μελέτη της ευστάθειας της τετριμμένης λύσης (λύσης ισορροπίας). Αν θα εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\phi}(t),$$

όπου ουσιαστικά $\mathbf{y}(t)$ είναι η απόκλιση όλων των λύσεων από την λύση $\overline{\phi}(t)$ υπό μελέτη. Η (5.1) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \equiv -\frac{d\overline{\phi}}{dt} + \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y} + \overline{\phi}).$$

Είναι προφανές ότι η λύση $\mathbf{y} \equiv 0$ αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί στην $\overline{\phi}(t)$, που είναι λύση της (5.1).

Παρατηρούμε ότι αν το σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

τότε

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = A(t)\mathbf{y},$$

αφού

$$-\frac{d\overline{\phi}}{dt} + \Phi(t, \mathbf{y} + \overline{\phi}) = -A(t)\overline{\phi} - \mathbf{f}(t) + A(t)(\mathbf{y} + \overline{\phi}) + \mathbf{f}(t) = A(t)\mathbf{y}$$

Θα δείξουμε αυτή τη σχέση χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 5.1. Συμβολίζουμε με $y(t) = x(t) - \phi(t)$. Άρα $y(t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$y' = -a^2 y, \ \ y(t_0) = x_0 - x_1$$

(αφού $y' = x' - \phi' = -a^2(x - \phi) = -a^2 y$).

Αποδείξαμε ότι εάν $|x_0 - x_1| < \delta$, τότε $|x(t) - \phi(t)| < \varepsilon$, ή αλλιώς, εάν $|y(t_0)| < \delta$, τότε $|y(t)| < \varepsilon$. Δηλαδή για να είναι η $x(t)$ ευσταθής θα πρέπει από την $|y(t_0)| < \delta$ να προκύπτει $|y(t)| < \varepsilon$. Η συνάρτηση $\phi_0(t) \equiv 0$ είναι λύση του προβλήματος

$$y' = -a^2 y, \ \ y(t_0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι ευσταθής η λύση ϕ_0 θα πρέπει για οποιαδήποτε $y(t)$, που είναι λύση της ίδιας εξίσωσης, από την

$$|y(t_0) - 0| = |y(t_0)| < \delta$$

να προκύπτει

$$|y(t) - 0| = |y(t)| < \varepsilon.$$

Άρα από την ευστάθεια της λύσης $x = \phi(t)$ προκύπτει η ευστάθεια της λύσης $y \equiv 0$ και αντιστρόφως. Δηλαδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μελέτη της ευστάθειας της λύσης $x = \phi(t)$ με την μελέτη της ευστάθειας της λύσης ισορροπίας (ή σημείο ισορροπίας ή σταθερό σημείο) $y \equiv 0$.

Εδώ οι εξισώσεις είναι ίδιες λόγω της γραμμικότητας, εν γένει αυτο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 5.4. Ανάγετε τη μελέτη της ευστάθειας της λύσης

$$\tilde{s}(t) = \ln\frac{e^{2t}+1}{e^t} - \ln 2, \ \ \tilde{v}(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

του συστήματος

$$\frac{ds}{dt} = v, \ \ \frac{dv}{dt} = 1 - v^2$$

στη μελέτη της ευστάθειας της μηδενικής λύσης (ενός άλλου συστήματος).

Λύση. Εισάγουμε μια καινούργια συνάρτηση

$$(u, \sigma) = (v, s) - (\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}, \ln\frac{e^{2t}+1}{e^t} - \ln 2).$$

$\Big($ Εδώ $\mathbf{y} = (u, \sigma)$, $\mathbf{x} = (v, s)$, και

$$\overline{\phi} = (\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}, \ln\frac{e^{2t}+1}{e^t} - \ln 2)\Big).$$

Προφανώς

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{d}{dt}\Big[\ln\frac{e^{2t}+1}{e^t} - \ln 2\Big] = v - \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = 1 - v^2 - \frac{d}{dt}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = -u^2 - 2u\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Έτσι η μελέτη της ευστάθειας της λύσης $\overline{\phi} = (\tilde{v}, \tilde{s})$ του συστήματος

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2$$

ανάγεται στη μελέτη της ευστάθειας της λύσης $(0,\, 0)$ του συστήματος

$$\frac{d\sigma}{dt} = u,$$

$$\frac{du}{dt} = -u^2 - 2u\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Ορισμός. *Η λύση $\mathbf{x} \equiv 0$ της (5.1) (αν υπάρχει) ονομάζεται ευσταθής κατά Lyapunov, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε λύση $\mathbf{x}(t)$ της (5.1), η αρχική τιμή της οποίας ικανοποιεί την*

$$|\mathbf{x}(t_0)| < \delta,$$

η ανισότητα

$$|\mathbf{x}(t)| < \epsilon$$

ικανοποιείται για όλα τα $t \geq t_0$.

Αν τουλάχιστον για μια λύση $\mathbf{x}(t)$ (που ικανοποιεί την $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$, αυτό δεν ισχύει, λέμε ότι η $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασταθής.

Αν η $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ευσταθής και επιπλέον υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ τ.ω.

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| = 0,$$

για κάθε $\mathbf{x}(t)$ με $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta_1$, τότε λέμε ότι η $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η λύση της (5.1) $\mathbf{x} = \overline{\phi}(t)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση, που μπορεί να θεωρηθεί ως παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Μπορούμε να την θεωρούμε ως τροχιά ή διαδρομή, που ακολουθείται από ένα κινούμενο σωματίδιο, του οποίου η ταχύτητα καθορίζεται από την διαφορική εξίσωση. Το επίπεδο $(x_1, \ldots, x_n)$ αποκαλείται πεδίο φάσεων, και ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο από τροχιές αναφέρεται ως εικόνα φάσεων.

Θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια της λύσης ισορροπίας ενός γραμμικού και ομογενούς συστήματος πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές σε διδιάστατο πεδίο φάσεων. Θεωρούμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{array} \right. \tag{5.6}$$

όπου

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(άρα το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα). Η ευστάθεια της λύσης ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα συντελεστών της (5.6). Αναζητάμε την λύση της (5.6) σε μορφή $x = b_1 e^{kt}$, $y = b_2 e^{kt}$. Για να προσδιορίσουμε το k, πρέπει να βρούμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \Longrightarrow k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.$$

Η σταθερές b_1, b_2 προσδιορίζονται από τις

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - k)b_1 + a_{12}b_2 = 0, \\ (a_{21}b_1 + (a_{22} - k)b_2 = 0. \end{array} \right.$$

Υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις τις οποίες θα μελετήσουμε ξεχωριστά.

Περίπτωση 1. **Ομόσημες πραγματικές άνισες ιδιοτιμές**.

Εδώ η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\alpha_2 e^{k_2 t}, \;\; y = c_1\beta_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t},$$

όπου (α_1, β_1), (α_2, β_2) είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις k_1, k_2 αντίστοιχα, c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Έστω $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Τότε η λύση ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Η λύση ισορροπίας σε αυτή τη περίπτωση ονομάζεται *κόμβος*.

Έστω $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Η τροχιές σε αυτή τη περίπτωση έχουν το ίδιο σχήμα με τις τροχιές της προηγούμενης περίπτωσης, αλλά η διεύθυνση κίνησης είναι αντίθετη, δηλαδή οι τροχιές απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας. Και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και ονομάζεται *κομβική πηγή*.

Περίπτωση 2. **Ετερόσημες πραγματικές ιδιοτιμές**.

Εδώ έχουμε $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας, καλείται σε αυτή τη περίπτωση *σαγματικό σημείο* και είναι ασταθές.

Περίπτωση 3. Ίσες ιδιοτιμές.

Υποθέτουμε ότι $k_1 = k_2 = k$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση, όπου $k < 0$. Εάν $k > 0$, οι τροχιές θα είναι ίδιες, αλλά η διεύθυνση κίνησης θα έχει την αντίθετη φορά. Σε διπλή ρίζα k μπορούν να αντιστοιχούν δυο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε η γενική λύση θα πάρει τη μορφή

$$x = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)e^{kt}, \;\; y = (c_1\beta_1 + c_2\beta_2)e^{kt},$$

όπου (α_1, β_1) και (α_2, β_2) είναι δυο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο k. Στην περίπτωση αυτή το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *γνήσιος κόμβος*.

Επίσης, μπορεί να συμβεί ότι σε k αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε η γενική λύση θα πάρει τη μορφή

$$x = (c_1\alpha_1 + c_2(\alpha_1 t + \gamma_1))e^{kt}, \ \ y = (c_1\beta_1 + c_2(\beta_1 t + \gamma_2))e^{kt}, \tag{5.7}$$

όπου (α_1, β_1) είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, και (γ_1, γ_2) είναι το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή. Χάρη στον όρο e^{kt}, όλες οι λύσεις τείνουν στο σημείο ισορροπίας, δηλαδή το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στην περίπτωση (5.7) το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *εκφυλισμένος κόμβος*.

Περίπτωση 4. **Μιγαδικές τιμές**.

Η ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν τη μορφή $k_{1,2} = \lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$. Η γενική λύση του συστήματος (5.6) μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$x = e^{\lambda t}(c_1 cos\mu t + c_2 sin\mu t), \quad y = e^{\lambda t}(c_1^* cos\mu t + c_2^* sin\mu t),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και c_1^*, c_1^* είναι ορισμένοι συνδυασμοί των c_1, c_2. Είναι προφανές ότι, αν $\lambda < 0$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν $\lambda > 0$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Το σημείο ισορροπίας σε αυτή τη περίπτωση αποκαλείται *σπειροειδές* σημείο.

Αν $\lambda = 0$, το σημείο ισορροπίας, το οποίο ονομάζεται *κέντρο*. Το *κέντρο* είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Περίπτωση 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A. Αν είναι απλή ιδιοτιμή, δηλαδή $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, τότε η γενική λύση παίρνει τη μορφή

$$x = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{k_2 t}, \ \ y = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{k_2 t}.$$

Προφανώς, αν $k_2 > 0$ τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, αν $k_2 < 0$ τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, όχι όμως ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν το μηδέν είναι διπλή ιδιοτιμή, δηλαδή $k_1 = k_2 = 0$, τότε έχουμε δυο περιπτώσεις:

1. η γενική λύση έχιε τη μορφή

$$x = c_1, \ \ y = c_2,$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (όχι ασυμπτωτικά)

2. η γενική λύση έχιε τη μορφή

$$x = c_1 + c_2 t, \ \ y = c_1^* + c_2^* t,$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Παράδειγμα 5.5. Ταξινομείστε το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \tag{5.8}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (5.8) έχει τη μορφή

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Η ρίζες είναι οι $k_{1,2} = 2 \pm i$. Επομένως η γενική λύση θα είναι η

$$x = c_1 e^{2t} cost + c_2 e^{2t} sint, \quad y = c_1^* e^{2t} cost + c_2^* e^{2t} sint.$$

Λόγω της παρουσίας του όρου e^{2t}, θα έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty. \tag{5.9}$$

Από την (5.9) προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σπειροειδές σημείο.

Παράδειγμα 5.6. Θεωρούμε την εξίσωση $x'' = -a^2 x - 2bx'$, όπου αυτή η εξίσωση περιγράφει τις ελαστικές ταλαντώσεις με απόσβεση. Εδώ $2b$ είναι ο λεγόμενος συντελεστής απόσβεσης. Ανάγουμε την εξίσωση αυτή σε ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης, θέτοντας $x' = y$, καταλήγουμε στο σύστημα

$$x' = y, \quad y' = -a^2 x - 2by. \tag{5.10}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (5.10) είναι η

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 + 2bk + a^2 = 0 \Longrightarrow k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Έχουμε διάφορες περιπτώσεις, αναλόγως των b και a

1. $b = 0$, ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, $k_{1,2} = \sqrt{-a^2} = \pm ia$. Όλες οι τροχιές είναι περιοδικές. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές (κέντρο).
2. $b > 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$. Αρα $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2} < 0$, επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (κόμβος).
3. $b < 0$, $b^2 - a^2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σπειροειδές σημείο.
4. $b < 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής κόμβος (κομβική πηγή).
5. $b > 0$, $b^2 - a^2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές σπειροειδές σημείο.

Θα εξετάσουμε τώρα τα μη γραμμικά συστήματα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}), \tag{5.11}$$

όπου η $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ είναι της κλάσεως C^1 στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων. Όπως και προηγουμένως, θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά των τροχιών του συστήματος (5.11) κοντά στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$. Θα μελετήσουμε το σύστημα (5.11), προσεγγίζοντάς το με ένα κατάλληλο γραμμικό σύστημα. Καταρχήν θα δούμε τη σημαίνει για ένα μη γραμμικό σύστημα τύπου (5.11) να είναι "*κοντά*" σε ένα γραμμικό. Υποθέτουμε ότι η $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων έχει τη μορφή

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}),$$

όπου A είναι πίνακας με σταθερούς συντελεστές. Θεωρούμε το γραμμικο σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}. \tag{5.12}$$

Για να είναι το μη γραμμικό σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \tag{5.13}$$

"*κοντά*" στο σύστημα (5.12), πρέπει να υποθέσουμε ότι ο όρος $\mathbf{g}$ είναι "*μικρός*", δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\mathbf{x}\|} \to 0 \ \text{ καθώς } \ \mathbf{x} \to 0. \tag{5.14}$$

Ένα τέτοιο σύστημα (5.13) ονομάζεται σχεδόν γραμμικό.

Το σύστημα (5.12) ονομάζεται *σύστημα πρώτης προσέγγισης* για το σύστημα (5.13). Αφού υποθέτουμε ότι ο μη γραμμικός όρος είναι μικρός σε σύγκριση με το γραμμικό όρο, όταν το $\mathbf{x} \to 0$, είναι λογικό να ελπίζουμε ότι οι τροχιές του γραμμικού συςτήματος μας δίνουν καλή προσέγγιση των λύσεων του μη γραμμικού στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων.

Θεώρημα 5.1(χωρίς απόδειξη). *Υποθέτουμε ότι το σύστημα (5.11) ανάγεται στο (5.13), όπου $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ ικανοποιεί την (5.14). Αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης*

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας, έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για τα δυο συστήματα (5.12) και (5.11).

Αν τουλάχιστον μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Παρατήρηση 5.1. Το θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί αν τουλάχιστον μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει πραγματικό μέρος ίσο με μηδέν (και οι υπόλοιπες αρνητικά πραγματικά μέρη).

Παράδειγμα 5.7. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - y + x^2 + y^2 sint, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - y^2. \tag{5.15}$$

Λύση. Ο μη γραμμικός όρος του συστήματος (5.15) είναι η $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (x^2 + y^2 sin\, t, -y^2)$. Εξετάζουμε την συνθήκη (5.14).

Είναι προφανές ότι η (5.14) ικανοποιείται, αν και μόνο αν

$$\frac{|g_1|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0, \quad \frac{|g_2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \ \text{ καθώς } \ (x, y) \to 0.$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|x^2 + y^2 sin\, t|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{5.16}$$

Από την (5.16) προκύπτει ότι το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα θα πάρει τη μορφή
$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η
$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 - 2k + 2 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm i.$$
Επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Παράδειγμα 5.8. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ του συστήματος
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8sin\, y, \quad \frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - cos\, y. \tag{5.17}$$
Λύση. Ο μη γραμμικός όρος $\mathbf{g} = (8sin\, y, 2 - e^x - cos\, y)$ δεν ικανοποιεί την (5.14). Πράγματι,
$$\lim_{y \to 0} \frac{sin\, y}{y} = 1.$$
Αυτό που πρέπει να κάνουμε εδώ είναι να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματα του $Taylor$ στο σημείο $(0, 0)$
$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \cdots, \quad sin\, y = y - y^3/3! + \cdots,$$
$$cos\, y = 1 - y^2/2 + \cdots.$$
Άρα τα δεύτερα μέρη των εξισώσεων (5.17) μπορούν να παρασταθούν σε μορφή
$$2x + 8sin\, y = 2x + 8(y - y^3/3! + \cdots) = 2x + 8y + O(x^2 + y^2),$$
$$2 - e^x - 3y - cos\, y = 2 - (1 + x + x^2/2 + \cdots) - 3y - (1 - x^2/2 + \cdots) =$$
$$-x - 3y + O(x^2 + y^2).$$
Και έτσι καταλήγουμε στο σύστημα πρώτης προσέγγισης της μορφής
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y.$$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η
$$\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 + k + 2 = 0, \quad k_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{7}/2.$$
Άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.

Θα περάσουμε τώρα σε μια άλλη μέθοδο διερεύνησης της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, που ονομάζεται δεύτερη μέθοδος του $Lyapunov$ ή άμεση μέθοδος. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι συνίσταται στο ότι δεν απαιτείται γνώση της λύσης του συστήματος. Το μειονέκτημα είναι ότι δεν υπάρχει μια ορισμένη διαδικασία κατασκευής της συνάρτησης $Lyapunov$, βάσει της οποίας προσδιορίζεται η ευστάθεια της λύσης ισορροπίας.

Θεώρημα 5.2. Αν υπάρχει μια συνάρτηση $v(x_1, \dots, x_n)$, που ονομάζεται συνάρτηση του $Lyapunov$, η οποία είναι της κλάσεως C^1 και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων

1. $v \geq 0$ και $v = 0$, μόνο όταν $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.
2.

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{5.18}$$

για $t \geq t_0$, τότε το σημείο $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ευσταθές.

Παρατήρηση 5.2. Στην συνθήκη (5.18) την παράγωγο της v ως προς t την παίρνουμε κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος. Πράγματι

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \tag{5.19}$$

Αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ικανοποιεί το σύστημα (5.11), δηλαδή είναι τροχιά του συστήματος (5.11), τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους των $x_k(t)$ ως προς t στην (5.19) με αντίστοιχα δεύτερα μέρη του συστήματος (5.11), και έτσι θα καταλήξουμε στην σχέση

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \Phi_k.$$

Απόδειξη του θεωρήματος. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τις συνθήκες του θεωρήματος η v έχει γνήσιο ελάχιστο στο $\mathbf{x} = 0$. Θεωρούμε τα σύνολα στάθμης $v = c$ (βλ. σχήμα 3, σελ. 80), όπου το σύνολο αυτό είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου φάσεων, στα οποία $v = c$. Όλα τα σύνολα στάθμης περιέχουν μέσα τους το γνήσιο ελάχιστο. Αφού $v(0) = 0$, υπάρχει αρκετά μικρό c, ώστε το σύνολο στάθμης $v = c$ βρίσκεται εξολοκλήρου στην ϵ-περιοχή του $\mathbf{x} = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι $v(0) = 0$ είναι γνήσιο ελάχιστο μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η δ-περιοχή του $\mathbf{x} = 0$ να βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στην $v = c$. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία x της δ-περιοχής του $x = 0$ ισχύει $v(\mathbf{x}) < c$. Τώρα, αν θα διαλέξουμε το αρχικό σημείο $\mathbf{x}(t_0)$ να ανήκει στην δ-περιοχή του $\mathbf{x} = 0$, θα έχουμε $v(\mathbf{x}(t_0)) = c_1 < c$. Καθώς $t \to \infty$, τα σημεία της τροχιάς δεν μπορούν να εγκαταλείψουν το εσωτερικό του συνόλου στάθμης $v = c$, επειδή η συνάρτηση v, σύμφωνα με την συνθήκη (5.18), δεν αυξάνει κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς, άρα

$$v(\mathbf{x}) \leq c_1 < c < \epsilon. \tag{5.20}$$

Η (5.20) σημαίνει ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$.

Θα δώσουμε επίσης μια άλλη απόδειξη, που βασίζεται στην διανυσματική ανάλυση. Θα περιοριστούμε με την περίπτωση δυο μεταβλητών: $\mathbf{x} = (x, y)$.

Είναι γνωστό ότι το διάνυσμα $\nabla v = (v_x, v_y)$ είναι κάθετο στην καμπύλη $v = c$. Η φορά του ∇v δείχνει τη διεύθυνση αύξησης του v. Δηλαδή ∇v δείχνει την διεύθυνση απομάκρυνσης από το $x = 0$. Θεωρούμε μια τροχιά $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$. Το διάνυσμα (ϕ_1', ϕ_2') είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά και έχει τη διεύθυνση κίνησης κατά μήκος της τροχιάς. Έστω $x_1 = \phi_1(t_1)$, $y_1 = \phi_2(t_1)$ ένα σημείο τομής της τροχιάς με $v = c$. Σε αυτό το σημείο

$$\phi_1'(t_1) = \Phi_1(x_1, y_1),$$

$$\phi_2'(t_1) = \Phi_2(x_1, y_1).$$

Από την (5.18) λαμβάνουμε στο (x_1, y_1)

$$\frac{dv}{dt} = v_x\phi_1' + v_y\phi_2' = (v_x, v_y)\cdot(\phi_1', \phi_2') \leq 0.$$

Άρα η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων (v_x, v_y) και (ϕ_1', ϕ_2') ανήκει στο διάστημα $[\pi/2, 3\pi/2]$. Έτσι η διεύθυνση κίνησης στην τροχιά είναι προς τα μέσα ως προς $v = c$, στην χειρότερη περίπτωση, εφαπτόμενη σε αυτή τη καμπύλη. Άρα οι τροχιές που ξεκινούν από το εσωτερικό της $v = c$ δεν μπορούν να διαφύγουν, και έτσι το $(x, y) \equiv 0$ είναι ευσταθές σημείο.

$\square$

Παράδειγμα 5.9. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$$

αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ είναι συντηρητικό και το δυναμικό του $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ η συνάρτηση $\phi(\mathbf{x})$ στο 0 έχει γνήσιο μέγιστο, τότε η συνάρτηση *Lyapunov* είναι η

$$v(\mathbf{x}) = \phi(0) - \phi(\mathbf{x})$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Πράγματι, $v(0,0) = 0$, $v(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \neq 0$ και

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2 \leq 0$$

(αφού $\nabla\phi = \mathbf{\Phi}$ και $x_i' = \Phi_i = \phi_{x_i}$).

Παράδειγμα 5.10. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, ..., n.$$

όπου $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ για $i \neq j$ και $a_{ii}(t) \leq 0$. Η συνάρτηση *Lyapunov* σε αυτή τη περίπτωση είναι η

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Πράγματι, $v(\mathbf{0}) = 0$, $v(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \neq 0$ και

$$\frac{dv}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{dx_i}{dt} = 2\sum_{i}^{n} a_{ii}(t)x_i^2 \leq 0.$$

Θεώρημα 5.3. *Αν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 5.2, και επιπλέον για κάθε $\delta_0 > 0$ υπάρχει μια σταθερά $\beta > 0$ τ.ω.*

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0 \ \text{ για } \sum_{i=1}^{n} x_k^2 \geq \delta_0^2 > 0, \quad t \geq T_0, \tag{5.21}$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα, παρατηρούμε ότι αφού ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 5.2, άρα $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ευσταθές σημείο. Αφου ισχύει η (5.21), όπου έχουμε γνήσια ανισότητα, συνεπώς η κίνηση στην τροχιά είναι προς τα μέσα, άρα

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0,$$

αλλιώς, θα υπήρχε κάποιο σημείο $(t_1, \mathbf{x}_1)$ όπου $\frac{dv}{dt} = 0$.

Θα αναφέρουμε επίσης μια άλλη απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αφού είναι ευσταθής η λύση $\mathbf{x} \equiv 0$, άρα

$$v(\mathbf{x}(t)) \le c_1 < c < \epsilon.$$

Λόγω της (5.21) η v μονοτονικά φθίνει κατά μήκος της τροχιάς, άρα

$$\lim_{t\to\infty} v(\mathbf{x}(t)) = \alpha \ge 0.$$

Θα δούμε ότι $\alpha = 0$. Έστω $\alpha > 0$, άρα η τροχιά βρίσκεται στην περιοχή $v \ge \alpha > 0$ για όλα τα $t \ge t_0$. Σε αυτή τη περιοχή η v ικανοποιεί την συνθήκη (5.21), άρα

$$\frac{dv}{dt} \le -\beta < 0 \ \text{ για } \ t \ge T_0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την ανισότητα με dt και ολοκληρώνοντας από T_0 έως t, παίρνουμε

$$v(\mathbf{x}(t)) \le v(\mathbf{x}(T_0)) - \beta(t - T_0). \tag{5.22}$$

Παίρνοντας το t αρκετά μεγάλο βλέπουμε ότι το δεξί μέρος της (5.22) γίνεται αρνητικό και επομένως $v(\mathbf{x}(t)) < 0$, όπου αυτό έρχεται σε αντίθεση με την προϋπόθεση ότι $v(\mathbf{x}(t)) > 0$. Συνεπώς $\alpha = 0$. Όμως υπάρχει μόνο ένα σημείο, στο οποίο μηδενίζεται η v, το σημείο $\mathbf{x} = 0$. Συνεπώς

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι το $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

□

Παράδειγμα 5.11. Εξετάστε αν είναι ασταθές ή ευσταθές το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 x + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x^3 - y^3 x^4.$$

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση *Lyapunov*. Θέλουμε η v να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$v > 0 \ \text{ για } \ (x, y) \ne (0, 0), \ \ v(0, 0) = 0 \ \text{ και } \ \frac{dv}{dt} \le 0.$$

Αφού

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \le 0$$

οι μερικές παράγωγοι της v πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$v_x(-y^2x + y^3) + v_y(-x^3 - y^3x^4) \leq 0.$$

Διαλέγοντας $v_x = x^3$, $v_y = y^3$ λαμβάνουμε

$$x^3(-y^2x + y^3) + y^3(-x^3 - y^3x^4) = -y^2x^4 - y^6x^4 \leq 0.$$

Άρα η

$$v(x, y) = (x^4 + y^4)/4$$

θα είναι η ζητούμενη συνάρτηση $Lyapunov$. Πράγματι $v(0, 0) = 0$, $v > 0$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και

$$\frac{dv}{dt} = v_x(-y^2x + y^3) + v_y(-x^3 - y^3x^4) = -y^2x^4(1 + y^2) \leq 0.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, επειδή όμως η $\frac{dv}{dt}$ μηδενίζεται όχι μόνο στο σημείο $(0, 0)$ το Θεώρημα 5.3 δεν μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Παράδειγμα 5.12. Να δειχθεί ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -x - xy^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y - x^2y$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $Lyapunov$ της μορφής

$$v(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Είναι γνωστό ότι για να είναι θετικά ορισμένη μια τετραγωνική συνάρτηση θα πρέπει οι συντελεστές a, b, c να ικανοποιούν τις σχέσεις: $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$. Ετσι

$$v_x = 2ax + by, \quad v_y = bx + 2cy,$$

άρα

$$\frac{dv}{dt} = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) =$$
$$= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)].$$

Αν επιλέξουμε $b = 0$ και $a = c = 1/2$, τότε

$$\frac{dv}{dt} = -[x^2+2x^2y^2+y^2] \leq 0, \quad v = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq 0, \quad v(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Αρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Επίσης αν

$$x^2 + y^2 \geq \delta_0^2,$$

τότε

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta \ \text{ με } \ \beta = \delta_0^2.$$

Αρα το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ασκήσεις

Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για τα ακόλουθα συστήματα:

Άσκηση 5.1.

$$\frac{dx}{dt} = x + a\,y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2\,y.$$

1. $a = 0$, 2. $a = 1$, 3. $a = -2, 1$.

Άσκηση 5.2.

$$\frac{dx}{dt} = x + \cos\,x - \sin\,y - 1,$$
$$\frac{dy}{dt} = e^x + e^y - 2.$$

Άσκηση 5.3.

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y.$$

Άσκηση 5.4.

$$\frac{dx}{dt} = -e^t x - t^2 y,$$
$$\frac{dy}{dt} = t^2 x - y.$$

Υπόδειξη: κατασκευάστε την συνάρτηση *Lyapunov*.

Άσκηση 5.5. Αποδείξτε ότι το σημείο ισορροπίας του εξής συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -2x,$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y - 2z^2 \sin\,y \cos\,y,$$
$$\frac{dz}{dt} = -2zcos^2y$$

είναι ευσταθές. Υπόδειξη: το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό.

Άσκηση 5.6. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = -2x,$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y - 2z^2 \sin\,y \cos\,y,$$
$$\frac{dz}{dt} = -2zsin^2y.$$

Αποδείξτε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Υπόδειξη: κατασκευάστε την συνάρτηση *Lyapunov*.