ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 3 Οκτωβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 1

1). Έστω $B_1 \subset \mathbf{R}^n$ και $f \in \mathbf{C}(B_1)$. Αποδείξτε ότι
α)

$$\lim_{r \to 0^+} \fint_{\partial B_r} f(X)\, dS_X \; = \; f(0).$$

β)

$$\lim_{r \to 0^+} \fint_{B_r} f(X)\, dX \; = \; f(0).$$

2). Έστω U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Την $v \in \mathbf{C}^2(U)$ τη λέμε υφαρμονική εαν ικανοποιεί

$$-\Delta v(x) \leq 0, \quad x \in U.$$

α) Αποδείξτε ότι αν v υφαρμονική τότε ισχύει:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)\, dy, \quad \forall\ B(x,r) \subset U.$$

β) Έστω $u \in \mathbf{C}^2(U)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy, \quad \forall\ B(x,r) \subset U.$$

Αποδείξτε ότι η u είναι υφαρμονική.

3). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο.
α) Εαν $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ ικανοποιεί

$$-\Delta u(x) > 0, \;\; x \in \Omega,$$

αποδείξτε με επιχειρήματα Απειροστικού Λογισμού ότι

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

β) Εαν $w \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ ικανοποιεί

$$-\Delta w(x) \geq 0, \;\; x \in \Omega,$$

αποδείξτε ότι

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} w(x) = \min_{x \in \partial\Omega} w(x).$$

Υπόδειξη: Για $\varepsilon > 0$ θεωρείστε τη συνάρτηση $u_\varepsilon(x) = w(x) - \varepsilon |x|^2$

4). Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$, $\;f \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$, $\;g \in \mathbf{C}(\partial\Omega)$ λύση του

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \;\; x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), \;\; x \in \partial\Omega \; . \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά c που εξαρτάται μόνο από το χωρίο Ω (με ποιόν τρόπο;) ώστε να ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq c \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| + \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| \right).$$

5). Ο απώτερος στόχος της άσκησης αυτής είναι να αναπαραστήσουμε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0, \;\; x \in \mathbf{R}^n_+, \\ u(x', 0) &= f(x'), \;\; x' \in \mathbf{R}^{n-1} \; . \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n, \; x_n > 0\},$$

εφαρμόζοντας μέθοδο ανάλογη της εύρεσης θεμελιώδους λύσης. Προς τούτο βρείτε λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0, \;\; x \in \mathbf{R}^n_+, \\ u(x', 0) &= \delta_0(x'), \;\; x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

της μορφής (γιατί;)

$$u(x', x_n) = x_n^\alpha \Phi(\xi), \; \xi = \frac{|x'|}{x_n},$$

για κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου α.

Αποδείξτε αρχικά ότι η $\Phi(\xi)$ λύνει τη διαφορική εξίσωση

$$(1 + \xi^2)\Phi''(\xi) + \left(\frac{n-2}{\xi} - 2(\alpha - 1)\xi \right) \Phi'(\xi) + \alpha(\alpha - 1)\Phi(\xi) = 0, \;\; \xi > 0.$$

Στη συνέχεια προσδιορίστε την τιμή της παραμέτρου α ώστε

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} x_n^\alpha \Phi(\frac{|x'|}{x_n}) \, dx' = 1.$$

Ειδικότερα δείξτε ότι πρέπει να κάνουμε την επιλογή $\alpha = -(n-1)$. Επιλέγουμε $\alpha = -(n-1)$ και τότε αποδείξτε ότι η διαφορική εξίσωση έχει μια λύση την $(1+\xi^2)^{-\frac{n}{2}}$, ενώ οι υπόλοιπες λύσεις είναι άφρακτες στο άπειρο. Επιλέγουμε επομένως

$$\Phi(\xi) = c_n(1+\xi^2)^{-\frac{n}{2}}, \ \ \xi > 0.$$

Από ποιά σχέση υπολογίζουμε τη σταθερά c_n?

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη μεθεπόμενη Πέμπτη (17/8/19) στο μάθημα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!