ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 17 Οκτωβρίου 2019

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 2

1. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και $u \in \mathbf{C}(\Omega)$ που έχει την ιδιότητα

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy, \ \ \forall\, B_r(x) \subset \Omega.$$

Αποδείξτε τότε ότι η u έχει και την ιδιότητα

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y, \ \ \forall\, B_r(x) \subset \Omega.$$

2. (Αρχή Ανάκλασης) Θέτουμε

$$B_1^+ \ = \ \{x \in \mathbf{R}^n |\ |x| < 1,\ x_n > 0\},$$

και υποθέτουμε

$$u(x) = 0, \quad x \in \overline{B_1^+} \cap \{x_n = 0\}.$$

Για $x \in B_1$ ορίζουμε

$$v(x) \ = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

α) Εάν επιπρόσθετα $u \in \mathbf{C}^2(\overline{B_1^+})$ είναι αρμονική συνάρτηση, αποδείξτε ότι η $v \in \mathbf{C}^2(B_1)$ και είναι μάλιστα αρμονική στο B_1.

β) Εαν υποθέσουμε μόνο ότι $u \in \mathbf{C}^2(B_1^+) \cap \mathbf{C}(\overline{B_1^+})$ είναι αρμονική συνάρτηση, αποδείξτε επίσης ότι η $v \in \mathbf{C}^2(B_1)$ και είναι μάλιστα αρμονική στο B_1.

3. Έστω $u \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n_+) \cap \mathbf{C}(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ φραγμένη αρμονική συνάρτηση. Εαν επιπρόσθετα ισχύει:

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \ = \ 0, \quad \forall\, x' \ \in \mathbf{R}^{n-1},$$

αποδείξτε τότε ότι:

$$u \equiv 0 \quad \text{στο} \quad \overline{\mathbf{R}^n_+}$$

4. Για $n \geq 3$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)a_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

α) Αν $f \in \mathbf{C}_c(\mathbf{R}^n)$ (δηλ. η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα), αποδείξτε τότε ότι η u ορίζεται καλά, μάλιστα $u \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^n)$ και επιπρόσθετα ισχύει

$$u_{x_i}(x) = -\frac{1}{na_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^n}\, f(y)\, dy \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε το ίδιο αν η f είναι φραγμένη, ολοκληρώσιμη και έχει συμπαγή φορέα.

β)Αν $f \in \mathbf{C}_c^1(\mathbf{R}^n)$, αποδείξτε τότε ότι η $u \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n)$ και επιπρόσθετα ισχύουν:

$$u_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{na_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^n}\, f_{x_j}(y)\, dy \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) &= 0. \end{aligned}$$

5. Έστω $f \in \mathbf{C}_c(B_1),\ B_1 \subset \mathbf{R}^n,\ n \geq 3$, και u η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) &= 0. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι

$$|u(x)| \leq w(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

όπου

$$w(x) = \begin{cases} \frac{|f|_\infty}{2(n-2)} - \frac{|f|_\infty}{2n}\, |x|^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{|f|_\infty}{n(n-2)}\ \frac{1}{|x|^{n-2}}, & |x| > 1, \end{cases}$$

και συμπεράνετε ότι ισχύει η εκτίμηση

$$|u(x)| \leq \frac{|f|_\infty}{2(n-2)}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

6. Έστω u η λύση του προβλήματος

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n_+,$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathbf{R}^n_+,$$

που δίνεται από τον τύπο του Poisson. Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη και μάλιστα

$$g(x) = |x|, \quad x \in \partial\mathbf{R}^n_+ \ \ |x| \leq 1.$$

Αποδείξτε ότι ∇u δεν είναι φραγμένη κοντά στο 0.

Υπόδειξη: Εκτιμήστε $\frac{u(te_n)-u(0)}{t}, \;\; t > 0$.

7. Έστω $c > 0$ και $x \in \mathbf{R}^3$.
α) Βρείτε ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + cu(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

στην μορφή $u(x) = \frac{f(r)}{r}, r = |x|$ με $f(0) > 0$.
β) Βρείτε τη θεμελειώδη λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + cu(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

γ) Έστω u λύση της εξίσωσης. Αποδείξτε ότι η λύση u έχει την εξής "γενικευμένη ιδιότητα μέσης τιμής"

$$u(x) \; = \; \frac{\sqrt{c}\rho}{\sin(\sqrt{c}\rho)} \, \frac{1}{4\pi\rho^2} \, \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) \, dS_y \; , \;\; 0 < \rho < \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει προσωπικά τη μεθεπόμενη Πέμπτη (31/10/19) στο μάθημα.</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>